CHAPITRE 11.9

Convexité

I Enveloppe convexe

Dans ce chapitre, on considère E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et A une partie de E.

Définition I.1.

Posons $P_A = \{C \in \mathcal{P}(E),\ A \subset C \text{ et } C \text{ est convexe}\}$. L'enveloppe convexe de A est définie par

$$conv(A) = \bigcap_{C \in P_A} C$$

Lemme I.2.

Soit C une partie convexe de E. On a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall (z_1, \ldots, z_p) \in C^p,\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{+p},\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{p} \lambda_k z_k \in C$$

Preuve : Montrons la propriété par récurrence sur p.

→ Le cas $p = 1$ est évident et le cas $p = 2$ correspond à la définition de la convexité.

→ Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que la propriété soit vraie pour p. Soit $z_1, \ldots, z_{p+1} \in C$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{p+1} = 1$. On a lorsque $\lambda_{p+1} \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k z_k = (1 - \lambda_{p+1}) \sum_{k=1}^{p} \underbrace{\frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{p+1}}}_{\mu_k} z_k + \lambda_{p+1} z_{p+1}$$

De plus

$$\mu_1 + \cdots + \mu_p = \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}{1 - \lambda_{p+1}} = \frac{1 - \lambda_{p+1}}{1 - \lambda_{p+1}} = 1$$

Donc par hypothèse de récurrence, on a $\sum_{k=1}^{p} \mu_k z_k \in C$, et alors en appliquant la définition de la convexité (i.e. la propriété pour $p = 2$), on a

$$\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k z_k = (1 - \lambda_{p+1}) \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{p+1}} z_k}_{\in C} + \lambda_{p+1} \underbrace{z_{p+1}}_{\in C} \in C$$

On a donc bien le résultat voulu. Il reste le cas $\lambda_{p+1} = 1$ qui est évident.

Proposition I.3.

1. L'intersection de deux ensembles convexes est convexe.
2. $conv(A)$ est le plus petit convexe contenant A.
3. $conv(A) = \left\{ x \in E,\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_1, \dots, x_p \in A, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}^+, \middle| \begin{array}{c} \lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1 \\ x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \end{array} \right\}$

Preuve

1. Cette preuve est laissée comme exercice au lecteur.
2. Par définition de $conv(A)$, tout convexe contenant A contient $conv(A)$, $conv(A)$ est alors le plus petit contenant A.
3. Montrons l'égalité par double inclusion
   - $\rightarrow$ ($\supset$) $A \subset conv(A)$ et $conv(A)$ est convexe, donc pour tout $x_1, \dots, x_p \in A \subset conv(A)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$, $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \in conv(A)$.
   - $\rightarrow$ ($\subset$) Posons $B = \left\{ x \in E,\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_1, \dots, x_p \in A, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}^+, \middle| \begin{array}{c} \lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1 \\ x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \end{array} \right\}$.

     On a $A \subset B \subset conv(A)$, donc il suffit de montrer que B est convexe pour montrer l'égalité, car $conv(A)$ est le plus petit convexe au sens de l'inclusion contenant A.

     Soit $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \in B$, $y = \sum_{k=1}^{p} \mu_k y_k \in B$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

     $$\lambda x + (1 - \lambda) y = \sum_{k=1}^{p} \lambda \lambda_k x_k + (1 - \lambda) \mu_k y_k$$

     Posons

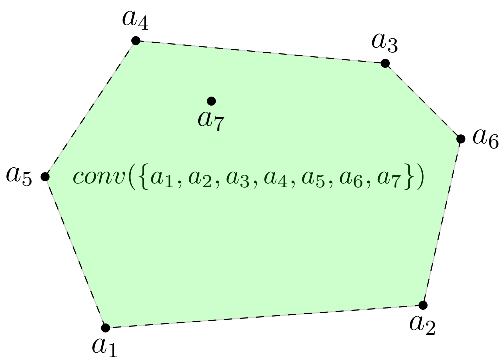
     $$\begin{cases} (z_1, \dots, z_{2p}) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \\ (\delta_1, \dots, \delta_{2p}) = (\lambda\lambda_1, \dots, \lambda\lambda_p, (1 - \lambda)\mu_1, \dots (1 - \lambda)\mu_p) \end{cases}$$

     On a $(z_1, \dots, z_{2p}) \in A^{2p}$, $(\delta_1, \dots, \delta_{2p}) \in \mathbb{R}^{+2p}$ et $\delta_1 + \cdots + \delta_{2p} = 1$, donc on a

     $$\lambda x + (1 - \lambda) y = \sum_{k=1}^{2p} \delta_k z_k \in C$$

     Donc B est bien convexe, ce qui nous permet d'affirmer que $conv(A) = B$.

