CHAPITRE 28

# Réduction d'endomorphisme, compléments

**Ce cours est uniquement un complément culturel au cours principal de réduction. Il n'est pas du tout utile aux concours, mais uniquement destiné au lecteur curieux. Si vous souhaitez vous préparer pour les concours, prière de consulter le cours principal de réduction sur cpge-paradise.com.**

## Notations

Introduisons tout d'abord quelques notations. Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ deux corps (commutatifs), $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{L})$.

→ $\operatorname{rg}_{\mathbb{K}} A$ (resp. $\operatorname{rg}_{\mathbb{L}} A$) est le rang de $A$ comme matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$).

→ $\mu_{A,\mathbb{K}}$ (resp. $\mu_{A,\mathbb{L}}$) est le polynome minimal de $A$ vue comme matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$).

→ $\chi_{A,\mathbb{K}}$ (resp. $\chi_{A,\mathbb{L}}$) est le polynome caractéristique de $A$ vue comme matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$).

→ $A \simeq_{\mathbb{K}} B$ (resp. $A \simeq_{\mathbb{L}} B$) est equivalent à dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{L})$) tel que $A = PBP^{-1}$.

→ $\operatorname{Ker}_{\mathbb{L}}(C) = \{X \in \mathbb{L}^n,\ CX = 0\}$

→ Pour $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ irréductible on note $v_Q(P) \in \mathbb{N}$ la valuation $Q-$adique de $P$ i.e. $v_Q(P)$ est le plus grand exposant tel que $Q^{v_Q(P)} | P$

Pour le cas spécial où $Q(X) = X - \lambda$ il s'agit de la multiplicité de $\lambda$ comme racine de $P$ (éventuellement nulle si $\lambda$ n'en est pas une racine)

→ Pour les autres notations, se reférer au cours principal de réduction.

# I Résultats intéressants en réduction

Dans tout ce qui suit $u \in \mathcal{L}(E)$ où $E$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$

### 1. Résultats généraux

Tout d'abord quelques résultats assez basiques mais qu'il faut garder en tête


(cc) BY-NC-SA

**Proposition I.1.**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

1. Si $P$ est non constant alors $P|\mu_u \Longrightarrow \operatorname{Ker}(P(u)) \neq \{0\}$
2. $\operatorname{Ker}(P(u)) = \operatorname{Ker}((P \wedge \mu_u)(u))$. En particulier $P(u)$ est inversible si et seulement si $P \wedge \mu_u = 1$.
3. L'ensemble $\mathcal{S} = \{\operatorname{Ker} Q(u),\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$ est en bijection avec l'ensemble des diviseurs normalisés de $\mu_u$ $\operatorname{div}(\mu_u) = \{Q \in \mathbb{K}[X],\ (Q$ unitaire ou $Q = 1)$ et $Q|\mu_u\}$. En particulier, l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{S} & \longrightarrow \operatorname{div}(\mu_u) \\ Q & \longmapsto \operatorname{Ker} Q(u) \end{cases}$$

est bijective.

4. Supposons $P \wedge \mu_u \neq 1$ et posons $v = u|_{\operatorname{Ker} P(u)}^{\operatorname{Ker} P(u)}$. On a $\mu_v = P \wedge \mu_u$ et donc, en particulier, la partie nilpotante dans l'espace caractéristique associé à $\lambda$ et d'indice de nilpotence égal à $\gamma_i = v_{X-\lambda}(\mu_u)$.

**Preuve :**

1. Ecrivons $\mu_u = PQ$ avec $Q \neq 0$ vérifiant $\deg Q < \deg \mu_u$. Si $\operatorname{Ker}(P(u)) = \{0\}$ alors étant donné que $E$ est de dimension finie, on a $P(u) \in \mathrm{GL}(E)$ et donc on a l'implication
$$0 = \mu(u) = P(u) \circ Q(u) \Longrightarrow Q(u) = 0$$
Ce qui absurde par minimalité de $\mu_u$.
2. $\supset$ : Clair
$\subset$ : Par Bezout on dispose de $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PU + \mu_u V = P \wedge \mu_u$. Prenons $x \in \operatorname{Ker}(P(u))$, alors
$$(P \wedge \mu_u)(u)(x) = U(u) \circ \underbrace{P(u)(x)}_{0} + V(u) \circ \underbrace{\mu_u(u)(x)}_{0} = 0$$
Remarquons au passage qu'une démonstration tout à fait similaire à celle ci-haut montre plus généralement que pour $P, Q$ non tous deux nuls on a
$$\operatorname{Ker}(P(u)) \cap \operatorname{Ker}(Q(u)) = \operatorname{Ker}((P \wedge Q)(u))$$
Le second résultat s'en déduit directement de ce qui précède couplé au fait qu'en dimension finie un endomorphisme est injectif si et seulement s'il est inversible.
3. Posons
$$\phi : \begin{cases} \operatorname{div}\mu_u & \longrightarrow \mathcal{S} \\ Q & \longmapsto \operatorname{Ker}(Q(u)) \end{cases}$$


