CHAPITRE 34

Espaces préhilbertiens réels

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.

I Géométrie d'un espace préhilbertien

Définition

Un produit scalaire sur E est une application $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire qui vérifie les propriétés suivantes :

→ Elle est symétrique, *i.e.* pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle x,\, y\rangle = \langle y,\, x\rangle$.

→ Elle est positive, *i.e.* pour tout $x \in E$, $\langle x,\, x\rangle \geq 0$.

→ Elle est définie positive, *i.e.* pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle x,\, x\rangle \neq 0$.

Exemples

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n), y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x,\, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

→ Pour tout entier $n \geq 2$, le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A,\, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$$

De plus, si $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{C})$, et A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\langle OA,\, OB\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top \underbrace{O^\top O}_{=I_n} B) = \langle A,\, B\rangle$

→ Pour tout intervalle réel I, le produit scalaire canonique sur l'espace $L^2_c(I,\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur I et de carré intégrable est défini par :

$$\forall f, g \in L^2_c(I), \quad \langle f,\, g\rangle = \int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

→ Le produit scalaire canonique sur l'espace $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable est défini par :

$$\forall (u_n), (u_n) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}), \quad \langle u,\, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

L'existence des deux derniers produits scalaires est assurée par l'inégalité valable pour tous réels x et y : $|xy| \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

Dans tout le reste du chapitre, on munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$, si bien que $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème

Pour tout $(x,y) \in E$,

$$|\langle x,\, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,\, x\rangle}\sqrt{\langle y,\, y\rangle}$$

et l'inégalité est une égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Preuve : Supposons que $y \neq 0$. Introduisons la fonction réelle

$$\varphi : t \longmapsto \langle x+ty,\, x+ty\rangle = \langle x,\, x\rangle + 2\langle x,\, y\rangle t + \langle y,\, y\rangle t^2$$

Cette fonction polynomiale est positive, donc son discriminant, qui vaut $4\langle x,\, y\rangle^2 - 4\langle x,\, x\rangle\langle y,\, y\rangle$, est négatif ou nul, d'où l'inégalité.
Le cas d'égalité est réalisé si, et seulement si, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t_0) = 0$ donc si, et seulement si, $x + t_0 y = 0$.

Remarque

Supposons que $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ ne soit pas défini positif. Soit $y \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle y,\, y\rangle = 0$. Alors, pour tout $x \in E$, $\langle x,\, y\rangle = 0$.
En effet, φ serait affine et positive, donc constante.

Exemple : Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé dénombrable, l'application $f : (X,Y) \mapsto \mathbb{E}(XY)$ est une forme bilinéaire, symétrique, et positive sur l'espace $L_0^2(\Omega,\mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles sur Ω d'espérances nulles et qui admettent un moment d'ordre 2, mais elle n'est pas définie positive car si $X \in L^2(\Omega,\mathbb{R})$, on a l'équivalence $\mathbb{E}(X^2) = 0 \iff \mathbb{P}(X=0) = 1$ mais X n'est pas nécessairement nulle.

Analogie avec le théorème de Pythagore : La variance peut être interprétée comme le carré de la « norme » associée au « produit scalaire » f. En effet, pour tout entier $n \geq 2$, si $X_1, \ldots, X_n \in L^2(\Omega,\mathbb{R})$ sont indépendantes, alors, pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \mathbb{E}(X_i X_j) = 0$, et on a bien

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$$

Inégalité de Minkowski

Théorème

Pour tout $x \in E$, on note $\|x\|$ le réel $\sqrt{\langle x,\, x\rangle}$. Alors, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et l'inégalité est une égalité si, et seulement si, il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Preuve : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,\, y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$ où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si, et seulement si, $\langle x,\, y\rangle = \|x\|\,\|y\|$, donc, si et seulement si le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifié (car $\langle x,\, y\rangle \leq |\langle x,\, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$). Quitte à échanger x et y, supposons $x \neq 0$. Alors, l'inégalité de Minkowski est une égalité si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda\cancel{\langle x,\, x\rangle} = |\lambda|\,\cancel{\|x\|^2}$, ce qu'il fallait démontrer.

