CHAPITRE 30.1

Probabilités

Dans tout ce chapitre, E désigne un ensemble.

Préliminaires

→ Soient P et Q deux assertions. Si $A = \{P\}$, $B = \{Q\}$, alors $A^\complement = \{\neg P\}$, $A \cap B = \{P \wedge Q\}$, et $A \cup B = \{P \vee Q\}$.

→ Soit Ω un ensemble. Soit $(A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}$. Alors,

$$\bigcap_{N=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n \right) = \{\omega \in \Omega \mid \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in [\![N, +\infty[\![,\ \omega \in A_n\}$$

Si $\omega \in \Omega$, alors ω appartient cet ensemble si, et seulement si, ω appartient à une infinité de termes de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I Tribus

On appelle tribu sur E toute partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

→ $\varnothing$ et $E \in \mathcal{T}$.

→ Si $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$.

→ Si $A \in \mathcal{T}$, $A^\complement \in \mathcal{T}$.

Exemples : $\{\varnothing, E\}$ est une tribu sur E, et si E est dénombrable, $\mathcal{P}(E)$ est une tribu sur E.

Propriétés

Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur E. Soit $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$.

→ Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{N} A_n = \left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots \in \mathcal{T}$.

→ Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{N} A_n = \left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n^\complement\right)^\complement \in \mathcal{T}$.

→ Il existe une suite $(B_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints telle que $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$, et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{N} A_n = \bigcup_{n=0}^{N} B_n$.

→ Si Λ est un ensemble non vide, et $(\mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de tribus sur E, alors $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda$ est aussi une tribu sur E.

Preuve de la troisième propriété : En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n \setminus \left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\right)$, on construit bien une suite d'ensembles deux à deux disjoints qui vérifie les deux propriétés.

Tribu engendrée

Définition - propriété

Soit X une partie de $\mathcal{P}(E)$, et notons $\mathcal{T}_X$ l'ensemble des tribus sur E contenant X. On appelle *tribu engendrée par* X, la tribu

$$\mathcal{T}(X) = \bigcap_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_X} \mathcal{T}$$

C'est la plus petite tribu sur E contenant X.

Exemples

→ On appelle tribu borélienne sur $\mathbb{R}$, et on note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Par complémentarité, cette tribu contient également tous les fermés de $\mathbb{R}$. Donc cette tribu contient tous les points de $\mathbb{R}$, et par union dénombrable, $\mathbb{Q} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ puis, par complémentarité, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

→ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties de E incluant $\varnothing$ et E. Posons

$$\mathcal{T}_a = \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} B_k \;\middle|\; \forall k \in [\![1; n]\!],\ B_k \in \left\{ A_k, A_k^{\complement} \right\} \right\}$$

Les éléments de $\mathcal{T}_a$ sont deux à deux dijoints et la tribu engendrée par $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est l'ensemble de réunions d'ensembles appartenant à $\mathcal{T}_a$.

→ Soit $(A_n) \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$ une suite de parties de E deux à deux disjointes telle que $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n = E$. La tribu engendrée par l'ensemble des termes de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathcal{T} = \left\{ \bigcup\limits_{n\in I} A_n \;\middle|\; I \subset \mathbb{N} \right\}$.

En effet, $E = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$, $\varnothing = \bigcup\limits_{n\in\varnothing} A_n \in \mathcal{T}$, et $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable.

Enfin, si $I \subset \mathbb{N}$, $\left(\bigcup\limits_{n\in I} A_n \right)^{\complement} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus I} A_n \in \mathcal{T}$.

Notation

Soient A et B deux parties de E. Si l'union $A \cup B$ est disjointe, on la note $A \sqcup B$.

Propriété - définition

Soit F un ensemble, et f une application de E dans F. Si $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F, l'ensemble des images réciproques des éléments de $\mathcal{T}'$ par f, noté $f^{-1}\langle \mathcal{T}' \rangle$, est une tribu sur E, appelée tribu image réciproque de $\mathcal{T}'$ sous f.
Si, de plus, on munit E d'une tribu $\mathcal{T}$ sur E, et F de la tribu $\mathcal{T}'$, alors $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{T}')$ sont qualifiés d'espaces mesurables, et $f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (F, \mathcal{T}')$ est dite mesurable lorsque $f^{-1}\langle \mathcal{T}' \rangle \subset \mathcal{T}$

II Espaces probabilisés

Dans la suite du chapitre, on munit E d'une tribu $\mathcal{T}$ sur E si bien que $(E, \mathcal{T})$ est un espace mesurable, ou encore un espace probabilisable. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés *événements*.

