CHAPITRE 30.3

Variables aléatoires

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé, et $(E, \mathcal{U})$ un espace probabilisable.

I Généralités

Une variable aléatoire à valeurs dans E est une application $X : (\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}) \longrightarrow (E, \mathcal{U})$ telle que pour tout $U \in \mathcal{U}$, $X^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Autrement dit, $X : (\Omega, \mathcal{T}) \longrightarrow (E, \mathcal{U})$ est une fonction mesurable.
Loi de probabilité : La loi de X, notée $\mathcal{L}_X$, est une application de $\mathcal{U}$ dans $[0,1]$ définie par

$$\forall U \in \mathcal{U}, \qquad \mathcal{L}_X(U) = \mathbb{P}(X^{-1}(U))$$

Ainsi, $\mathcal{L}_X(E) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathcal{L}_X(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et, pour toute suite $(U_n) \in \mathcal{U}^{\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints,

$$\mathcal{L}_X\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} U_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} X^{-1}(U_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(U_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}_X(U_n)$$

Notons que sur tout espace probabilisable, on peut définir une loi de probabilité $\mathcal{L}$ sans se donner de variable aléatoire.

II Variables discrètes

Définition

On dit qu'une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}) \longrightarrow (E, \mathcal{U})$ est discrète lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable.

Notations

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $X : (\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}) \longrightarrow (E, \mathcal{U})$ une variable aléatoire. Soient $x, y \in E$.

- → L'événement $X^{-1}(\{x\})$ est noté $[X = x]$.
- → Pour tout $A \in \mathcal{U}$, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $[X \in A]$.
- → Si $(E, \mathcal{U}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, l'événement $X^{-1}(]-\infty, x])$ (respectivement $X^{-1}(]-\infty, x[)$) est noté $[X \leq x]$ (respectivement $[X < x]$).
- → Si $(E, \mathcal{U}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, l'événement $X^{-1}([x, +\infty[)$ (respectivement $X^{-1}(]x, +\infty[)$) est noté $[X \geq x]$ (respectivement $[X > x]]$).
- → Si $(E, \mathcal{U}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et $x \leq y$, l'événement $X^{-1}([x, y])$ est noté $[x \leq X \leq y]$, et on note de manière analogue les événements $X^{-1}(]x, y])$, $X^{-1}([x, y[)$, et $X^{-1}(]x, y[)$.

Opérations

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, alors $X + Y$ et λX sont des variables aléatoires discrètes.

Preuve : L'application

$$\begin{aligned} X(\Omega)\times Y(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned}$$

a pour image une partie dénombrable de $\mathbb{R}^d$ contenant $(X+Y)(\Omega)$.
De plus, pour tout $z\in\mathbb{R}^d$, $(X+Y)^{-1}(z) = \bigcup\limits_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ x+y=z}} ([X=x]\cap[Y=y]) \in \mathcal{T}$ en tant qu'union dénombrable d'événements.

Remarque

L'union étant disjointe, la loi de $X+Y$ est donnée par

$$\forall z\in(X+Y)(\Omega),\qquad \mathcal{L}_{X+Y}(z) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ x+y=z}} \mathbb{P}\left([X=x]\cap[Y=y]\right)$$

III Variables aléatoires discrètes indépendantes

Dans la suite, on considère que les variables aléatoires sont définies sur $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ et à valeurs dans $(E,\mathcal{U})$.

Définition

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires.
On dit que $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes lorsque, pour tous $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{U}$, les événements $[X_1\in A_1],\dots,[X_n\in A_n]$ sont mutuellement indépendants.

Suites : On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes lorsque pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires de $(X_i)_{i\in I}$ sont indépendantes.

Remarque

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires. Alors $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes si, et seulement si, les tribus images réciproques $X_1^{-1}\langle\mathcal{U}\rangle,\dots,X_n^{-1}\langle\mathcal{U}\rangle$ sont indépendantes.

Propositions

Soient $n,d\in\mathbb{N}^*$. On suppose que $(E,\mathcal{U})=(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires discrètes. Alors :

- → $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$, les événements $[X_1=x_1]$, …, $[X_n=x_n]$ sont mutuellement indépendants.
- → *Lemme des coalitions :* Soient $p,q\in\mathbb{N}$ tels que $p+q=n$. Soient $f:(\mathbb{R}^d)^p\longrightarrow\mathbb{R}^d$ et $g:(\mathbb{R}^d)^q\longrightarrow\mathbb{R}^d$ deux fonctions.
  Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes alors, $f(X_1,\dots,X_p)$ est une variable aléatoire indépendante de $g(X_{p+1},\dots,X_n)$.