Si n est un entier supérieur ou égal à 2, l'inégalité se généralise avec $x_1, \ldots, x_n \in E$, et, s'il ne sont pas tous nuls, le cas d'égalité se traduit géométriquement par l'appartenance des x_i à une demi-droite d'origine O, dont le sens est déterminé par l'un des points non confondu avec l'origine (*cf.* chapitre 1).

Dans tout le reste du chapitre, E est également muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée à $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$.

Exercice 1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé non trivial. Soient C une partie convexe de E, et $x \in E$. x est un point extrémal de C si, et seulement si, il existe une droite $\Delta \in E$ telle que $\Delta \cap C = \{x\}$, donc si et seulement si, on a la propriété

$$\forall y, z \in C,\ (\exists t \in [0,1],\ x = ty + (1-t)z \Longrightarrow x = y \text{ ou } x = z)$$

Déterminer les points extrémaux de $\overline{B}(0,1)$.

Égalité de la médiane : Pour tout $(x,y) \in E^2$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Application

Soit $(a,b) \in E^2$ tel que $a \neq b$. Soit $r > 0$. Montrons que $\operatorname{diam}(\overbrace{\overline{B}(a,r)) \cap \overline{B}(b,r)}^{\text{notée } \Gamma}) < 2r$.
Si, $\|a-b\| > 2r$, Γ est vide, et il n'y a rien à démontrer.
Si $\|a-b\| \leq 2r$, Γ n'est pas vide et $\dfrac{a+b}{2} \in \Gamma$. Soit $x \in \Gamma$.

$$\begin{aligned}
\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 &= \left\|\frac{1}{2}\underbrace{(x-a)}_{\text{noté } u} + \frac{1}{2}\underbrace{(x-b)}_{\text{noté } v}\right\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\|u+v\|^2 \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{égalité de la médiane}}}{=} \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\overbrace{\|u\|^2}^{<r^2} + \overbrace{\|v^2\|}^{<r^2}}_{<2r^2} - \frac{1}{2}\|u-v\|^2\Big) < r^2
\end{aligned}$$

Or, pour tout $(x,y) \in \Gamma^2$, $\|x-y\| \leq \left\|x - \dfrac{a+b}{2}\right\| + \left\|y - \dfrac{a+b}{2}\right\| < 2r$, ce qu'on voulait.

Exercice 2

Soit $(E, \mathcal{N})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On suppose que pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\mathcal{N}(x+y)^2 + \mathcal{N}(x-y)^2 = 2\left(\mathcal{N}(x)^2 - \mathcal{N}(y)^2\right)$$

Montrer qu'il existe un produit scalaire sur E tel que $\mathcal{N}$ soit la norme euclidienne qui lui est associée.

II Orthogonalité

1. Généralités

Définition

Soit I un ensemble non vide. Une famille $(x_i) \in E^I$ est dite orthogonale lorsque pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $\langle x_i,\, x_j\rangle = 0$.
Elle est dite orthonormée si, de plus, pour tout $i \in I$, $\|x_i\| = 1$.

Propriétés

Soit I un ensemble non vide, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de E.

→ Pour tout partie finie J de I, et pour toute $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^J$, $\left\|\sum_{i\in J} \lambda_i x_i\right\|^2 = \sum_{i\in J} |\lambda_i| \, \|x_i\|^2$

→ Si, pour tout $i \in I$, $x_i \neq 0$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

Exercice 3

On admet que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie non dénombrable. Montrer que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée notée $\|\cdot\|$, n'admet pas de base orthonormée.

2. Dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie n, *i.e.* $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

Théorème

L'application

$$\begin{aligned} j : E &\longrightarrow E^* \\ u &\longmapsto \langle u,\, \cdot \rangle \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Preuve : La bilinéarité du produit scalaire entraîne la linéarité de j.
Si $u \in \operatorname{Ker}(j)$, alors, pour tout $v \in E$ $\langle u,\, v\rangle = 0$, donc $\langle u,\, u\rangle = 0$, donc $u = 0$ *i.e.* j est injective. L'égalité des dimensions de E et E^* permet de conclure.

Corollaire

Supposons que $n \geq 2$. Soit H un hyperplan de E. Alors, il existe $u \in E \setminus \{0\}$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait l'équivalence

$$x \in H \iff \langle u,\, x\rangle = 0$$

L'ensemble de tels u est inclus dans une droite d'origine O, et $\mathbb{R}u$ est la normale à H.

Preuve : H est le noyau d'une forme linéaire sur E non nulle, donc d'après le théorème, il existe un unique $u \in E \setminus \{0\}$, dépendant du choix de cette forme linéaire, tel que $H = \operatorname{Ker}(\langle u,\, \cdot\rangle)$, ce qui démontre l'équivalence.
Soit φ une forme linéaire sur E non nulle de noyau H, et notons v_φ l'unique vecteur tel que $\langle v_\varphi,\, \cdot\rangle = \varphi$. Alors v_φ convient également, et $\operatorname{Ker}(\langle v_\varphi,\, \cdot\rangle) = \operatorname{Ker}(\langle u,\, \cdot\rangle) = H$ donc $\langle u,\, \cdot\rangle$ et $\langle v_\varphi,\, \cdot\rangle$ sont proportionnelles, *i.e.* il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\langle v_\varphi,\, \cdot\rangle = \lambda \langle u,\, \cdot\rangle = \langle \lambda u,\, \cdot\rangle$. j étant injective, $v_\varphi = \lambda u$.

Théorème

→ E possède des bases orthonormées.

→ Supposons que $n \geq 2$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p < n$. Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille orthonormée de E, alors il existe une famille $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ telle que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de E.

Preuve :

→ Si $n = 1$, un vecteur $x \in E$ de norme 1 forme à lui tout seul une base de E. Supposons que $n \geq 2$, et pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$ introduisons par récurrence descendante un hyperplan E_k de E_{k+1}.

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ introduisons l'assertion

$$\mathcal{P}_k : \text{« } E_k \text{ possède une base orthonormée »}$$

$\mathcal{P}_1$ est vraie. Supposons qu'il existe $k \in [\![1;n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie. Alors, E_k, possède une base orthonormée $(e_1, \dots, e_k)$. Soit $u \in E_{k+1} \setminus \{0\}$ tel que $\mathbb{R}u$ soit la normale à E_k dans E_{k+1}, et posons $e_{k+1} = \dfrac{1}{\|u\|}u$ de sorte que $\|e_{k+1}\| = 1$. Alors la famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est libre car e_{k+1} est orthogonal aux vecteurs de $(e_1, \dots, e_k)$. De plus, elle comporte $k+1$ vecteurs, et $\dim(E_{k+1}) = k+1$. Donc $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est une base orthonormée de E_{k+1}. Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie. Par récurrence finie, E possède une base orthonormée. Chaque vecteur de la base construite peut être changé en son opposé, donc E admet des bases orthonormée.

→ En complétant la famille libre (car orthonormée) $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_p, u_{p+1}, \dots, u_p)$ de E, puis en posant $E_p = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, et, pour tout $k \in [\![p+1;n]\!]$, $E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p, u_{p+1}, \dots, u_k)$, la récurrence ci-dessus permet de compléter $(e_1, \dots, e_p)$ en une base orthonormée de E.

Procédé de Gram-Schmidt

Théorème

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle qu'on ait la propriété :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$$

De plus, si $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ est une base orthonormée vérifiant la même propriété, alors, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\varepsilon'_i = \alpha_i \varepsilon_i$.