Exemple : On considère l'exemple suivant, où $\dim E = 2$. Le dessin suivant montre comment obtenir graphiquement l'enveloppe convexe des 7 points $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in E$.



Exercice I.4.

Supposons que E est de dimension finie égale à d. Soit $p \geq d+1$ et $(a_0, \ldots, a_p) \in E^{p+1}$. Montrer qu'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k a_k = 0 \text{ et } \alpha_0 + \cdots + \alpha_p = 0$$

Exercice I.5.

Le résultat de cet exercice est connu sous le nom de théorème de Carathéodory.
Supposons que E soit de dimension finie égale à d. Soit $p \geq d+1$, $(a_0, \ldots, a_p) \in E^{p+1}$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{+p+1}$ tel que $\lambda_0 + \cdots + \lambda_p = 1$. Posons $b = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k a_k$. Monter qu'il existe $j \in [\![0; p]\!]$ tel que

$$\exists (\mu_0, \ldots, \mu_{j-1}, \mu_{j+1}, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{R}^{+p}, \sum_{k=0,\ k \neq j}^{p} \mu_k = 1 \text{ et } \sum_{k=0,\ k \neq j}^{p} \mu_k a_k = b$$

Exercice I.6.

On suppose que E est de dimension finie. Soit K une partie compacte de E. Montrer que $conv(K)$ est une partie compacte de E.

II Projection et séparation

Exercice II.1.

Soit C un convexe non vide fermé de l'espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

1. Montrer que pour tout $a \in E$ il existe un unique $b \in C$ tel que

$$d(a, C) = \|a - b\|$$

2. Montrer que $\forall x \in C,\ \langle a - b,\ x - b \rangle \leq 0$.
3. On pose $b = p_C(a)$. Montrer que p_C est $1-$lipschitzienne.

Exercice II.2.

Soit C un convexe non vide fermé de l'espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$. Soit $a \notin C$. Montrer qu'il existe un hyperplan affine de E qui sépare strictement C de a.

Correction de l'exercice I.4. :

Posons pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $x_k = a_k - a_0$. La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée car le nombre de vecteurs de cette famille est supérieur à la dimension de E. Il existe donc $(\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{p} \beta_k x_k = 0$$

i.e.

$$-\left(\sum_{k=1}^{p} \beta_k\right) a_0 + \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_p a_p = 0$$

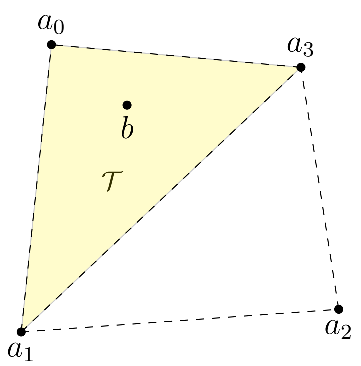
En posant $\alpha_0 = -\left(\sum_{k=1}^{p} \beta_k\right)$ et pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $\alpha_k = \beta_k$, on a

$$\alpha_0 + \cdots + \alpha_p = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{p} \alpha_k a_k = 0$$

D'où le résultat voulu.

Correction de l'exercice I.5. : *(Théorème de Carathéodory)*

Remarquons qu'une autre manière de formuler ce théorème est la suivante :
Soit $p \geq d+1$, $b \in E$ et $a_0, \dots, a_p \in E$ tel que $b \in conv(\{a_0, \dots, a_p\})$. Il existe alors $j \in [\![0;p]\!]$ tel que $b \in conv(\{a_0, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_p\})$.
Pour avoir une intuition du résultat, observons le dessin suivant.



Dans le dessin ci-dessus, on regarde le cas $d = 2$ et $p = 3 \geq d+1$. b appartient au quadrilatère $a_1 a_2 a_3 a_0$, i.e. $b \in conv(\{a_0, a_1, a_2, a_3\})$. Il existe donc $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ et } b = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$$

Mais on voit aussi que b appartient au triangle jaune $\mathcal{T} = conv(\{a_0, a_1, a_3\})$, il existe donc μ_0, μ_1, μ_3 tels que

$$\mu_0 + \mu_1 + \mu_3 = 1 \text{ et } b = \mu_0 a_0 + \mu_1 a_1 + \mu_3 a_3$$

Remarquons que le point qu'on peut enlever à la combinaison convexe n'est pas unique : on aurait pu faire la même chose en enlevant le point a_1 et en considérant le triangle $\mathcal{T}' = conv(\{a_0, a_3, a_2\})$.
Montrons à présent cette propriété dans le cas général.
On considére $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ $p+1$ réels vérifiant la propriété montrée dans l'exercice précédent, i.e.

