COMPLÉMENTS

Espaces préhilbertiens réels

Dans tout le document, $(E, \langle \cdot\,,\ \cdot \rangle)$ désigne espace préhilbertien réel et on note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot\,,\ \cdot \rangle$. De plus, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

I Décomposition de Cartan (Iwasawa)

Dans cette partie on suppose que E est de dimension finie n.

1. Changements de base, orientation

Rappels

Soient $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, et $\mathscr{G}$ des bases de E.

- → La matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{F}$ est la matrice $[\mathscr{F}]_{\mathscr{E}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la k-ième colonne de $[\mathscr{F}]_{\mathscr{E}}$ est la représentation du k-ième vecteur de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{E}$.
- → $[\mathscr{F}]_{\mathscr{E}}[\mathscr{G}]_{\mathscr{F}}$ est la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{G}$: elle vaut $[\mathscr{G}]_{\mathscr{E}}$.

Définition

Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux bases de E. On dit que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ ont la même orientation, et on note $\mathscr{E} \sim \mathscr{F}$, lorsque

$$\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{F}) := \det([\mathscr{F}]_{\mathscr{E}}) > 0$$

Propriété

$\sim$ est une relation d'équivalence possédant exactement deux classes.

Preuve : Soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On a

$$\det_{\mathscr{E}}(-e_1, e_2, \dots, e_n) = \begin{vmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Donc $\mathscr{E} \nsim \underbrace{(-e_1, e_2, \dots, e_n)}_{\text{notée } \tilde{\mathscr{E}}}$. Donc $\sim$ admet au moins deux classes d'équivalence.

Soit $\mathscr{F}$ une base de E.

- → Si $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{F}) > 0$, alors on a $\mathscr{F} \in \overline{\mathscr{E}}$.
- → Sinon, $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{F}) < 0$. Or $[\mathscr{F}]_{\tilde{\mathscr{E}}} = [\mathscr{E}]_{\tilde{\mathscr{E}}}[\mathscr{F}]_{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} [\mathscr{F}]_{\mathscr{E}}$ donc $\det_{\tilde{\mathscr{E}}}(\mathscr{F}) = -\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{F}) > 0$, *i.e.* $\mathscr{F} \in \overline{\tilde{\mathscr{E}}}$.

On en déduit que les deux seules classes d'équivalences sont celles de $\mathscr{E}$ et $\tilde{\mathscr{E}}$.
Dans la suite de cette partie, E est associé à l'une de ses bases orthonormées $\mathscr{E}$. On dit alors que E est orienté.

Définition

Soit $\mathscr{F}$ une base de E. On dit que $\mathscr{F}$ est positive ou directe dans E lorsque $\mathscr{F} \in \overline{\mathscr{E}}$.
Dans le cas contraire, $\mathscr{F}$ est négative ou indirecte.

Propositions

Soient $\mathscr{F}$ une base orthonormée de E et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$

- → Si $\mathscr{F}$ est directe, alors $\det_{\mathscr{F}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{E}}(x_1, \ldots, x_n)$.
- → Si $\mathscr{F}$ est indirecte, alors $\det_{\mathscr{F}}(x_1, \ldots, x_n) = -\det_{\mathscr{E}}(x_1, \ldots, x_n)$

Preuves :

- → On pose $P = [\mathscr{F}]_{\mathscr{E}}$ et, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $X_i = [x_i]_{\mathscr{E}}$ et $X_i' = [x_i]_{\mathscr{F}}$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $X_i = PX_i'$. Donc

$$\det_{\mathscr{E}}(x_1, \ldots, x_n) = \det(X_1, \ldots, X_n) = \det(PX_1', \ldots, PX_n') = \underbrace{\det(P)}_{=1} \det(X_1', \ldots, X_n') = \det_{\mathscr{F}}(x_1, \ldots, x_n)$$

car P est une matrice orthogonale et $\mathscr{F}$ est orientée positivement (relativement à $\mathscr{E}$).