Exemples : $X_1+\dots+X_p$ et $X_{p+1}+\dots+X_n$ sont indépendantes.
Pour tout $i\in\mathbb{N}$ tel que $1\le i<i+3\le n$, X_iX_{i+1} et $X_{i+2}X_{i+3}$ sont indépendantes.

Preuve des propositions :

→ ($\Leftarrow$) Soient $A_1, \ldots, A_n \subset E$. En utilisant le théorème d'associativité pour les familles sommables,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([X_1 \in A_1] \cap \cdots \cap [X_n \in A_n]\right) &= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in A_1\times\cdots\times A_n} \mathbb{P}\left([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]\right) \\ &= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in A_1\times\cdots\times A_n} \mathbb{P}\left(X_1 = x_1\right) \ldots \mathbb{P}\left(X_n = x_n\right) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n)\end{aligned}$$

→ Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$. Par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}([f(X_1, \ldots, X_p) = x] \cap g(X_{p+1}, \ldots, X_n) = y) \\ &= \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\in E^n \\ f(x_1,\ldots,x_p)=x \\ g(x_{p+1},\ldots,x_n)=y}} \mathbb{P}\left([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]\right) \\ &= \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\in E^n \\ f(x_1,\ldots,x_p)=x \\ g(x_{p+1},\ldots,x_n)=y}} \mathbb{P}\left([X_1 = x_1]\right) \ldots \mathbb{P}\left([X_n = x_n]\right) \\ &= \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_p)\in E^p \\ f(x_1,\ldots,x_p)=x}} \mathbb{P}\left([X_1 = x_1]\right) \ldots \mathbb{P}\left([X_p = x_p]\right) \mathbb{P}\left(g\left(X_{p+1}, \ldots, X_n\right) = y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(f(X_1, \ldots, X_p) = x\right) \mathbb{P}\left(g\left(X_{p+1}, \ldots, X_n\right) = y\right)\end{aligned}$$

? Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : (\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire discrète. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X soit indépendante d'elle-même.

? Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X, Y deux variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$, indépendantes, et telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \dfrac{1}{2^i}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(\min(X, Y) \leq N)$.

IV ♥ Lois usuelles

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont discrètes.

Schéma de Bernoulli[1] **:** Soit $p \in]0, 1[$. Un schéma de Bernoulli est une suite finie d'expériences identiques, deux à deux indépendantes et ayant, chacune, exactement deux issues possibles : un succès ou un échec. La probabilité qu'une expérience soit un succès vaut p.
Cette suite d'expériences est modélisée par les termes d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{0, 1\}$, et suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ *i.e.* pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$.

1. Rappelons que Jacques Bernoulli n'est pas une nouille.

Loi binomiale : Soient $n \in \mathbb{N}$, et $p \in]0,1[$. Considérons un schéma de Bernoulli d'ordre n (*i.e.* où n expériences sont menées) où la probabilité de succès vaut p. Le nombre de succès est aléatoire et est compris entre 0 et n, et la probabilité que k succès aient lieu vaut la probabilité que l'une des situations où $k \in [\![0;n]\!]$ succès sont disséminés parmi les n expériences ait lieu : l'une de ces situations a une probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ d'avoir lieu (par indépendance), et il y a $\binom{n}{k}$ combinaisons de k succès parmi n expériences à deux issues.
La variable aléatoire $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$ qui compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli d'ordre n et de probabilité de succès p est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$ et suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad \mathbb{P}(S = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Loi de Rademacher : Il est possible de modéliser un schéma de Bernoulli d'ordre $n \in \mathbb{N}$ et de probabilité de succès $p \in]0,1[$ par les termes d'une suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$ indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Rademacher *i.e.* pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y_k = 1) = p$.
Dans un tel contexte, il est loisible de se ramener à la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables de Bernoulli correspondante en remarquant que, presque sûrement,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad Y_k = 2X_k - 1$$

Loi géométrique : Considérons un schéma de Bernoulli infini *i.e.* où l'on réalise une infinité dénombrable d'expériences identiques et indépendantes, et où la probabilité de succès vaut $p \in]0,1[$.
Le temps d'attente du premier succès est une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour que le premier succès ait lieu à la n-ième expérience, il faut et il suffit que les expériences antérieures se soldent toutes par des échecs et que la n-ième soit un succès, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(T = n) = (1-p)^{n-1} p$$

Théorème

Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Alors

→ Presque sûrement, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_k = 1$.