Preuve : Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, introduisons l'assertion

$$\mathcal{A}_k : \text{« Il existe une famille orthonormée } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \text{ de } E \text{ telle que pour tout } i \in [\![1;k]\!],\ \underbrace{\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)}_{\text{noté } E_i} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i) \text{ »}$$

→ En posant $\varepsilon_1 = \pm\dfrac{1}{\|e_1\|}e_1$, on montre que $\mathcal{A}_1$ est vraie. Ces deux choix sont égalements les seuls possibles pour que $\mathcal{A}_1$ soit vraie.

→ Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$ tel que $\mathcal{A}_k$ soit vraie. E_k est un hyperplan de E_{k+1} donc il existe $u \in E_{k+1} \setminus \{0\}$ tel que $\mathbb{R}u$ soit l'unique normale à E_k dans E_{k+1} passant par l'origine. Ainsi, pour que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1})$ soit une base orthonormée de E_{k+1}, il faut et il suffit que $\varepsilon_{k+1} = \pm\dfrac{1}{\|u\|}u$.

Le caractère suffisant de cette condition suffit pour mener à terme cette récurrence.
Alors, $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1}) = E_{k+1} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$. L'hypothèse de récurrence assure par ailleurs que pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$. Donc $\mathcal{A}_{k+1}$ est vraie.

→ Finalement, le principe de récurrence assure que $\mathcal{A}_n$ est vraie.

Nous avons exhibé, lors de la construction de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, que chaque ε_i peut être échangé avec son opposé, et seulement son opposé, si bien que l'ensemble des bases orthonormées vérifiant la propriété démontrée par récurrence est $\{(\alpha_1\varepsilon_1, \dots, \alpha_n\varepsilon_n) \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{-1, 1\}^n\}$

Expression matricielle : La matrice de $(e_1, \dots, e_n)$ relativement la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est triangulaire supérieure. En effet, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, e_i est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$ en vertu de l'égalité $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$.

Formules

Soient x et $y \in E$, et introduisons leurs décompositions dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

Alors,

$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i\rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Remarque

La décomposition de x étant unique dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, l'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (\langle x,\, e_i\rangle)_{1 \leq i \leq n} \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Exercice 4

Soit $(E, \langle \cdot\,,\, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, et notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$. Soit m un entier supérieur ou égal à n. Soit $(e_1, \ldots, e_m) \in E^m$ tel que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i\rangle^2$$

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m) = E$.
2. Donner un exemple d'espace euclidien et des exemples de vecteurs vérifiant les hypothèses de l'exercice lorsque $m = 3$, $n = 2$, et $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\|$.
3. Supposons que $n = m$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

3. Orthogonal d'une partie

On rappelle que $(E, \langle \cdot\,,\, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel, et que $\|\cdot\|$ est la norme associée à $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$.

Définition

Soit A une partie de E. On appelle *orthogonal de A* l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A,\ \langle x,\, y\rangle = 0\}$$

Propositions

Soient A et B des parties de E.

→ $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

→ $A^\perp = \bigcap_{x \in A} \mathrm{Ker}(\langle x,\, \cdot \rangle)$ est un sous-espace vectoriel de E.

→ Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Conséquence : Pour toute partie A de E, on a $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$, donc $A^\perp = \left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp$.

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F admet un supplémentaire orthogonal dans E s'il existe un sous espace vectoriel G de $F^\perp$ tel que $E = F \oplus G$.

Conséquence : Dans ce cas, $G = F^\perp$.

Preuve de l'unicité sous réserve d'existence : Si, $x \in F^\perp$, il existe $y \in F$, et $z \in G$ tels que $x = y + z$, donc $y = x - z \in F^\perp$ donc $y = 0$, donc $x = z \in G$. Ainsi, $F^\perp \subset G$.

Observation

Soit F une partie de E. Alors $F^\perp$ est fermé dans E.