- → Le calcul est identique, seulement $\det(P) = -1$ car P est orthogonale et orientée négativement (relativement à $\mathscr{E}$).

Proposition

On suppose que $n = 3$. Soit $(x, y) \in E^2$. Il existe un unique $w \in E$ vérifiant la propriété

$$\forall z \in E, \ \det_{\mathscr{E}}(x, y, z) = \langle w, \ z \rangle$$

w est le produit vectoriel de x et y et est noté $x \wedge y$.

Preuve : On considère la forme linéaire $\varphi : z \longmapsto \det_{\mathscr{E}}(x, y, z)$. D'après le théorème à la page 4 du chapitre sur les espaces préhilbertien réels, il existe un unique vecteur w tel que $\varphi = \langle w, \ \cdot \rangle$, ce qu'on voulait.

Comme en physique, les coordonnées de w s'obtiennent à partir des coordonnées de x et y :

$$w_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad w_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \qquad w_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Exercice 1

Soit $(E, \langle \cdot, \ \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3.
Montrer que pour tous $a, b, c \in E$

$$a \wedge (b \wedge c) = \langle a, \ c \rangle \, b - \langle a, \ b \rangle \, c$$

2. Décomposition de Cartan

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont triangulaires supérieures et dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

Proposition

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple $(O, T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OT$.

Preuves

→ **Unicité**
S'il existe deux tels couples (O_1, T_1) et (O_2, T_2) alors $O_1T_1 = O_2T_2$, donc $O_1^{-1}O_2 = T_1T_2^{-1}$.
$U := O_1^{-1}O_2$ est orthogonale, triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, car l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles et triangulaires supérieures est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.
Or, $U^\top = U^{-1} = (T_1T_2^{-1})^{-1} = T_2T_1^{-1} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$. Donc $U^\top$ est aussi triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
Donc U est diagonale et à coefficients strictement positifs. On en déduit que $U = I_n$, donc $O_1 = O_2$ et $T_1 = T_2$.

→ **Existence**
Notons $\mathscr{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ la base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donnée par les colonnes de A, et $\mathscr{F}$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ obtenue à l'aide du procédé de Gram-Schmidt appliqué à $\mathscr{A}$.
Quitte à échanger certains vecteurs de $\mathscr{F}$ par leurs opposés, le théorème de Gram-Schmidt assure que $T := [\mathscr{F}]_{\mathscr{A}}$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs.
Posons $O = [\mathscr{F}]_{\mathrm{Can}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))}$. Alors, $AT = O$ car $A = [\mathscr{A}]_{\mathrm{Can}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))}$. Ainsi $A = OT^{-1}$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, T) & \longmapsto & OT \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de déterminant strictement positif. Montrer que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe.

3. Inégalité de Hadamard

Exercice 4

Soit $(E, \langle \cdot\,, \,\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n orienté par l'une de ses bases orthonormées $\mathscr{E}$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Montrer que

$$\left| \det_{\mathscr{E}}(x_1, \ldots, x_n) \right| \leq \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

Montrer de plus qu'il y a égalité si, et seulement si, $(x_1, \ldots, x_n)$ est orthogonale.

II Matrices de Gram

On rappelle que $(E, \langle\cdot,\ \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Définition

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On appelle matrice de Gram associée à $(x_1, \dots, x_n)$ la matrice

$$G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i,\ x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$$

On note aussi $|G|(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de cette matrice de Gram.