→ $Y = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k = 1\}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Preuve :

→ La suite d'événements $\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, donc par continuité décroissante et unicité de la limite :

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0]\right)}_{=(1-p)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\neg[\exists k \in \mathbb{N}^*, \quad X_k = 1]\right) = 0$$

→ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $[Y = n] = [X_0 = 0] \cap \cdots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 1] \in \mathcal{T}$, donc Y est mesurable, c'est donc une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.
Par indépendance,

$$\mathbb{P}(Y = n) = (1-p)^{n-1} p$$

Remarque

Souvent, le premier succès arrive assez tôt. En effet, il existe $\mu > 0$ tel que $1 - p = e^{-\mu}$, donc $(1-p)^{n-1}p = e^{-(n-1)\mu}(1 - e^{-\mu})$, ce qui exhibe une décroissance exponentielle de la probabilité du premier succès avec le rang de ce succès.

Propriété

Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Alors

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathbb{P}(X > n+k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k)$$

On dit qu'une loi géométrique est une loi sans mémoire.

Preuve : Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > n+k \mid X > n) &= \frac{\mathbb{P}(X > n+k)}{\mathbb{P}(X > n)} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{m=n+k+1}^{+\infty} (1-p)^{m-1}\cancel{p}}{\displaystyle\sum_{m=n+1}^{+\infty} (1-p)^{m-1}\cancel{p}} \\
&= \frac{(1-p)^{n+k} \times \cancel{\dfrac{1}{1-(1-p)}}}{(1-p)^{n} \times \cancel{\dfrac{1}{1-(1-p)}}} \\
&= (1-p)^k = \mathbb{P}(X > k)
\end{aligned}$$

formule utile pour une loi géométrique

Loi de Poisson : Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

Théorème

Soit $\lambda > 0$. Soit $(p_n) \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p_n)$.
Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ *i.e.*

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X_n = m) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$$

Preuve : Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $n > m$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = m) &= \binom{n}{m} p_n^m (1-p_n)^{n-m} \\
&= \frac{n \times \cdots \times (n-m+1)}{m!} (1-p_n)^{-m} p_n^m (1-p_n)^n
\end{aligned}$$

Or $(1-p_n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}$ car $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$. De plus,

$$n \times \cdots \times (n-m+1)(1-p_n)^{-m}p_n^m = \underbrace{(np_n)^m}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda^m} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{m-1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1} \underbrace{(1-p_n)^{-m}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3

Soient $\lambda > 0$ et $p \in]0,1[$. On modélise le nombre d'œufs pondus par un poisson par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On modélise l'éclosion d'un œuf indépendamment des autres par une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Déterminer la loi du nombre d'œufs éclos.

Exercice 4

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{T})$, indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Rademacher de paramètre p.
On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_m = \bigcap_{n=0}^{+\infty} [|S_n| \leq m]$.

1. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_m) = 0$.
2. On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que $\mathbb{P}([S_n = 0]$ infiniment souvent$) = 0$.

V Compléments

Fonction de répartition : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On introduit la fonction de répartition de X, notée F_X, définie par

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

Cette fonction ne caractérise que la loi de X.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors :

- → F_X est croissante.
- → $F_X(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $F_X(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
- → F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- → Soit $a \in \mathbb{R}$. F_X n'est pas continue en a si, et seulement si, $\mathbb{P}(X = a) > 0$.

Preuves :

- → La croissance de F_X découle de la croissance de $\mathbb{P}$.
- → Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante divergeant vers $-\infty$. $([X \leq x_n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décrois-

sante d'événements donc par continuité décroissante,

$$F_X(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}[X \leq x_n]\right) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

Par un raisonnement analogue, on prouve de même que $F_X(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

→ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante convergeant vers $a \in \mathbb{R}$. $([X \leq x_n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements donc par continuité décroissante, $F_X(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(a)$. Donc F_X est continue à droite en a.

→ ($\Rightarrow$) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante convergeant vers a et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante convergeant vers a sans valoir a. Par continuité croissante et décroissante, on montre que $F_X(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(a)$ et $F_X(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(a^-)$.
Donc $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-) > 0$ car F_X est discontinue en a.
($\Leftarrow$) Si F_X est continue en a, alors $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-) = 0$.

Variables à densité : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que X est une variable aléatoire à densité s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable et telle que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$$

Une telle fonction détermine entièrement la loi de X.
Exemples :

→ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$. f est la densité d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

→ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2}$. f est la densité d'une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

→ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)\pi}$. f est la densité d'une loi de Cauchy.

