



Variables aléatoires

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probablisé, et (E, \mathcal{U}) un espace probablisable.

I Généralités

Une variable aléatoire à valeurs dans E est une application $X : (\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{U})$ telle que pour tout $U \in \mathcal{U}$, $X^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Autrement dit, $X : (\Omega, \mathcal{T}) \rightarrow (E, \mathcal{U})$ est une fonction mesurable.

Loi de probabilité : La loi de X , notée \mathcal{L}_X , est une application de \mathcal{U} dans $[0, 1]$ définie par

$$\forall U \in \mathcal{U}, \quad \mathcal{L}_X(U) = \mathbb{P}(X^{-1}(U))$$

Ainsi, $\mathcal{L}_X(E) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathcal{L}_X(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et, pour toute suite $(U_n) \in \mathcal{U}^{\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints,

$$\mathcal{L}_X\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} U_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} X^{-1}(U_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(U_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}_X(U_n)$$



Notons que sur tout espace probablisable, on peut définir une loi de probabilité \mathcal{L} sans se donner de variable aléatoire.

II Variables discrètes

Définition 1.

On dit qu'une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{U})$ est discrète lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable.


Notation 2.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $X : (\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{U})$ une variable aléatoire. Soient $x, y \in E$.

- L'événement $X^{-1}(\{x\})$ est noté $[X = x]$.
- Pour tout $A \in \mathcal{U}$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $[X \in A]$.
- Si $(E, \mathcal{U}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, l'événement $X^{-1}(]-\infty, x])$ (respectivement $X^{-1}(]-\infty, x[))$ est noté $[X \leq x]$ (respectivement $[X < x]$).
- Si $(E, \mathcal{U}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, l'événement $X^{-1}([x, +\infty[)$ (respectivement $X^{-1}(]x, +\infty[))$ est noté $[X \geq x]$ (respectivement $[X > x]$).
- Si $(E, \mathcal{U}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et $x \leq y$, l'événement $X^{-1}([x, y])$ est noté $[x \leq X \leq y]$, et on note de manière analogue les événements $X^{-1}(]x, y])$, $X^{-1}([x, y[)$, et $X^{-1}(]x, y[)$.

Proposition 3.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, alors $X + Y$ et λX sont des variables aléatoires discrètes.

 **Preuve :** L'application

$$\begin{aligned} X(\Omega) \times Y(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

a pour image une partie dénombrable de \mathbb{R}^d contenant $(X + Y)(\Omega)$.

De plus, pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, $(X + Y)^{-1}(z) = \bigcup_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=z}} ([X = x] \cap [Y = y]) \in \mathcal{T}$ en tant qu'union

dénombrable d'événements.

Remarque 4.

L'union étant disjointe, la loi de $X + Y$ est donnée par

$$\forall z \in (X + Y)(\Omega), \quad \mathcal{L}_{X+Y}(z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=z}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

III Variables aléatoires discrètes indépendantes

Dans la suite, on considère que les variables aléatoires sont définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans (E, \mathcal{U}) .

Définition 5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires.

On dit que X_1, \dots, X_n sont indépendantes lorsque, pour tous $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$, les événements $[X_1 \in A_1], \dots, [X_n \in A_n]$ sont mutuellement indépendants.

Suites : On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes lorsque pour toute partie finie I de \mathbb{N} , les variables aléatoires de $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes.

Remarque 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires. Alors X_1, \dots, X_n sont indépendantes si, et seulement si, les tribus images réciproques $X_1^{-1}\langle \mathcal{U} \rangle, \dots, X_n^{-1}\langle \mathcal{U} \rangle$ sont indépendantes.

Proposition 7.

Soient $n, d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $(E, \mathcal{U}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes. Alors :

→ X_1, \dots, X_n sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, les événements $[X_1 = x_1], \dots, [X_n = x_n]$ sont mutuellement indépendants.

→ *Lemme des coalitions :* Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p + q = n$. Soient $f : (\mathbb{R}^d)^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $g : (\mathbb{R}^d)^q \longrightarrow \mathbb{R}^d$ deux fonctions.

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes alors, $f(X_1, \dots, X_p)$ est une variable aléatoire indépendante de $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$.

Exemples : $X_1 + \dots + X_p$ et $X_{p+1} + \dots + X_n$ sont indépendantes.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i < i + 3 \leq n$, $X_i X_{i+1}$ et $X_{i+2} X_{i+3}$ sont indépendantes.