Définition

On dit qu'une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \longrightarrow [0,1]$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(E, \mathcal{T})$ lorsqu'elle vérifie les propriétés suivantes :

- → $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}(E) = 1$.
- → Si $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles *i.e.* une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Propriétés

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(E, \mathcal{T})$. Alors $\mathbb{P}$ vérifie les propriétés suivantes :

- → Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $A_0, \ldots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$
- → *Croissance :* Soient A et B deux événements. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- → Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$. Alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=1}^{k} A_{j_\ell}\right)$$
L'égalité se nomme *la formule de Poincaré*.
- → *Continuité croissante :* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements *i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$. Alors
$$\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$
- → *Continuité décroissante :* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements *i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$. Alors
$$\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Preuve de la continuité décroissante à partir de la continuité croissante

$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{\complement}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $\underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{\complement}\right)}_{=1-\mathbb{P}\left(\underbrace{\bigcap_{k=0}^{n} A_k}_{=A_n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k^{\complement}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$

Conséquence : Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements telle que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Preuve : $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements donc par continuité croissante

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

III Événement presque sûr, événement négligeable

Dans la suite du chapitre, on munit l'espace probabilisable $(E, \mathcal{T})$ d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(E, \mathcal{T})$, si bien que $(E, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Définitions

On dit qu'un événement A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$. On dit qu'un événement A est négligeable lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.

Propriétés

→ Soient A et B sont deux événements tels que $A \subset B$. Si A est presque sûr, alors B est presque sûr.

→ Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements négligeables, alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est négligeable.

Preuve

→ $1 = \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \leq 1$, donc B est presque sûr.

→ La série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge car elle est nulle donc $0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) = 0$, donc $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est négligeable.

Exercice

Soit $(E, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge.

Que dire que l'événement $\bigcap_{N=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n\right)$?

IV Exemples d'espaces probabilisés

1. Ensembles finis

Espace avec équiprobabilité : Si E est non vide et fini, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$, et pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|X|}$ alors $(E, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Espace image d'une loi binomiale : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Si $E = [\![0; n]\!]$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$, et pour tout $k \in E$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, alors $(E, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

2. Ensembles dénombrables

Supposons dans cette partie que E soit dénombrable. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une énumeration bijective de E.

Soit $(a_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+)$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

Posons $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, posons $I_A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A\}$, puis $\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in I_A} a_n$.

On a bien $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}(E) = 1$, et si (A_n) est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n}_{\text{noté } A}\Bigg) = \sum_{k \in I_A} a_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k \in I_{A_n}} a_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Donc $(E, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Exemples

→ Soit $a > 1$. Si $E = \mathbb{N}^*$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{\zeta(a)n^a}$, alors $(E, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. C'est l'univers image d'une loi ζ de paramètre a.

→ Soit $p \in]0,1[$. Si $E = \mathbb{N}^*$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n\}) = (1-p)^{n-1}p$, alors $(E, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. C'est l'univers image d'une loi géométrique de paramètre p.

→ Soit $\lambda > 0$. Si $E = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$, alors $(E, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. C'est l'univers image d'une loi de Poisson de paramètre λ.

→ Soit F un ensemble dénombrable et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumeration bijective de F. Soit $(b_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}^+)$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = 1$. Alors en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{y_n\}) = b_n$, on définit bien une probabilité.
On définit la probabilité produit $\mathbb{P}_\times$ sur l'espace probabilisable $(E \times F, \mathcal{P}(E \times F))$ par

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathbb{P}_\times(\{x_n, y_m\}) = a_n b_m$$

On vérifie que $\mathbb{P}_\times(E \times F) = \displaystyle\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_n b_m = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_m\right) = 1.$

Une correction de l'exercice

Pour tout $M \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n \geq N} A_n\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{croissance de la probabilité}}}{\leq} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq M} A_n\right) \leq \sum_{n=M}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[M \to +\infty]{} 0$$

donc $\displaystyle\bigcap_{N=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n \geq N} A_n\right)$ est négligeable.

* * *

Compilé par Mehdi Chouta pour CPGE Paradise le 11 février 2021.
La dernière mise à jour mineure a eu lieu le 14 février 2021.