$$\alpha_0 + \cdots + \alpha_p = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{p} \alpha_k a_k = 0$$

Posons pour tout $k \in [\![0;p]\!]$ et $\tau \in \mathbb{R}$, $\nu_k(\tau) = \lambda_k - \tau\alpha_k$. On a alors pour tout $\tau \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{p}\nu_k(\tau)a_k = \sum_{k=0}^{p}\lambda_k a_k - \tau\sum_{k=0}^{p}\alpha_k a_k = \sum_{k=0}^{p}\lambda_k a_k = b$$

et

$$\sum_{k=0}^{p}\nu_k(\tau) = \sum_{k=0}^{p}\lambda_k - \tau\sum_{k=0}^{p}\alpha_k = 1$$

On souhaite choisir τ de manière à ce que tous les $\nu_k(\tau)$ soient positifs et que au moins un seul parmi ces coefficients soit nul. Posons pour tout $k \in [\![0;p]\!]$, $A_k = \{\tau \in \mathbb{R},\ \nu_k(\tau) \geq 0\}$. Les A_k sont fermés et non vides car ils contiennent tous 0.
On a alors pour tout $k \in [\![0;p]\!]$

- $\to$ Si $\alpha_k > 0$, alors $A_k = \left]-\infty, -\frac{\lambda_k}{\alpha_k}\right]$.
- $\to$ Si $\alpha_k = 0$, alors $A_k = \mathbb{R}$.
- $\to$ Sinon, $A_k = \left[-\frac{\lambda_k}{\alpha_k}, +\infty\right[$.

Posons $S = \bigcap_{k=0}^{p} A_k$. On sait que $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$ et $\sum_{k=0}^{p}\alpha_k = 0$, il existe donc k et l deux entiers dans $[\![0;p]\!]$ tels que $\alpha_k < 0$ et $\alpha_l > 0$. On peut donc affirmer que $S \subset \left]-\infty, -\frac{\lambda_l}{\alpha_l}\right]$ et $S \subset \left[-\frac{\lambda_k}{\alpha_k}, +\infty\right[$. S est donc une intersection d'intervalles majorée et minorée et contenant 0, c'est alors un segment borné non vide. S est une intersection finie de segments de la forme $\left[-\frac{\lambda_k}{\alpha_k}, +\infty\right[$ et $\left]-\infty, -\frac{\lambda_l}{\alpha_l}\right]$ avec $\alpha_l < 0$ et $\alpha_k > 0$, il y a donc au moins un $j \in [\![0;p]\!]$ tel que $-\frac{\lambda_j}{\alpha_j} \in S$. Posons $\tau_0 = -\frac{\lambda_j}{\alpha_j}$.
On a alors pour tout $k \in [\![0;p]\!]$, $\nu_k(\tau_0) \geq 0$ et $\nu_j(\tau_0) = 0$. On a donc finalement en posant pour tout $k \in [\![0;p]\!]$, $\mu_k = \nu_k(\tau_0)$,

$$\sum_{k=0,\ k\neq j}^{p}\mu_k a_k = b \text{ et } \sum_{k=0,\ k\neq j}^{p}\underbrace{\mu_k}_{\geq 0} = 1$$

Ce qui est bien le résultat recherché.
Une conséquence de ce théorème est la suivante : Soit $p \geq d+1$, $b \in E$ et $a_0, \dots, a_p \in E$ tel que $b \in conv(\{a_0, \dots, a_p\})$. Il existe alors $S \subset [\![0;p]\!]$ tel que $|S| = d+1$ vérifiant $b \in conv(\{a_k,\ k \in S\})$. Ce résultat est facilement prouvable en enlevant de la combinaison convexe des points jusqu'à ce que la condition $p \geq d+1$ ne soit plus vérifiée. Ceci entraîne que si A est une partie de E, alors tout élément de $conv(A)$ peut s'écrire comme combinaison convexe d'au plus $d+1$ éléments de A.