Preuve des propositions :

→ (\Leftrightarrow) Soient $A_1, \dots, A_n \subset E$. En utilisant le théorème d'associativité pour les familles sommables,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_1 \in A_1] \cap \dots \cap [X_n \in A_n]) &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \dots \times A_n} \mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \dots \times A_n} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n) \end{aligned}$$

→ Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$. Par indépendance des variables X_1, \dots, X_n ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([f(X_1, \dots, X_p) = x] \cap [g(X_{p+1}, \dots, X_n) = y]) &= \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in E^n \\ f(x_1, \dots, x_p) = x \\ g(x_{p+1}, \dots, x_n) = y}} \mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) \\ &= \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in E^n \\ f(x_1, \dots, x_p) = x \\ g(x_{p+1}, \dots, x_n) = y}} \mathbb{P}([X_1 = x_1]) \dots \mathbb{P}([X_n = x_n]) \\ &= \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_p) \in E^p \\ f(x_1, \dots, x_p) = x}} \mathbb{P}([X_1 = x_1]) \dots \mathbb{P}([X_p = x_p]) \mathbb{P}(g(X_{p+1}, \dots, X_n) = y) \\ &= \mathbb{P}(f(X_1, \dots, X_p) = x) \mathbb{P}(g(X_{p+1}, \dots, X_n) = y) \end{aligned}$$

Exercice 8.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : (\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire discrète. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X soit indépendante d'elle-même.

Exercice 9.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X, Y deux variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$, indépendantes, et telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{2^i}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(\min(X, Y) \leq N)$.

IV Lois usuelles

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont discrètes.

Schéma de Bernoulli¹ : Soit $p \in]0, 1[$. Un schéma de Bernoulli est une suite finie d'expériences identiques, deux à deux indépendantes et ayant, chacune, exactement deux issues possibles : un succès ou un échec. La probabilité qu'une expérience soit un succès vaut p .

Cette suite d'expériences est modélisée par les termes d'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{0, 1\}$, et suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ *i.e.* pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$.

Loi binomiale : Soient $n \in \mathbb{N}$, et $p \in]0, 1[$. Considérons un schéma de Bernoulli d'ordre n (*i.e.* où n expériences sont menées) où la probabilité de succès vaut p . Le nombre de succès est aléatoire et est compris entre 0 et n , et la probabilité que k succès aient lieu vaut la probabilité que l'une des situations où $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ succès sont disséminés parmi les n expériences ait lieu : l'une de ces situations a une probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ d'avoir lieu (par indépendance), et il y a $\binom{n}{k}$ combinaisons de k succès parmi n expériences à deux issues.

La variable aléatoire $S = \sum_{k=1}^n X_k$ qui compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli d'ordre n et de probabilité de succès p est à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$ et suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Loi de Rademacher : Il est possible de modéliser un schéma de Bernoulli d'ordre $n \in \mathbb{N}$ et de probabilité de succès $p \in]0, 1[$ par les termes d'une suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$ indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Rademacher *i.e.* pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y_k = 1) = p$.

Dans un tel contexte, il est loisible de se ramener à la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables de Bernoulli correspondante en remarquant que, presque sûrement,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Y_k = 2X_k - 1$$

Loi géométrique : Considérons un schéma de Bernoulli infini *i.e.* où l'on réalise une infinité dénombrable d'expériences identiques et indépendantes, et où la probabilité de succès vaut $p \in]0, 1[$.

Le temps d'attente du premier succès est une variable aléatoire T à valeurs dans \mathbb{N}^* suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour que le premier succès ait lieu à la n -ième expérience, il faut et il suffit que les expériences antérieures se soldent toutes par des échecs et que la n -ième soit un succès, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(T = n) = (1-p)^{n-1} p$$

Théorème 10.

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Alors

→ Presque sûrement, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_k = 1$.

→ $Y = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k = 1\}$ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

 **Preuve :**

→ La suite d'événements $\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = 0] \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, donc par continuité décroissante et uni-

1. Rappelons que Jacques Bernoulli n'est pas une nouille.

citée de la limite :

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = 0]\right)}_{=(1-p)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\neg[\exists k \in \mathbb{N}^*, X_k = 1]) = 0$$

→ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $[Y = n] = [X_0 = 0] \cap \dots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 1] \in \mathcal{T}$, donc Y est mesurable, c'est donc une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

Par indépendance,

$$\mathbb{P}(Y = n) = (1 - p)^{n-1}p$$

Remarque 11.