(cc) BY-NC-SA

$\phi$ est bien définie et est surjective par (2). L'injection peut être faite soit à la main, soit en exhibant un inverse. On prendra la seconde option pour changer un peu : Posons

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{S} & \longrightarrow div(\mu_u) \\ F & \longmapsto \bigvee_{x \in F} \mu_{x,u} \end{cases}$$

- D'abord, c'est bien défini vu que chaque $\mu_{x,u}$ divise $\mu_u$
- Montrons que $\varphi \circ \phi = id_{div(\mu_u)}$ (ce qui permettrait d'affirmer que $\phi$ est injective et, par finitude des cardinalités, que $\varphi = \phi^{-1}$)
  - $\forall Q \in div(\mu_u)\ \ \varphi \circ \phi(Q)|Q$ : En effet, chaque element $x \in \phi(Q)$ vérifie $Q(u)(x)$ et donc $\mu_{x,u}|Q$ d'où $\varphi \circ \phi(Q)|Q$
  - Prenons $Q \in div(\mu_u) \setminus \{1\}$ ($Q = 1$ est trivial). On a alors

    $$Q = \prod_{i=1}^{s} P_i^{\beta_i}$$

    avec les $P_i$ irréductbiles unitaires disctincts et $\forall i\ \beta_i \geq 1$. Fixons $i \in [\![1; s]\!]$, on sait que $Q|\mu_u$ et donc $\beta_i \leq v_{P_i}(\mu)$. En particulier,

    $$\text{Ker}(P_i^0(u)) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker}(P_i^{\beta_i}(u))$$

    et donc on peut prendre $x \in \text{Ker}(P_i^{\beta_i}(u)) \setminus \text{Ker}(P_i^{\beta_i-1}(u))$. Il est alors clair que $x \in \phi(Q)$ et que $\mu_{x,u} = P_i^{\beta_i}$. En particulier, $\mu_{x,u} = P_i\beta_i|\varphi \circ \phi(Q)$ et donc finalement, $i$ étant arbitraire, $Q|\varphi \circ \phi(Q)$

    On conclue en se rappelant que $Q$ et $\varphi \circ \phi(Q)$ sont unitaires

Finalement, la compatibilité avec la division/inclusion provient aisement de la forme de $\phi$ et $\varphi$

4. Par ce qui précède on peut supposer $P$ unitaire avec $P|\mu_u$. Ecrivons alors

$$P = \prod_{i=1}^{s} P_i^{\beta_i}$$

avec les $P_i$ irréductbiles unitaires disctincts et $\forall i\ \beta_i \geq 1$

- Par définition $P(v) = 0$ et donc $\mu_v|P$.
- Pour montrer la réciproque, il suffit de montrer que $\forall i\ P_i^{\beta_i}|\mu_v$

  Soit alors $x \in \text{Ker}(P_i^{\beta_i}(u)) \setminus \text{Ker}(P_i^{\beta_i-1}(u))$, on a clairement $P_i^{\beta_i}(v)(x) = 0$ mais $P_i^{\beta_i-1}(v)(x) \neq 0$ et donc

  $$\mu_{x,v}|P_i^{\beta_i} \text{ mais } \mu_{x,v} \nmid P_i^{\beta_i-1}$$

  Ainsi, vu que $P_i$ est (unitaire) irréductible, ceci oblige que

  $$\mu_{x,v} = P_i^{\beta_i}$$

  et donc $P_i^{\beta_i} = \mu_{x,v}|\mu_v$


(cc) BY-NC-SA

Remarquer au passage que la remarque sur l'indice des nilpotants dans la décomposition spéctrale est aisement faisable sans.
En effet, prenons

$$u \in (E), \mu_u = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{\gamma_i}\chi_u = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$$