Correction de l'exercice I.6. :

Posons $d = \dim E$ et considérons l'ensemble

$$\Lambda = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}_+^{d+1},\ \lambda_0 + \dots + \lambda_d = 1\}$$

et considérons l'application

$$\varphi : \begin{cases} K^{d+1} \times \Lambda & \longrightarrow conv(K) \\ ((a_k)_{k\in[\![0;d]\!]}, (\lambda_k)_{k\in[\![0;d]\!]}) & \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\lambda_k a_k \end{cases}$$

Le résultat énoncé à la fin de l'exercice précédent nous permet d'affirmer que tout élément de $conv(K)$ s'écrit comme combinaison linéaire d'au plus $d+1$ éléments de K, i.e. s'écrit de la forme $\varphi((a_k)_{k\in[\![0;d]\!]}, (\lambda_k)_{k\in[\![0;d]\!]})$ avec $((a_k)_{k\in[\![0;d]\!]}, (\lambda_k)_{k\in[\![0;d]\!]}) \in K^{d+1} \times \Lambda$. φ est donc surjective. De plus Λ est un fermé borné en dimension finie, c'est donc un compact. $K^{d+1} \times \Lambda$ est un produit de compacts, donc d'après la proposition III.1 du chapitre 11.5, c'est un compact. φ est continue car il s'agit de produit et somme de fonctions continues, donc d'après la proposition VI.1 du chapitre 11.5, $\varphi(K^{d+1} \times \Lambda)$ est compact, mais φ est surjective, donc

$\varphi(K^{d+1} \times \Lambda) = conv(K)$. On en déduit donc finalement que $conv(K)$ est compact.

Correction de l'exercice II.1. : *(Projection sur un convexe fermé)*

1. Soit $a \in E$.

   → Existence
   Posons $\delta = \inf_{x \in C} \|x - a\| = d(a, C)$ et soit (x_n) une suite à valeurs dans C vérifiant $\|x_n - a\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \delta$. Pour n assez grand, $\|x_n - a\| \leq \delta + 1$, i.e. $x_n \in B_f(a, \delta + 1)$. Quitte à extraire, on suppose que (x_n) est à valeurs dans $C \cap B_f(a, \delta + 1)$. $C \cap B_f(a, \delta + 1)$ est un fermé borné en dimension finie, c'est donc un compact. il existe donc une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} b \in C$. On a donc $\left\|x_{\varphi(n)} - a\right\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|b - a\|$ et finalement $\|b - a\| = \delta = d(a, C)$.

   → Unicité
   Soit b et b' deux éléments de C tels que $\|a - b\| = \|a - b'\| = d(a, C)$. Supposons par l'absurde que $b \neq b'$. On a

$$\begin{aligned} 2d(a, C)^2 = \|\underbrace{a - b}_{u}\|^2 + \|\underbrace{a - b'}_{v}\|^2 &= 2\left(\left\|\frac{u + v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u - v}{2}\right\|^2\right) \\ &= 2\left\|a - \frac{b + b'}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|b - b'\|^2 > 2d(a, C)^2 \end{aligned}$$

   Ce qui est absurde, donc $b = b'$. On a donc bien l'unicité. La dernière inégalité est vraie car $\frac{b+b'}{2} \in C$.

2. Posons pour tout $t \in]0, 1]$ et $x \in C$, $x_t = tx + (1 - t)b$. On a alors pour tout $x \in C$ et $t \in]0, 1]$, $x_t \in C$, donc $\|a - x_t\|^2 \geq \|a - b\|^2$. On a de plus

$$\begin{aligned} \|a - x_t\|^2 \geq \|a - b\|^2 &\iff \|t(a - x) + (1 - t)(a - b)\|^2 \geq \|a - b\|^2 \\ &\iff t^2\|a - x\|^2 + (t^2 - 2t + 1)\|a - b\|^2 + 2t(1 - t)\langle a - x,\ a - b\rangle \geq \|a - b\|^2 \\ &\iff t^2\|a - x\|^2 + (t^2 - 2t)\|a - b\|^2 + 2t(1 - t)\langle a - x,\ a - b\rangle \geq 0 \\ &\iff t\|a - x\|^2 + (t - 2)\|a - b\|^2 + 2(1 - t)\langle a - x,\ a - b\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

   En faisant tendre t vers 0 on obtient que pour tout $x \in C$

$$\begin{aligned} \|a - x_t\|^2 \geq \|a - b\|^2 &\implies 2\langle a - x,\ a - b\rangle \geq 2\|a - b\|^2 \quad (*) \\ &\iff 2\langle a - b + b - x,\ a - b\rangle \geq 2\|a - b\|^2 \\ &\iff \langle b - x,\ a - b\rangle \geq 0 \\ &\iff \langle x - b,\ a - b\rangle \leq 0 \end{aligned}$$

   On a donc bien le résultat voulu.