Souvent, le premier succès arrive assez tôt. En effet, il existe $\mu > 0$ tel que $1 - p = e^{-\mu}$, donc $(1 - p)^{n-1}p = e^{-(n-1)\mu}(1 - e^{-\mu})$, ce qui exhibe une décroissance exponentielle de la probabilité du premier succès avec le rang de ce succès.

Proposition 12.

Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Alors

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k)$$



On dit qu'une loi géométrique est une loi sans mémoire.

Preuve : Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) &= \frac{\mathbb{P}(X > n + k)}{\mathbb{P}(X > n)} \\ &= \frac{\sum_{m=n+k+1}^{+\infty} (1-p)^{m-1}p}{\sum_{m=n+1}^{+\infty} (1-p)^{m-1}p} \\ &= \frac{(1-p)^{n+k} \times \cancel{\frac{1}{1-(1-p)}}}{(1-p)^n \times \cancel{\frac{1}{1-(1-p)}}} \\ &= (1-p)^k = \mathbb{P}(X > k) \end{aligned}$$

formule utile pour une loi géométrique

Loi de Poisson : Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.

Théorème 13.

Soit $\lambda > 0$. Soit $(p_n) \in]0, 1[^\mathbb{N}$ telle que $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p_n)$. Alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ i.e.

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = m) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$$

 **Preuve :** Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $n > m$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = m) &= \binom{n}{m} p_n^m (1 - p_n)^{n-m} \\ &= \frac{n \times \cdots \times (n - m + 1)}{m!} (1 - p_n)^{-m} p_n^m (1 - p_n)^n \end{aligned}$$

Or $(1 - p_n)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda}$ car $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$. De plus,

$$n \times \cdots \times (n - m + 1) (1 - p_n)^{-m} p_n^m = \underbrace{(np_n)^m}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda^m} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \underbrace{(1 - p_n)^{-m}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 14.

Soient $\lambda > 0$ et $p \in]0, 1[$. On modélise le nombre d'œufs pondus par un poisson par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On modélise l'éclosion d'un œuf indépendamment des autres par une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Déterminer la loi du nombre d'œufs éclos.

Exercice 15.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{T}) , indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Rademacher de paramètre p .

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_m = \bigcap_{n=0}^{+\infty} [|S_n| \leq m].$$

1. On suppose que $p = \frac{1}{2}$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_m) = 0$.
2. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que $\mathbb{P}([S_n = 0] \text{ infiniment souvent}) = 0$.

V Compléments

Fonction de répartition : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On introduit la fonction de répartition de X , notée F_X , définie par

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$$

 Cette fonction ne caractérise que la loi de X .

Proposition 16.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors :

- F_X est croissante.
- $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.
- F_X est continue à droite en tout point de \mathbb{R} .
- Soit $a \in \mathbb{R}$. F_X n'est pas continue en a si, et seulement si, $\mathbb{P}(X = a) > 0$.

Preuves :

- La croissance de F_X découle de la croissance de \mathbb{P} .
- Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante divergeant vers $-\infty$. $([X \leq x_n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements donc par continuité décroissante,

$$F_X(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} [X \leq x_n] \right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Par un raisonnement analogue, on prouve de même que $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

- Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante convergeant vers $a \in \mathbb{R}$. $([X \leq x_n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements donc par continuité décroissante, $F_X(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(a)$. Donc F_X est continue à droite en a .
- (\Rightarrow) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante convergeant vers a et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante convergeant vers a sans valoir a . Par continuité croissante et décroissante, on montre que $F_X(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(a)$ et $F_X(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(a^-)$.
Donc $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-) > 0$ car F_X est discontinue en a .
- (\Leftarrow) Si F_X est continue en a , alors $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-) = 0$.

Variables à densité : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que X est une variable aléatoire à densité s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable et telle que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad F_X(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$$

Une telle fonction détermine entièrement la loi de X .


Exemples :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{-t} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(t)$. f est la densité d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2}$. f est la densité d'une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{(1+t^2)\pi}$. f est la densité d'une loi de Cauchy.

Il est alors possible de définir, sous réserve d'existence, l'espérance et le moment d'ordre 2 de telles variables par $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$, et $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)dt$

Proposition 17.

