CHAPITRE 36

Espaces préhilbertiens complexes

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non trivial et n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

I Espaces hermitiens

Définition I.1.

Une application $\langle \cdot\,,\ \cdot \rangle : E^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est un produit scalaire hermitien si

- → Pour tout $x \in E$, $y \longmapsto \langle x,\ y\rangle$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
- → Pour tout $y \in E$, $x \longmapsto \langle x,\ y\rangle$ est semi-linéaire, *i.e.* pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $x \in E$,

$$\langle \lambda x,\ y\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x,\ y\rangle$$

- → Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x,\ y\rangle = \overline{\langle y,\ x\rangle}$
- → Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle x,\ x\rangle \in \mathbb{R}^{+*}$

Dorénavant, E est muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot\,,\ \cdot \rangle$. On dit que $(E, \langle \cdot\,,\ \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien complexe ou encore un espace hermitien. On notera également $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire : pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x,\ x\rangle}$.

Identités remarquables I.2.

Les identités remarquables sur un espace préhilbertien complexe sont différentes de celles sur un espace préhilbertien réel. Si la norme est toujours réelle, le produit scalaire peut ne pas l'être. Ainsi, pour tous $x, y \in E$,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x,\ y\rangle) + \|y\|^2 \qquad \|x-iy\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Im}(\langle x,\ y\rangle) + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle x,\ y\rangle) + \|y\|^2 \qquad \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Im}(\langle x,\ y\rangle) + \|y\|^2$$

$$\langle x,\ y\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{identité de polarisation}}}{=} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\left(\|x-iy\|^2 - \|x+iy\|^2\right)\right)$$

Quelques produits scalaires usuels

- → $E = \mathbb{C}$, et $\langle \cdot\,,\ \cdot \rangle : (z, w) \longmapsto \overline{z}w$
- → $E = \mathbb{C}^n$, $\langle \cdot\,,\ \cdot \rangle : (z, w) \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \overline{x_k} y_k$
- → $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\langle \cdot\,,\ \cdot \rangle : (A, B) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^t\overline{A}B)$
- → $E = \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\langle \cdot\,,\ \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f} g$ où $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est le sous-espace de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ne contenant que des fonctions 2π-périodiques.

Proposition I.3.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est valide sur l'espace préhilbertien complexe E :

$$\forall (x, y) \in E, \ \ |\langle x,\ y\rangle| \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

Preuve : On suppose que $y \neq 0$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant $e^{i\theta} \langle x,\ y\rangle = |\langle x,\ y\rangle|$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons

$$\varphi(t) = \left\|x + te^{i\theta} y\right\|^2$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\left\langle x,\ te^{i\theta} y\right\rangle + t^2 \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2t\,|\langle x,\ y\rangle| + t^2 \|y\|^2$$

Ainsi, φ est une fonction polynômiale de degré 2 et positive, donc son discriminant est négatif ou nul. Or, celui-ci vaut $4\,|\langle x,\ y\rangle|^2 - 4\,\|x\|^2 \|y\|^2$, ce qu'on voulait.

Nombre de notions relatives aux espaces préhilbertiens réels définies en première année et au chapitre 34 sont toujours valables sur un espace préhilbertien complexe. Plus précisément :

- → La notion d'orthogonalité se définit de la même manière sur E que sur un espace préhilbertien réel : produit scalaire nul. On peut donc considérer des familles orthogonales ou orthonormées de E, ainsi que l'orthogonal d'une partie de E ou deux parties orthogonales de E, de même qu'un vecteur normal à un hyperplan de E.
- → L'inégalité de Minkowski, le théorème de Pythagore et l'égalité de la médiane sont toujours valides sur E.
- → Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, on a toujours $E = F \oplus F^{\perp}$.
- → E possède des bases orthonormées.
- → Les formules de projections orthogonales sont toujours valables.
- → L'inégalité de Bessel est toujours valable.
- → Le procédé de Gram-Schmidt appliqué à une base de E donne une base orthonormée de E.

Avertissement I.4.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F. Soit $x \in E$. Le projeté de x sur F s'écrit toujours

$$\sum_{k=1}^{n} \langle e_k,\ x\rangle\, e_k$$

Le **vecteur à projeter** est dans la **case de droite** du produit scalaire hermitien. Tout fonctionne identiquement au cas réel pour les projections, le procédé de Gram-Schmidt et l'inégalité de Bessel à condition de ne pas négliger ce petit détail.

Remarque I.5.

On suppose que E est de dimension finie n.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Considérons l'hyperplan de E défini par $H = \left\{ x := \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \;\middle|\; \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \right\}$. Alors $y := \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} e_k$ est un vecteur normal à H.

Exercice I.6.