Preuve : Pour tout $y \in F$, l'application linéaire $x \mapsto \langle x,\, y\rangle$ est continue en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, son noyau est donc fermé en tant qu'image réciproque de $\{0\}$, fermé dans $\mathbb{R}$.
Or $F^\perp$ est l'intersection de tels fermés, d'où l'observation.

4. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie

Dans cette partie, on suppose que $(E, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ est un espace euclidien de dimension n.

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F \oplus F^\perp = E$.

Preuve : Notons p la dimension de F. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F que l'on complète en une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Alors, pour tout $x \in E$, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} x_i e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} x_i e_i}_{\in F^\perp}$$

Donc $F + F^\perp = E$. De plus, $F \cap F^\perp = \{0\}$, donc $E = F \oplus F^\perp$.

Propositions

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.

→ $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$.

→ $\left(F^\perp\right)^\perp = F$. En effet, $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$, et $\dim\left(\left(F^\perp\right)^\perp\right) = \dim(F)$.

→ $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. En effet, par bilinéarité du produit scalaire, $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$, et l'inclusion réciproque est vraie car $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$.

→ $(F \cap G)^\perp = \left(\left(F^\perp\right)^\perp \cap \left(G^\perp\right)^\perp\right)^\perp = \left(\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp\right)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

L'orthogonal d'une somme est l'intersection des orthogonaux, et l'orthogonal d'une intersection est la somme des orthogonaux.

5. Projecteurs orthogonaux

On rappelle que $(E, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel, et que $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée à $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$.

Définition

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. On dit que p est un projecteur orthogonal lorsque $p = p \circ p$ et $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$.

Propriétés

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que p soit un projecteur orthogonal.

- $\to$ $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^\perp$ et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p)^\perp$.
- $\to$ $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont fermés.
- $\to$ Si $p \neq 0$, $|||p||| = 1$.

Preuve

- $\to$ $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$ et $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p)^\perp$ donc $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p)^\perp$.
- $\to$ La première propriété entraîne immédiatement la deuxième.
- $\to$ Soit $x = \underbrace{y}_{\in \mathrm{Ker}(p)} + \underbrace{z}_{\in \mathrm{Im}(p)} \in E$. Alors $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|p(x)\|^2$.

  Donc, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|p(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 1$, ce qui assure que $|||p||| \leq 1$. De plus, ce majorant est atteint pour tout $x \in \mathrm{Im}(p) \setminus \{0\}$, ce qui assure que $|||p||| = 1$.

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède un supplémentaire orthogonal si, et seulement si, il existe un projecteur orthogonal d'image F.

Preuve : $(\Leftarrow)$ S'il existe un projecteur orthogonal p de E tel que $F = \mathrm{Im}(p)$, alors un supplémentaire orthogonal de F est $\mathrm{Ker}(p)$.
$(\Rightarrow)$ Le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$ est bien un projecteur orthogonal d'image F.

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de E tel qu'il soit image d'un projecteur orthogonal p. Alors, pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{d}(x, F) = \|x - p(x)\|$$

et $p(x)$ est l'unique vecteur de F tel que cette égalité est vérifiée.

Preuve : Soit $y \in F = \mathrm{Im}(p)$. $x - y = \underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p(x) - y}_{\in F}$, donc

$$\|x - y\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - y\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2$$

et ce minorant est réalisé si, et seulement si, $y = p(x)$ (car sinon, la norme ne serait pas séparante).

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $d \geq 1$. Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base orthonormée de F. Alors l'application

$$\begin{aligned} \pi : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^{d} \langle e_i,\, x\rangle\, e_i \end{aligned}$$

est un projecteur orthogonal de E sur F et $E = F \oplus F^{\perp}$.

De plus, pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{d} \langle e_i,\, x\rangle^2$.