Notons de plus $n_i$ l'indice de nilpotence dans le bloc caractéristique de $\lambda_i$ (i.e. l'indice de nilpotence de $u_i - \lambda_i id$ où $u_i := u|_{\mathrm{Ker}(u-\lambda_i)^{\gamma_i}}^{\mathrm{Ker}(u-\lambda_i)^{\gamma_i}}$), alors

- $\forall i \; n_i \leq \gamma_i$ vu que $(u_i - \lambda_i)^{\gamma_i} = 0$ par définition
- Posons $P := \prod_{i=1}^{s} P_i^{n_i}$. Il est clair que $P(u) = 0$ (écrire dans une base adaptée aux espaces caractéristiques) et donc $\mu_u | P$ i.e. $\forall i \; \gamma_i \leq n_i$

## 2. Jordan-Dunford multiplicatif

Parfois il est plus intéréssant de travailler avec une réduction de Jordan-Dunford multiplicative au lieu d'additive, nous la présontons donc ici :

**Proposition I.2.**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in GL(E)$. Si $\chi_f$ est scindé alors il existe un unique couple $(d, u) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

1. $d$ est diagonalisable
2. $u$ est unipotent i.e. il existe $m \geq 1$ tel que $(u - id)^m = 0$
3. $f = u \circ d = d \circ u$

De plus, ce couple vérifie $(d, u) \in GL(E)^2$ et qu'il existe $(P_d, P_u) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $d = P_d(f)$ et $u = P_u(f)$

**Preuve :**

- Existence : Prenons $\lambda_1 \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de $f$ (forcément non nulles) et $\forall i \in [\![1; s]\!] \; \pi_i$ la projection sur $F_{\lambda_i}$ parallélèment à $\bigoplus_{j \neq i} F_{\lambda_j}$. On pose

$$d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \pi_i \in GL(E) \text{ et } u = d^{-1} \circ f$$

Prenons une base $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ où $\beta_i$ est une base de $F_{\lambda_i}$ et qui rend $[f]_\beta$ triangulaire supérieure

1. $d$ est clairement inversible et diagonalisable, il suffit de l'écrire dans $\beta$
2. $u$ est unipotent, il suffit de remarquer que $[u]_\beta$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous égaux à 1
3. $u$ et $d$ commutent et $f = d \circ u = u \circ d$


(cc) BY-NC-SA

4. On avait déja démontré que $\forall i \in [\![1;s]\!]\ \pi_i \in \mathbb{K}[f]$ et donc a fortiori $d \in \mathbb{K}[X]$. De plus $d^{-1} \underset{C.H.}{\in} \mathbb{K}[d] \subset \mathbb{K}[f]$ et donc $u \in \mathbb{K}[f]$ aussi

- Unicité : Prenons un autre couple $(d', u')$ vérifiant les même hypothèses et posons $g := u'^{-1}u = d'd^{-1}$.
  - $d \in \mathbb{K}[f]$ et donc $d$ et $d'$ commutent. Ainsi, en les codiagonalisant, on a que $g$ est diagonalisable
  - $u \in \mathbb{K}[f]$ et donc $u$ et $u'$ commutent. Ainsi, en les cotrigonalisant, on a que $g = u'^{-1}u$ est trigonalisable de valeurs propres des produits de valeurs propres de $u$ et $u'^{-1}$ i.e. ici exactement $\{1\}$. Par conséquent, $g$ est unipotente
  - Finalement, il est aisé de vérifier que l'unique endomorphisme unipotent et diagonalisable est $id$ ($g - id$ est nilpotent et diagonalisable et donc nul)

**Remarque :**

- La réciproque est vraie : en effet $d$ et $u$ sont tous deux trigonalisables et commutent et donc sont cotrigonalisables. Ceci permet d'affirmer que $f = u \circ d$ l'est aussi et que donc $\chi_f$ est scindé
- Dans le cas de $\mathbb{C}$, $exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ étant surjective, la décomposition multiplicative est simplement l'exponentielle de celle additive.