Soit G un groupe fini d'ordre n. On pose $E = \mathscr{F}(G, \mathbb{C})$.
On considère le produit scalaire hermitien sur E vérifiant, pour tous x et y dans E,

$$\langle f,\ g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\overline{f(a)}g(a)$$

On dit que χ est un caractère de G si $\chi \in (G, \mathbb{C}^*)$.

1. Montrer que tout caractère de G est à valeurs dans $\mathbb{U}_n$.
2. Montrer que si Φ est un caractère non constant, alors $\sum\limits_{a\in G}\Phi(a) = 0$.
3. Montrer que si χ et ψ sont deux caractères distincts, alors ils sont orthogonaux et que $\|\chi\|^2 = 1$.

II Opérations unitaires

Définition II.1.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est unitaire lorsque pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| = \|x\|$$

On note $\mathcal{U}(E)$ l'ensemble de tels endomorphismes.

On dit qu'un endomorphisme unitaire u de E préserve la norme. De plus, en vertu de l'identité de polarisation, il préserve aussi le produit scalaire *i.e.* pour tous $x, y \in E$,

$$\langle u(x),\ u(y)\rangle = \langle x,\ y\rangle$$

Proposition II.2.

Soit $u \in \mathcal{U}(E)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$.

- → $(\mathcal{U}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.
- → Si E est de dimension finie n et $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E, alors v est unitaire si, et seulement si, $(v(e_1), \dots, v(e_n))$ est une base orthonormée de E.
- → F est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par u
- → v est unitaire si, et seulement si, v est diagonalisable en base orthonormée et $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{U}$.

Notation : Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note U^*, et on appelle matrice adjointe, la matrice $\overline{U}^\top$.

Définition II.3.

Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que U est unitaire si $UU^* = I_n$.

Remarquons alors que U est inversible et que l'on a aussi $U^*U = I_n$. Ces deux égalités sont en fait équivalentes.

Proposition II.4.

On suppose que E est de dimension finie n. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(1) U est unitaire.

(2) Les colonnes de U forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(3) U est la matrice d'un endormorphisme $u \in \mathcal{U}(E)$ dans une base orthonormée.

Preuve

→ **(1) ⇒ (2)**
Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note C_k la k-ième colonne de U.
Pour tous $k, j \in [\![1;n]\!]$, le coefficient à la ligne i et à la colonne j dans U^*U est égal à $C_k^*C_j$.
Or, $C_k^*C_j = \delta_{k,j}$, donc les colonnes de U forment bien une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

→ **(2) ⇒ (3)**
Considérons une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de E et définissons $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que sa matrice relativement à cette base vale U.
Soit $x \in E$ et X sa colonne représentative relativement à cette même base. Alors

$$\|u(x)\|^2 = X^* \underbrace{U^*U}_{=I_n} X = X^*X = \|x\|^2$$

Donc $u \in \mathcal{U}(E)$.

→ **(3) ⇒ (1)**
Rappelons que u préserve aussi le produit scalaire. Ainsi, pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

$$X^*U^*UY = X^*Y \tag{$\star$}$$

Rappelons que pour tous $k, j \in [\![1;n]\!]$ et pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$E_k^\top M E_j = M[k,j] \qquad \text{et} \qquad E_k^\top E_j = \delta_{k,j}$$

Ainsi, en évaluant l'identité ($\star$) en chaque E_k, il vient que $U^*U = I_n$. Donc U est unitaire.

Correction de l'exercice I.6. :

1. Soit χ un caractère de G. Soit $a \in G$. Le théorème de Lagrange assure que l'ordre de a divise n, donc $a^n = e$, donc $\chi(a)^n = \chi(a^n) = 1$. Donc χ est à valeurs dans $\mathbb{U}_n$.
2. Soit Φ un caractère non constant. Il existe $b \in G$ tel que $\Phi(b) \neq 1$.
L'application $a \longmapsto ab$ est une bijection de G dans G, donc

$$\sum_{a\in G} \Phi(a) = \sum_{a\in G} \Phi(ab) = \Phi(b) \sum_{a\in G} \Phi(a)$$

Donc $\sum\limits_{a\in G} \Phi(a) = 0$.
3. Soient χ et ψ deux caractères distincts. Calculons leur produit scalaire :

$$\langle \psi,\ \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{a\in G} \overline{\psi(a)} \chi(a) \underset{\substack{\uparrow \\ \psi(a) \in \mathbb{U}_n}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{a\in G} \frac{\chi}{\psi}(a) \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\chi}{\psi} \text{ est un caractère}}}{=} 0$$

De plus,

$$\langle \chi,\ \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{a\in G} |\chi(a)|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \chi(a) \in \mathbb{U}_n}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{a\in G} 1 = 1$$

* *
*

Compilé par Omar Bennouna pour CPGE Paradise le 28 juin 2021.