Preuve : π est linéaire et $\mathrm{Im}(\pi) = F$. En effet, pour tout $x \in F$, $x = \sum_{i=1}^{d} \langle x,\, e_i\rangle\, e_i = \pi(x)$.

Montrons que $\mathrm{Ker}(\pi) \perp F$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\pi)$. Alors, $0 = \pi(x) = \sum_{i=1}^{d} \langle x,\, e_i\rangle\, e_i$. Or $(e_1, \ldots, e_d)$ est libre, donc pour tout $i \in [\![1; d]\!]$, $\langle e_i,\, x\rangle = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(\pi) \subset F^{\perp}$. Donc $\mathrm{Ker}(\pi) = F^{\perp}$, et $E = F \oplus F^{\perp}$.

De plus, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \|x - \pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2 = \mathrm{d}(x, F)^2 + \sum_{i=1}^{d} \langle x,\, e_i\rangle^2$.

On prouve au passage l'inégalité de Bessel : pour toute famille orthonormée $(e_1, \ldots, e_d)$ de E, et pour tout $x \in E$,

$$\sum_{i=1}^{d} \langle x,\, e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Caractérisation des projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Montrons que p est orthogonal si, et seulement si, p est continu et $|\!|\!| p |\!|\!| \leq 1$.
Nous avons déjà démontré que si p est un projecteur orthogonal de E, alors $|\!|\!| p |\!|\!| = 1 \leq 1$, ce qui entraîne sa continuité.
Supposons que p soit continu et que $|\!|\!| p |\!|\!| \leq 1$.
Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|p(x + ty)\|^2 \leq \|x + ty\|^2 \qquad \text{donc} \qquad \cancel{\|x\|^2} \leq \cancel{\|x\|^2} + 2t\,\langle x,\, y\rangle + \|y\|^2\, t^2$$

Donc pour tout $t > 0$, $2\,\langle x,\, y\rangle + t\,\|y\|^2 \geq 0$, puis par passage à la limite, $t \to 0^+$, $\langle x,\, y\rangle \geq 0$.
De même, pour tout $t < 0$, $2\,\langle x,\, y\rangle + t\,\|y\|^2 \leq 0$, puis par passage à la limite, $t \to 0^-$, $\langle x,\, y\rangle \leq 0$.
Donc $\langle x,\, y\rangle = 0$, donc $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p)^{\perp}$. Ainsi, p admet un supplémentaire orthogonal dans E, ce qui assure que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p)^{\perp}$. Donc p est orthogonal.

Exercice 5

Soit $(E, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espace préhilbertien réel, et notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal de E si $p \circ q = q \circ p$.

III Correction des exercices

Une correction de l'exercice 1

On conjecture aisément que les points extrémaux sont ceux de la sphère unité.

→ Soit $x \in B(0,1)$. Si $x = 0$ alors en fixant $a \in \overline{B}(0,1) \setminus \{0\}$, $x = \frac{1}{2}(a - a)$ et pourtant $x \neq a$ et $x \neq -a$.
Si $x \neq 0$, alors $x = (1 - \|x\|) \cdot 0 + \|x\| \dfrac{x}{\|x\|}$ et pourtant $x \neq 0$ et $x \neq \dfrac{x}{\|x\|}$.
Donc les points de $B(0,1)$ ne sont pas des points extrémaux de $\overline{B}(0,1)$.

→ Soit $x \in S(0,1)$. Soient $y, z \in C$. Supposons qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $x = ty + (1-t)z$. Si $t = 0$ ou $t = 1$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, d'après l'inégalité triangulaire,

$$1 \leq t\,\|y\| + (1-t)\,\|z\| \leq t + (1-t) = 1$$

donc $t\,\|y\| + (1-t)\,\|z\| = \|ty + (1-t)z\|$. D'après le cas d'égalité de l'inégalité de Minkowski, il existe $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda z$ ou $\lambda y = z$. Par ailleurs,

$$\underbrace{t(1 - \|y\|)}_{\geq 0} + \underbrace{(1-t)(1 - \|z\|)}_{\geq 0} = 0$$

Donc $\|y\| = \|z\| = 1$, donc $\lambda = 1$. Donc $x = y$ ou $x = z$.