Propositions

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

- → Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ un système orthonormé tel que $x_1, \dots, x_p \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Notons $A = [(x_1, \dots, x_n)]_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)}$. Alors,

$$G(x_1, \dots, x_n) = A^\top A$$

- → $|G|(x_1, \dots, x_n) > 0$ si, et seulement si, $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.
- → Notons M la matrice $G(x_1, \dots, x_n)$. Pour tout $\Lambda = (\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\|^2 = \Lambda^\top M\Lambda$$

- → Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $\lambda \geq 0$.
- → On suppose E de dimension finie. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n) \in E^n$. On a l'équivalence

$$G(x_1, \dots, x_n) = G(y_1, \dots, y_n) \iff \exists u \in \mathcal{O}(E), \quad \forall i \in [\![1;n]\!], \quad u(x_i) = y_i$$

Preuves

- → On note $A_1, \dots, A_n$ les colonnes de A. Alors

$$A^\top A = [A_i^\top A_j]_{1\leq i,j\leq n} = (\langle x_i,\ x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n} = G(x_1, \dots, x_n)$$

- → D'après la proposition précédente, $|G|(x_1, \dots, x_p) = \det(A^\top A) = (\det(A))^2 > 0$ donc $\det(A) = 0$, d'où l'équivalence.
- → On rappelle une identité classique :

$$\forall M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall x = (x_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \qquad X^\top MX = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j m_{i,j}$$

  Ainsi $\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\|^2 = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} \lambda_i\lambda_j \langle x_i,\ x_j\rangle = {}^t\Lambda M\Lambda$.
- → Il existe $\Lambda \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $M\Lambda = \lambda\Lambda$, donc $\Lambda^\top M\Lambda = \lambda\Lambda^\top\Lambda$ et d'après la proposition précédente

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\|^2 = \Lambda^\top M\Lambda = \mu(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_p^2)$$

  Donc $\lambda \geq 0$.
- → ($\Leftarrow$) Supposons qu'un tel u existe. Alors on a pour tout $i, j \in [\![1;n]\!]$,

$$\langle y_i,\ y_j\rangle = \langle u(x_i),\ u(x_j)\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ u \text{ conserve le produit scalaire}}}{=} \langle x_i,\ x_j\rangle$$

donc les deux matrices de Gram sont égales.
($\Rightarrow$) Remarquons que l'implication est vraie si tous les x_i (et donc tous les y_i) sont nuls. Supposons que les x_i ne sont pas tous nuls.
À l'aide d'une permutation σ de $[\![1;n]\!]$, permutons les x_i de sorte à considérer l'entier naturel non nul $r \leq n$ tel que $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)})$ soit libre et $x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(n)} \in \underbrace{\mathrm{Vect}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)})}_{\text{noté } A}$.

Posons, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, $a_i = x_{\sigma(i)}$ et $b_i = y_{\sigma(i)}$. Alors

(i) D'après la deuxième proposition, $(b_1, \dots, b_r)$ est libre car $|G|(b_1, \dots, b_r) = |G|(a_1, \dots, a_r) > 0$.

(ii) Pour tout entier $k \geq r+1$,

$$|G|(b_1, \dots, b_r, y_{\sigma(k)}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{égalité des matrices de Gram}}}{=} |G|(a_1, \dots, a_r, x_{\sigma(k)}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deuxième proposition}}}{=} 0$$

donc $y_{\sigma(k)} \in \underbrace{\mathrm{Vect}(b_1, \dots, b_r)}_{\text{noté } B}$.

Notons p la dimension de E. Si $r < p$, introduisons les systèmes orthonormés $(a_{r+1}, \dots, a_p)$ et $(b_{r+1}, \dots, b_p)$ de sorte que les familles $(a_1, \dots, a_p)$ et $(b_1, \dots, b_p)$ soient des bases adaptées aux décompositions $E = A \oplus A^\perp$ et $E = B \oplus B^\perp$.
On considère $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $u(a_i) = b_i$.
u est une isométrie sur E. En effet, pour tout $x \in E$, il existe $\Lambda = (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et $(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p-r}$ tel que $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$, et