3. Soient $a, a' \in E$, $b = p_C(a)$ et $b' = p_C(a')$. D'après la question précédente on a

$$\langle a - b,\ b' - b\rangle \leq 0$$

   et

$$\langle a' - b',\ b - b'\rangle \leq 0 \text{ i.e. } \langle b' - a',\ b' - b\rangle \leq 0$$

   en sommant ces deux inégalité, on obtient

$$\langle b' - a' + a - b,\ b' - b\rangle \leq 0 \text{ i.e. } \|b' - b\|^2 \leq \langle a' - a,\ b' - b\rangle$$

On a donc finalement

$$\|b'-b\|^2 \leq \langle a'-a,\ b'-b\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \|a'-a\| \times \|b'-b\|$$

Si $b = b'$, alors on a

$$\|p_C(a) - p_C(a')\| = \|b - b'\| = 0 \leq \|a - a'\|$$

Sinon, en simplifiant des deux côtés par $\|b'-b\|$ on trouve que

$$\|b'-b\| \leq \|a'-a\| \ \text{ i.e. } \ \|p_C(a) - p_C(a')\| \leq \|a - a'\|$$

Ce qui est bien le résultat voulu.

<u>**Correction de l'exercice II.2. :**</u> *(Séparation par un hyperplan)*

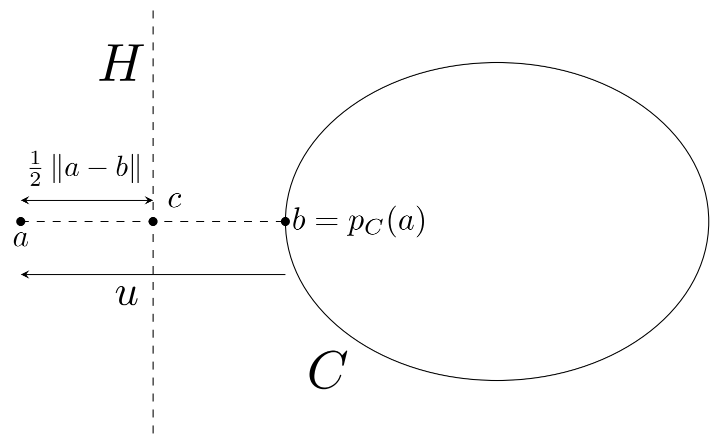
Tout hyperplan affine H de E s'écrit de la manière suivante

$$H = \{z \in \mathbb{E},\ \langle u,\ z\rangle = k\}$$

avec $k \in \mathbb{R}$ et $u \in E$. L'hyperplan H sépare strictement a et C s'il vérifie la condition suivante :

$$\forall x \in C,\ \langle u,\ x\rangle < k \text{ et } \langle u,\ a\rangle > k$$

Pour comprendre l'intuition derrière la solution de cet exercice, observons le dessin suivant en dimension 2.



Nous allons construire l'hyperplan H en nous aidant du dessin ci-dessus.
Posons $b = p_C(a)$ la projection de a sur C, $u = a - b$ et $c = \frac{a+b}{2}$. Rappelons l'inégalité $(*)$ de l'exercice précédent :

$$\forall x \in C,\ \langle a-x,\ a-b\rangle \geq \|a-b\|^2$$

On souhaite trouver un hyperplan orthogonal à $u = a - b$ séparant a et C. On a pour tout $x \in C$,

$$\begin{aligned}
\langle a-x,\ a-b\rangle \geq \|a-b\|^2 &\iff \langle a-c+c-x,\ a-b\rangle \geq \|a-b\|^2 \\
&\iff \langle c-x,\ a-b\rangle \geq \frac{1}{2}\|a-b\|^2 \\
&\iff \langle x,\ u\rangle \leq \langle c,\ u\rangle - \frac{1}{2}\|a-b\|^2 < \langle c,\ u\rangle
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\langle a-c,\ a-b\rangle = \left\langle \frac{a-b}{2},\ a-b\right\rangle = \frac{1}{2}\|a-b\|^2$$

i.e.

$$\langle a,\ u\rangle = \langle c,\ u\rangle + \frac{1}{2}\|a-b\|^2 > \langle c,\ u\rangle$$

En prenant donc $k = \langle c,\ u\rangle$ et $H = \{z \in \mathbb{E},\ \langle u,\ z\rangle = k\}$. On a bien

$$\forall x \in C,\ \langle u,\ x\rangle < k \text{ et } \langle u,\ a\rangle > k$$

H sépare donc bien a de C strictement.

*　*
*

Document compilé par Omar Bennouna et révisé par Issam Tauil le 08/04/2022 pour cpge-paradise.com.
Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.