Donc $S(0,1)$ est l'ensemble des points extrémaux de $B(0,1)$.

Une correction de l'exercice 2

Introduisons l'application

$$\varphi : (x,y) \longmapsto \mathcal{N}(x+y)^2 - \mathcal{N}(x-y)^2$$

définie sur $E \times E$. φ est clairement symétrique et définie positive. Il reste à montrer qu'elle est bilinéaire.
Soient x, y et $z \in E$. D'après l'égalité de la médiane,

$$\varphi(x, y+z) = 2\left(\mathcal{N}(x+y)^2 + \mathcal{N}(z)^2\right) - \mathcal{N}(x-y-z)^2$$
$$\varphi(-x, y+z) = 2\left(\mathcal{N}(x-y)^2 + \mathcal{N}(z)^2\right) - \mathcal{N}(x+y+z)^2$$

Or, $\varphi(-x, y+z) = -\varphi(x, y+z)$, donc en soustrayant membre à membre,

$$\varphi(x, y+z) = \underbrace{\mathcal{N}(x+y)^2 - \mathcal{N}(x-y)^2}_{\varphi(x,y)} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\mathcal{N}(x+y+z)^2 - \mathcal{N}(x-y-z)^2\right)}_{=\varphi(x,y+z)}$$

Ainsi, $\varphi(x, y+z) = 2\varphi(x,y)$. En échangeant les rôles de y et z, $\varphi(x, y+z) = 2\varphi(x,z)$, donc

$$\varphi(x, y+z) = \varphi(x,y) + \varphi(x,z)$$

En remarquant que $\varphi(x,0) = 0$, une récurrence immédiate permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(x, ny) = n\varphi(x,y)$$

Or, $\varphi(x,-y) = -\varphi(x,y)$, donc pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\varphi(x,my) = m\varphi(x,y)$.
Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors

$$p\varphi(x,y) = \varphi(x,py) = \varphi(x,qry) = q\varphi(x,ry)$$

donc $\varphi(x,ry) = \dfrac{p}{q}\varphi(x,y) = r\varphi(x,y)$ et ceci est valable pour tout rationnel r.
Enfin, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(\lambda_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$.
Or $u \mapsto \varphi(x,u)$ est continue, donc $\underbrace{\lambda_n\varphi(x,y)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda\varphi(x,y)} = \varphi(x,\lambda_n y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(x,\lambda y)$, donc par unicité de la limite

$$\varphi(x,\lambda y) = \lambda\varphi(x,y)$$

et ceci est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc φ est linéaire selon la deuxième variable. Étant de plus symétrique, elle est bilinéaire. Donc φ est un produit scalaire sur E.

Une correction de l'exercice 3

Soit I un ensemble infini non dénombrable.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ admet une base orthonormée $(e^i) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})^I$.

→ Montrons que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est séparable, *i.e.* $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ contient une partie dénombrable dense.
Soit $(x_n) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{+\infty} x_n^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$.
Par ailleurs, pour tout $n \in [\![0;n_\varepsilon]\!]$, il existe $a_n \in \mathbb{Q}$ tel que $|a_n - x_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2(n_\varepsilon+1)}}$.
Prolongeons $(a_0,\dots,a_{n_\varepsilon})$ en une suite presque nulle $(a_n) \in \mathbb{Q}[X]$ en posant, pour tout entier $n > n_\varepsilon$, $a_n = 0$.
Rappelons qu'on se donne une telle suite si, et seulement si, on se donne un polynôme à coefficients rationnels, d'où la notation commune des deux ensembles.
Ainsi,
$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2 = \sum_{n=1}^{n_\varepsilon}(x_n-a_n)^2 + \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{+\infty} x_n^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$$
ce qui prouve que $\mathbb{Q}[X]$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

→ $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable. En effet, $\mathbb{Q}[X] = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}\mathbb{Q}_n[X]$, et il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_n[X]$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^{n+1}$ qui est dénombrable en tant que produit cartésien d'ensembles dénombrables.