Si X est une variable aléatoire à densité, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

 **Preuve :** Soit $a \in \mathbb{R}$. $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-) = 0$ car la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité est continue. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [a - \varepsilon, a]$,

$$|F_X(a) - F_X(x)| \leq \|f\|_{\infty, [a-\varepsilon, a]} |x - a|$$

ce qui démontre à la continuité à gauche, donc la continuité.

Correction de l'exercice 8. :

Supposons que X soit indépendante d'elle-même. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$. Alors par indépendance des événements $[X = x]$ et $[X = x]$, $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}([X = x] \cap [X = x]) = \mathbb{P}(X = x)^2$, donc $\mathbb{P}(X = x) = 1$. Donc X est presque sûrement constante.

Réciproquement, toute variable aléatoire constante est indépendante d'elle-même.

En conclusion, une variable aléatoire est indépendante d'elle-même si, et seulement si, elle est presque sûrement constante.

Correction de l'exercice 9. :

$$1. \mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} [X = i] \cap [Y = i]\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendance}}}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}.$$

$$2. \mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} [Y = i] \cap [X > i]\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendance}}}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+j}} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}.$$

$$3. \mathbb{P}(\min(X, Y) \leq N) = 1 - \mathbb{P}(\underbrace{\min(X, Y) > N}_{=[X > N] \cap [Y > N]}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendance}}}{=} 1 - \mathbb{P}(X > N)\mathbb{P}(Y > N) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calcul aisé}}}{=} 1 - \frac{1}{4^N}$$

Correction de l'exercice 14. :

Notons X la variable aléatoire désignant le nombre d'œufs pondus, et Y le nombre d'œufs ayant éclos.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ et pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\mathbb{P}(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ car

lorsque $[X = n]$ est réalisé, chaque éclosion est considérée, indépendamment des autres comme un succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de probabilité de succès p .

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = k] \cap [X = n]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k | X = n)\mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+k)!}{k!m!} p^k (1-p)^m \frac{\lambda^{m+k}}{(m+k)!} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad m \leftarrow n - k \\ &= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^m \lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} \\ &= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \end{aligned}$$

Donc Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$.

Correction de l'exercice 15. :

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $B_k = \bigcap_{i=0}^{2m+1} [X_{km+i} = 1]$. Par indépendance, $\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{2^{2m+2}}$ et par construction, si B_k est réalisé, alors $|S_{mk+2m+1} - S_{mk-1}| \geq 2m + 2$ est réalisé, donc $[S_{mk+2m+1} \notin \llbracket -m; m \rrbracket] \cup [S_{mk-1} \notin \llbracket -m; m \rrbracket]$ est réalisé, et ceci est valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$

posons $k_\ell = 4\ell m$. Par le lemme des coalitions, pour tous $\ell, \ell' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\ell \neq \ell'$, les événements B_ℓ et $B_{\ell'}$ sont indépendants. De plus $\sum_{\ell \geq 1} \mathbb{P}(B_{k_\ell})$ est divergente (son terme général est non nul et indépendant de ℓ).

Le premier théorème de Borel-Cantelli assure alors que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{\ell'=l+1}^{+\infty} B_{k_{\ell'}}\right)\right) = 1$

Autrement dit, presque sûrement, B_{k_ℓ} est réalisé infiniment souvent, donc l'événement A_m est négligeable : il existe une partie infinie J de \mathbb{N} telle que pour tout $n \in J$, $S_n \notin [-m; m]$.

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, posons $u_m = \mathbb{P}(S_{2m} = 0)$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que le retour à l'origine se fait si, et seulement si, autant de déplacements à gauche qu'à droite ont lieu et, sur $2m$ déplacements il y a $\binom{2m}{m}$ telles combinaisons et par indépendance des déplacements, $u_m = \binom{2m}{m} p^m (1-p)^m$. Alors

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = p(1-p) \frac{(2m+2)(2m+1)}{(m+1)^2} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 4p(1-p) < 1$$

En effet, $y = x(1-x)$ est une parabole tournée vers le bas atteignant son maximum entre les deux racines de $X(X-1)$, donc en $x = \frac{1}{2}$, et celui-ci vaut $\frac{1}{4}$. $p \neq \frac{1}{2}$ donc l'inégalité est stricte. D'après la règle de d'Alembert, $\sum_{m \geq 1} u_m$ converge.

Le deuxième théorème de Borel-Cantelli assure alors que $\mathbb{P}([S_{2m} = 0] \text{ infiniment souvent}) = 0$.

* * *

Compilé par Mehdi Chouta pour CPGE Paradise le 21 mars 2021.