Il est alors possible de définir, sous réserve d'existence, l'espérance et le moment d'ordre 2 de telles variables par $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$, et $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$

Propriété

Si X est une variable aléatoire à densité, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

Preuve : Soit $a \in \mathbb{R}$. $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-) = 0$ car la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité est continue. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [a-\varepsilon, a]$,

$$|F_X(a) - F_X(x)| \leq \|f\|_{\infty,[a-\varepsilon,a]} |x - a|$$

ce qui démontre à la continuité à gauche, donc la continuité.

VI Correction des exercices

Une correction de l'exercice 1

Supposons que X soit indépendante d'elle-même. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$. Alors par indépendance des événements $[X = x]$ et $[X = x]$, $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}([X = x] \cap [X = x]) = \mathbb{P}(X = x)^2$, donc $\mathbb{P}(X = x) = 1$. Donc X est presque sûrement constante.
Réciproquement, toute variable aléatoire constante est indépendante d'elle-même.
En conclusion, une variable aléatoire est indépendante d'elle-même si, et seulement si, elle est presque sûrement constante.

Une correction de l'exercice 2

1. $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} [X = i] \cap [Y = i]\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendance}}}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}.$
2. $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} [Y = i] \cap [X > i]\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendance}}}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+j}} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}.$
3. $\mathbb{P}(\min(X, Y) \leq N) = 1 - \mathbb{P}(\underbrace{\min(X, Y) > N}_{=[X>N]\cap[Y>N]}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendance}}}{=} 1 - \mathbb{P}(X > N)\mathbb{P}(Y > N) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calcul aisé}}}{=} 1 - \frac{1}{4^N}$

Une correction de l'exercice 3

Notons X la variable aléatoire désignant le nombre d'œufs pondus, et Y le nombre d'œufs ayant éclos.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ et pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ car lorsque $[X = n]$ est réalisé, chaque éclosion est considérée, indépendamment des autres comme un succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de probabilité de succès p.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = k] \cap [X = n]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid X = n)\mathbb{P}(X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ m \leftarrow n-k}}{=} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\cancel{(m + k)!}}{k!m!} p^k (1 - p)^m \frac{\lambda^{m+k}}{\cancel{(m + k)!}} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(1 - p)^m \lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} \\
&= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Donc Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$.

Une correction de l'exercice 4

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $B_k = \bigcap_{i=0}^{2m+1} [X_{km+i} = 1]$. Par indépendance, $\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{2^{2m+2}}$ et par construction, si B_k est réalisé, alors $|S_{mk+2m+1} - S_{mk-1}| \geq 2m + 2$ est réalisé, donc $[S_{mk+2m+1} \notin [\![-m; m]\!]] \cup [S_{mk-1} \notin [\![-m; m]\!]]$ est réalisé, et ceci est valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ posons $k_\ell = 4\ell m$. Par le lemme des coalitions, pour tous $\ell, \ell' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\ell \neq \ell'$, les événements B_ℓ et $B_{\ell'}$ sont indépendants. De plus $\sum_{\ell \geq 1} \mathbb{P}(B_{k_\ell})$ est divergente (son terme général est non nul et indépendant de ℓ).

   Le premier théorème de Borel-Cantelli assure alors que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{\ell'=l+1}^{+\infty} B_{k'_\ell}\right)\right) = 1$

   Autrement dit, presque sûrement, B_{k_ℓ} est réalisé infiniment souvent, donc l'événement A_m est négligeable : il existe une partie infinie J de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in J$, $S_n \notin [\![-m; m]\!]$.

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, posons $u_m = \mathbb{P}(S_{2m} = 0)$.
   Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que le retour à l'origine se fait si, et seulement si, autant de déplacements à gauche qu'à droite ont lieu et, sur $2m$ déplacements il y a $\binom{2m}{m}$ telles combinaisons et par indépendance des déplacements, $u_m = \binom{2m}{m} p^m(1-p)^m$. Alors

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = p(1-p)\frac{(2m+2)(2m+1)}{(m+1)^2} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 4p(1-p) < 1$$

   En effet, $y = x(1-x)$ est une parabole tournée vers le bas atteignant son maximum entre les deux racines de $X(X-1)$, donc en $x = \frac{1}{2}$, et celui-ci vaut $\frac{1}{4}$. $p \neq \frac{1}{2}$ donc l'inégalité est stricte. D'après la règle de d'Alembert, $\sum_{m \geq 1} u_m$ converge.

   Le deuxième théorème de Borel-Cantelli assure alors que $\mathbb{P}([S_{2m} = 0]$ infiniment souvent$) = 0$.

* * *

Compilé par Mehdi Chouta pour CPGE Paradise le 21 mars 2021.