→ Ainsi, pour tout $i \in I$, il existe $(a_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}[X]$ telle que $\|(e_n^i)_{n\in\mathbb{N}} - (a_n^i)_{n\in\mathbb{N}}\| < \dfrac{1}{2}$. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a^i = a^j$. Alors,
$$\underbrace{\left\|(e_n^i)_{n\in\mathbb{N}} - (e_n^j)_{n\in\mathbb{N}}\right\|}_{=2\delta_{i,j}} \leq \left\|(e_n^i)_{n\in\mathbb{N}} - (a_n^i)_{n\in\mathbb{N}}\right\| + \left\|(e_n^j)_{n\in\mathbb{N}} - (a_n^j)_{n\in\mathbb{N}}\right\| < 1$$
donc $i = j$. Donc $i \longmapsto (a_n^i)$ est une injection de I dans $\mathbb{Q}[X]$, donc I est dénombrable, ce qui est faux.

En conclusion, $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ n'admet pas de base orthonormée.

Une correction de l'exercice 4

1. Supposons qu'il existe un hyperplan H de E tel que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m) \subset H$. Soit $u \in E \setminus \{0\}$ tel que $H^\perp = \mathbb{R}u$. Alors
$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle u,\ e_i\rangle = 0$$
ce qui est faux. Donc $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)$.

2. Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de produit scalaire canonique, et posons $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $u_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Alors, $\|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\|$. De plus, pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,
$$\sum_{i=1}^{3} \langle x,\ u_i\rangle^2 = x_1^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2 = \frac{3}{2}\|x\|^2$$
donc en posant $(e_1, e_2, e_3) = \sqrt{\frac{2}{3}}(u_1, u_2, u_3)$, on a bien $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\|$, et
$$\sum_{i=1}^{3} \langle x,\ e_i\rangle^2 = \|x\|^2$$

3. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. $\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i,\ e_j\rangle^2 = \|e_i\|^4 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \underbrace{\langle e_i,\ e_j\rangle^2}_{\geq 0}$, donc $\|e_i\|^2 \geq \|e_i\|^4$ donc $\|e_i\| \leq 1$.
Soit $u \in \mathrm{Vect}\left((e_j)_{1 \leq j \neq i \leq n}\right)^\perp$ tel que $\|u\| = 1$. Alors,
$$1 = \|u\|^2 = \langle e_i,\ u\rangle^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \|u\|^2 \|e_i\|^2 \leq \|e_i\|^2$$
Donc $\|e_i\| = 1$. Ainsi, $\cancel{1} = \|e_i\|^2 = \underbrace{\cancel{\|e_i\|^4}}_{=1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \underbrace{\langle e_i,\ e_j\rangle^2}_{\geq 0}$, donc $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \langle e_i,\ e_j\rangle^2 = 0$, donc pour tout $j \in [\![1; n]\!]$ tel que $j \neq i$, $\langle e_i,\ e_j\rangle = 0$. Donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Une correction de l'exercice 5

Si $p \circ q = q \circ p$, alors $(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p \circ q \circ q \circ p = p \circ q \circ p = p \circ p \circ q = p \circ q$, donc $p \circ q$ est un projecteur. Or, $|\!|\!| p \circ q |\!|\!| \leq |\!|\!| p |\!|\!| |\!|\!| q |\!|\!| \leq 1$ donc $p \circ q$ est orthogonal.

* * *

Compilé par Mehdi Chouta pour CPGE Paradise le 09 février 2021.
La dernière mise à jour mineure a eu lieu le 10 février 2021.