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \|\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r\|^2 + \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i^2 \|a_i\|^2 && \text{(Pythagore)} \\
&= \Lambda^\top G(a_1, \dots, a_r)\Lambda + \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i^2 \|b_i\|^2 && \text{(troisième proposition)} \\
&= \Lambda^\top G(b_1, \dots, b_r)\Lambda + \|\lambda_{r+1} u(a_{r+1}) + \dots + \lambda_p u(a_p)\|^2 && \\
&= \|\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_r b_r\|^2 + \|\lambda_{r+1} u(a_{r+1}) + \dots + \lambda_p u(a_p)\|^2 && \text{(troisième proposition)} \\
&= \|u(x)\|^2 && \text{(Pythagore)}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $k \in [\![r+1;n]\!]$, et pour tout $i \in [\![1;r]\!]$

$$\left\langle u(x_{\sigma(k)}) - y_{\sigma(k)},\, b_i \right\rangle = \left\langle u(x_{\sigma(k)}),\, b_i \right\rangle - \left\langle y_{\sigma(k)},\, b_i \right\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ u \text{ conserve le produit scalaire}}}{=} \left\langle x_{\sigma(k)},\, a_i \right\rangle - \left\langle y_{\sigma(k)},\, b_i \right\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{égalité des matrices de Gram}}}{=} 0$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![r+1;n]\!]$, $u(x_{\sigma(k)}) - y_{\sigma(k)} \perp B$ et $u(x_{\sigma(k)}) - y_{\sigma(k)} \in B$, donc $u(x_{\sigma(k)}) - y_{\sigma(k)} = 0$.
Donc, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ $u(x_i) = y_i$.

Exercice 5

Soit $(E, \langle \cdot\,,\ \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On suppose que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre dans E et on pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Soit $a \in E$.
Montrer que

$$d(a, F)^2 = \frac{|G|(a, x_1, \dots, x_p)}{|G|(x_1, \dots, x_p)}$$

III Correction des exercices

Une correction de l'exercice 1

Soit $\mathscr{E}$ une base orthonormée de E qui détermine le sens direct. On note (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), et (c_1, c_2, c_3) les coordonnées respectives de a, b et c dans cette base.

Calculons : $[b \wedge c]_{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}$, puis $[a \wedge (b \wedge c)]_{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$.

Par ailleurs : $[\langle a,\ c\rangle\, b - \langle a,\ b\rangle\, c]_{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} (\cancel{a_1c_1} + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (\cancel{a_1b_1} + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ (a_1c_1 + \cancel{a_2c_2} + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + \cancel{a_2b_2} + a_3b_3)c_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + \cancel{a_3c_3})b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + \cancel{a_3b_3})c_3 \end{pmatrix}$.

En factorisant par le couple de coordonnées de a qui apparaît dans chaque ligne, ou en développant chaque ligne des deux résultats, on obtient que les deux colonnes sont égales.

Une correction de l'exercice 2

Il s'agit de montrer que :

- $\rightarrow$ f est continue : c'est vrai par continuité du produit matriciel.
- $\rightarrow$ f est bijective : c'est vrai d'après la décomposition de Cartan.
- $\rightarrow$ f^{-1} est continue : c'est le plat de résistance de l'exercice.

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Considérons une suite $(M_m)_{m\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ convergeant vers $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et montrons que $f^{-1}(M_m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} f^{-1}(M)$.

Introduisons la décomposition de Cartan $(O, T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ de M, et pour tout $m \in \mathbb{N}$, la décomposition de Cartan $(O_m, T_m) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ de M_m.

Rappelons que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact : il est fermé (c'est l'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $X \longmapsto X^\top X$) et borné car tous les coefficients d'une matrice orthogonale sont majorés par 1 en valeur absolue.

Ainsi, de $(O_m)_{m\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $\left(O_{\varphi(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\tilde{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $T_{\varphi(m)} = \left(O_{\varphi(m)}\right)^{-1} M_{\varphi(m)} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \tilde{O}^{-1}M$.

Or $\tilde{T} := \tilde{O}^{-1}M$ est aussi triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, car l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux positifs est fermé.

Ainsi, $M = \tilde{O}\tilde{T}$ et $(\tilde{O}, \tilde{M}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$. Par unicité de la décomposition de Cartan de M, $O = \tilde{O}$ et $T = \tilde{T}$.

