



CHAPITRE 42

Endomorphismes d'un espace hermitien

Dans tout ce chapitre, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace hermitien de dimension $n \geq 1$.

Exemples

→ Sur \mathbb{C}^n : pour tous $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k$.

→ Sur \mathcal{T}_n : pour tous $P, Q \in \mathcal{T}_n$, $\langle P, Q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(t)} Q(t) dt$.

i Si, pour tout $k \in \llbracket -n; n \rrbracket$, l'application $x \mapsto e^{ikx}$ est notée e_k , rappelons que $\mathcal{T}_n = \text{Vect}(e_{-n}, \dots, e_n)$.

I Adjonction matricielle

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle *matrice adjointe de A*, et on note A^* , la matrice \overline{A}^T .

Propriétés

Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

- $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, et $(AB)^* = B^* A^*$.
- $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$, et $\chi_{A^*} = \overline{\chi_A}$
- $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A)$. En effet $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(\overline{A}) = \text{rg}(A)$

i Si un polynôme P s'écrit $\sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors $\overline{P} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} X^k$

Matrices hermitiennes : Une matrice carrée est hermitienne si elle est égale à sa matrice adjointe.

Propositions

→ L'ensemble des matrices hermitiennes d'ordre n

$$\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$

est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n^2 .

→ Si $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alors $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$.

Preuves

→ Soit $A = B + iC \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que B et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \iff A^* = A \iff B^T = B \quad \text{et} \quad C^T = -C$$

Donc $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est isomorphe $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Donc $\dim(\mathcal{H}_n(\mathbb{C})) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$.

→ Si $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alors $\chi_A = \chi_{A^*} = \overline{\chi_A}$.

Matrices unitaires : Les matrices unitaires sont les matrices de l'ensemble

$$\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid U^*U = I_n\}$$

Propositions

- $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.
- $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \iff$ les colonnes de U forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$
 \iff les lignes de U forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$.
- $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, il existe deux bases orthonormées \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E telles que U soit la matrice de la famille \mathcal{B}' relativement à la base \mathcal{B} .

Preuve de la deuxième proposition : Soit $U = (u_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n} \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$. Alors pour tous $p, q \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $(U^*U)(p, q) = \sum_{k=1}^n \overline{u_{k,p}}u_{k,q}$, donc pour $p \neq q$, $\sum_{k=1}^n \overline{u_{k,p}}u_{k,q} = 0$ et pour $p = q$, $\sum_{k=1}^n |u_{k,p}|^2 = 1$. Donc, les colonnes de U forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. De même, en examinant les coefficients de UU^* , il vient que les lignes de U forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$. Les réciproques sont immédiates.

Matrices normales Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite normale si $AA^* = A^*A$.

II Adjonction dans $\mathcal{L}(E)$

Théorème - définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, il existe un unique endomorphisme v de E tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

De plus, la matrice de v relativement à toute base orthonormée \mathcal{B} de E est la matrice adjointe de la matrice de u relativement à la même base \mathcal{B} , et v est appelé *endomorphisme adjoint* de u et est noté u^* .

Preuve : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , et $A = (a_{k,\ell})_{1 \leq k,\ell \leq n}$ la matrice de u relativement à \mathcal{B} . Posons v tel que sa matrice relativement à \mathcal{B} vaille A^* . Alors, pour tous $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$, $y = y_1e_1 + \dots + y_n e_n \in E$,

$$\langle u(x), y \rangle = \left\langle \sum_{\ell=1}^n x_\ell u(e_\ell), \sum_{\ell=1}^n y_\ell e_\ell \right\rangle = \left\langle \sum_{\ell=1}^n x_\ell \left(\sum_{k=1}^n a_{k,\ell} e_k \right), \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{\substack{1 \leq \ell, k \leq n \\ \text{on conserve les termes où } k = j}} \overline{x_\ell} a_{k,\ell} y_k$$


et

$$\langle x, v(y) \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j e_j, \sum_{\ell=1}^n y_\ell \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_{\ell,k}} e_k \right) \right\rangle = \sum_{1 \leq \ell, k \leq n} \overline{x_k} y_\ell \overline{a_{\ell,k}} = \langle u(x), y \rangle$$

De plus, si un endomorphisme w , de matrice notée $(w_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n}$ relativement à la base \mathcal{B} , vérifie la même identité, alors pour tous $j, k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $w_{j,k} = \langle e_j, w(e_k) \rangle = \langle u(e_j), e_k \rangle = \overline{a_{k,j}}$, donc $w = v$.

Propriété

Soit F un sous-espace vectoriel de E , et u un endomorphisme de E .
 Si F est stable par u , alors F^\perp est stable par u^* .

 **Preuve :** Si $y \in F^\perp$, alors, pour tout $x \in F$, alors $0 = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$, donc $u^*(y) \in F^\perp$.

Propositions

Soit u un endomorphisme de E .

1. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

→ u est hermitien *i.e.* $u = u^*$.

→ Il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de u relativement à cette base soit hermitienne.


→ Pour toute base orthonormée \mathcal{B} de E , la matrice de u relativement à \mathcal{B} est hermitienne.


2. Les trois assertions suivantes sont également équivalentes :

→ u est unitaire *i.e.* pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

→ Il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de u relativement à cette base soit unitaire.

→ Pour toute base orthonormée \mathcal{B} de E , la matrice de u relativement à \mathcal{B} est unitaire.

 **Preuves :** La première chaîne d'équivalences est immédiate car la matrice de u relativement à une base orthonormée \mathcal{B} de E (et il en existe) est la matrice adjointe de la matrice de u^* relativement à \mathcal{B} . Pour la deuxième chaîne d'équivalences, il convient de remarquer que u est unitaire si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, (u^* \circ u)(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, donc si, et seulement si, $u^* \circ u = \text{Id}_E$ (car pour tout $x \in E$, $\langle x, (u^* \circ u)(x) \rangle = \langle x, x \rangle$).

 On note $\mathcal{U}(E)$ les endomorphismes unitaires de E .

Exercice

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien de dimension $n \geq 1$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que $\mathcal{U}(E)$ est compact.


Théorèmes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

→ u est normal si, et seulement si, u est diagonalisable dans une base orthonormée de E .

→ u est hermitien si, et seulement si, u est diagonalisable dans une base orthonormée de E et $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$.

→ u est unitaire si, et seulement si, u est diagonalisable dans une base orthonormée de E et $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{U}$.

 Une correction de l'exercice

Montrons que $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, $\|U\| = 1$, donc $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est borné.

De plus, $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en tant qu'image réciproque de $\{0\}$, fermé dans \mathbb{R} , par l'application continue $U \mapsto U^*U - I_n$. Donc $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est compact.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Introduisons l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$

$$\varphi : M = (m_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n} \mapsto \left(x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \mapsto \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{k=1}^n m_{k,j} e_k \right) \right)$$

Cette application est linéaire donc continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Il est clair que $\mathcal{U}(E)$ est l'image par φ de $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, qui est compact, donc $\mathcal{U}(E)$ est compact.

* * *

Compilé par Mehdi Chouta pour CPGE Paradise le 10 février 2021.