CHAPITRE 30.4

Couples de variables aléatoires

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

I Loi conjointe, loi marginale

Définition

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes. La loi conjointe de (X, Y) est définie par

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2, \qquad \mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(x,y)\}) = \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y])$$

Les lois $\mathcal{L}_X$ et $\mathcal{L}_Y$ sont appelées lois marginales de $\mathcal{L}_{(X,Y)}$.

Remarques

Les lois marginales se calculent à partir de la loi conjointe :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{y \in Y(\Omega)} [X=x] \cap [Y=y]\right) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(x,y)\})$$

Exercice

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telles que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$

$$\mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(i,j)\}) = \frac{1}{2^{i+j+2}}$$

1. Vérifier que $\mathcal{L}_{(X,Y)}$ est bien une loi de probabilité.
2. Calculer les lois marginales $\mathcal{L}_X$ et $\mathcal{L}_Y$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

II Produit de convolution

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On définit le produit de convolution de $\mathcal{L}_X$ et $\mathcal{L}_Y$, et note $\mathcal{L}_X \star \mathcal{L}_Y$, par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{L}_X \star \mathcal{L}_Y)(\{n\}) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} \mathcal{L}_X(\{i\}) \mathcal{L}_Y(\{j\})$$

Si, de plus, X et Y sont indépendantes, alors $\mathcal{L}_{X+Y} = \mathcal{L}_X \star \mathcal{L}_Y$.En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendance}}}{=} \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) = (\mathcal{L}_X \star \mathcal{L}_Y)(\{n\})$$

Exemples : On suppose que $d = 1$.

→ **Produit de convolution de lois binomiales :** Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Soient $X_1, \dots, X_{n+m}$ des variables aléatoires indépendantes et indentiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Posons $X = X_1 + \cdots + X_n$ et $Y = X_{n+1} + \cdots + X_{n+m}$. Alors $\mathcal{L}_{X+Y}$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Produit de convolution de lois de Poisson : Soient $\lambda, \mu > 0$. Posons $\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}(\lambda)$ $\mathcal{L}_2 = \mathcal{P}(\mu)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_1 \star \mathcal{L}_2)(\{n\}) &= \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j=n}} \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^j}{j!}e^{-\mu} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j=n}} \frac{1}{n!}\binom{n}{i}\lambda^i\mu^{n-i} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{i}\lambda^i\mu^{n-i} = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)}\end{aligned}$$

On reconnaît une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Une correction de l'exercice

1. Le nombre de manières d'écrire un entier naturel n non nul sous la forme d'une somme de deux entiers naturels vaut le nombre de manières de placer un baton parmi n objets alignés de sorte à les scinder en deux groupes d'objets en autorisant toutefois qu'au moins l'un des groupes n'en contienne aucun. De tels emplacements pour le baton, il y en a $n+1$. Ainsi, dans la somme calculée ci-dessous, il y a $n+1$ termes égaux à $\frac{1}{2^{i+j+2}}$ lorsque $i+j=n$.
   Ce raisonnement est aisément généralisable si l'on veut écrire un entier naturel non nul sous la forme d'une somme à plus de deux termes d'entier naturel.
   $$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(i,j)\}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$
   Donc $\mathcal{L}_{(X,Y)}$ est bien une loi de probabilité.
   Il est loisible de retenir les sommes des séries dérivées d'une série géométrique convergente. Soit $q\in\mathbb{C}$ tel que $|q|<1$. Alors
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$
2. Soit $i\in\mathbb{N}$.
   $$\mathcal{L}_X(\{i\}) = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathcal{L}_{(X,Y)}(\{(i,j)\}) = \frac{1}{2^{i+2}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{i+1}} = \mathcal{L}_Y(\{i\})$$
3. Oui, car pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $\mathcal{L}_X(\{i\})\mathcal{L}_Y(\{j\}) = \frac{1}{2^{i+j+2}} = \mathcal{L}_{(X,Y)}(\{i,j\})$

* * *

Compilé par Mehdi Chouta pour CPGE Paradise le 21 mars 2021.