Remarquons alors que toute extraction convergente de la suite $(O_m)_{m\in\mathbb{N}}$ exhibe une unique valeur d'adhérence pour cette suite, et cette valeur est O.

Cette suite est à valeurs dans un compact et admet une unique valeur d'adhérence, c'est donc une suite convergente de limite O.

Ainsi, $T_m = O_m^{-1}M_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} O^{-1}M = T$. Donc,

$$f^{-1}(M_m) = (O_m, T_m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} (O, T) = f^{-1}(M)$$

ce qui prouve la continuité de f^{-1}.

Une correction de l'exercice 3

L'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \\ (O,T) &\longmapsto OT \end{aligned}$$

est continue (car le produit matriciel l'est) et surjective : pour toute $M \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, la décomposition de Cartan donne un couple $(O,T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $OT = M$, mais en fait, $O \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ car sinon, le déterminant de M serait négatif, celui de T étant positif.
Par ailleurs, $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe (*cf.* chapitre 35) et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe car convexe, donc leur produit cartésien est connexe.
$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est donc connexe en tant qu'image d'un connexe par une fonction continue.

Une correction de l'exercice 4

On pose $M = [x_1, \dots, x_n]_{\mathscr{E}}$. Remarquons que les colonnes de M sont les colonnes X_i représentatives des vecteurs x_i.

→ Si $(X_1, \dots, X_n)$ est liée, $\det M = 0$ donc l'inégalité est vraie.

→ Sinon, remarquons que M est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathscr{X} := (X_1, \dots, X_n)$.
Notons $\mathscr{U} = (U_1, \dots, U_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donnée par le procédé de Gram-Schmidt, puis T la matrice de passage de $\mathscr{U}$ à $\mathscr{X}$. D'après le théorème de Gram-Schmidt, T est triangulaire supérieure. Ses colonnes étant les représentations des vecteurs de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{U}$ qui est orthonormée, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, le i-ème coefficient diagonal de T est $U_i^\top X_i$.
Ainsi, en notant U la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathscr{U}$,

$$|\det(M)| = |\det(UT)| = |\det(T)| = \prod_{k=1}^n \left|U_k^T X_k\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \prod_{k=1}^n \sqrt{X_k^\top X_k}\, \underbrace{\sqrt{U_k^\top U_k}}_{=1} = \prod_{k=1}^n \sqrt{X_k^\top X_k}$$

Une correction de l'exercice 5

Introduisons la décomposition $a = u + v$ adaptée à $E = F \oplus F^\perp$.

$$\begin{aligned}
|G|(a, x_1, \dots, x_p) &= \begin{vmatrix} \langle a,\, a\rangle & \overbrace{\langle a,\, x_1\rangle \quad \dots \quad \langle a,\, x_p\rangle}^{\text{ligne notée } L} \\ \langle x_1,\, a\rangle & \langle x_1,\, x_1\rangle \quad \dots \quad \langle x_1,\, x_p\rangle \\ \vdots & \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ \langle x_p,\, a\rangle & \langle x_p,\, x_1\rangle \quad \dots \quad \langle x_p,\, x_p\rangle \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \|u\|^2 + \|v\|^2 & L \\ L^\top & G(x_1, \dots, x_n) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \|v\|^2 & L \\ 0 & G(x_1, \dots, x_n) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \|u\|^2 & L \\ L^\top & G(x_1, \dots, x_n) \end{vmatrix} \\
&= \|v\|^2 |G|(x_1, \dots, x_p) + \underbrace{|G|(u, x_1, \dots, x_p)}_{=0 \text{ car } (u, x_1, \dots, x_p) \text{ est liée}} \\
&= d(a,F)^2 |G|(x_1, \dots, x_p)
\end{aligned}$$

* * *

Compilé par Mehdi Chouta et Omar Bennouna pour CPGE Paradise le 30 juin 2021.