## 3. Le corps dans Jordan-Dunford

La démonstration de ce qui suit requiert des connaissances de théorie de Galois et donc on ne fera que mentionner la proposition

**Proposition I.3.**

Soit $K \subset \mathbb{C}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$). On sait par ce qui précède que l'on a une décomposition de Jordan-Dunford additive $A = D + N$ avec $D, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a priori (resp. multiplicative $A = DU$ avec $D, U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ a priori). $D, N$ sont en fait dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $D, U$ sont en fait dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$)
Bien entendu, $D$ (resp. $D$) n'a aucune raison d'être diagonalisable dans $\mathbb{K}$

**Exemple :** Pour le dernier point, penser à une matrice $A$ de rotation d'angle $\pi/2$, dont la décompositon de Jordan-Dunford additive est $A = A + 0$ (resp. multiplicative $A = A \cdot I_2$)
$A$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ par exemple

## 4. Polynome caractéristique produit

**Proposition I.4.**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$


(cc) BY-NC-SA

**Preuve :** Il suffit de considérer

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda\,\mathrm{Id} & -B \\ A & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & B \\ 0 & -\lambda\,\mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

et d'utiliser que $\det(AB) = \det(BA)$
**Remarque :** dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut aussi se servir de la densité des matrices inversibles et de la continuité, ceci car, si $B$ est inversible, alors $AB = B^{-1}(BA)B$

## 5. Réduction de Frobenius :

**Proposition I.5.**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une base $\beta$ de $E$ tel que

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_r} \end{pmatrix}$$

et $P_r | \dots | P_1$. De plus, toute écriture sous cette forme est unique i.e. si dans $\beta'$ $u$ a cette forme avec $Q_s | \dots | Q_1$ alors $r = s$ et $\forall i\ Q_i = P_i$.
On appelle cette réduction la réduction de Frobenius de $u$ et les $P_i$ sont appellés invariants de similitude de $u$.

**Remarque :** Il est aisé d'établir que $\mu_u = P_1$ et $\chi_u = P_1 \dots P_r$
Ce théorème permet de caractériser toutes les classes de similitudes à $\chi_A$ et $\mu_A$ fixés. Remarquons aussi qu'il affirme que $\exists x \neq 0\ \mu_{x,u} = \mu$, fait déja établi, quoique utilisé dans la preuve ci-dessous.
**Preuve :**

- Existence : Par récurence, prenons $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\mu_{x,u} = \mu_u$. Afin d'appliquer l'hypothèse de récurrence, il suffit de trouver un supplémentaire $F$ de $F_x$ stable par $u$.

  Une preuve exactement similaire à celle déja faite pour la réduction de Jordan des nilpotent fournit ce supplémentaire.

- Unicité : Prenons une autre suite $(Q_1, \dots, Q_s)$ vérifiant les mêmes hypothèses et considérons, par absurde, $i_0$ le plus petit indice tel que $P_i \neq Q_i$ (par somme des degrés et unitarité, il existe, même si $s \neq r$)

  Notons d'abord que $i_0 \geq 2$ vu que forcément $\mu_u = P_1 = Q_1$ et posons $P := P_{i_0}$. On


(cc) BY-NC-SA

a alors

$$[u]_{\beta_P} = \begin{pmatrix} P(C_{P_1}) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & P(C_{P_{i_0-1}}) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } [u]_{\beta_Q} = \begin{pmatrix} P(C_{P_1}) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & P(C_{P_{i_0-1}}) & & & \\ & & & P(C_{Q_{i_0}}) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & P(C_{Q_s}) \end{pmatrix}$$

Ceci impose que

$$rg(u) = \begin{cases} rg([u]_{\beta_P}) = rg(P(C_{P_1})) + \cdots + rg(P(C_{P_{i_0}-1})) \\ rg([u]_{\beta_Q}) = rg(P(C_{P_1})) + \cdots + rg(P(C_{P_{i_0}-1})) + rg(P(C_{Q_{i_0}})) + \cdots + rg(P(C_{Q_s} \end{cases}$$

et donc

$$rg(P(C_{Q_{i_0}})) = \cdots = rg(P(C_{Q_s})) = 0$$

En particulier

$$Q_{i_0} = \mu_{C_{Q_{i_0}}} | P = P_{i_0}$$

Similairement, on a $P_{i_0} | Q_{i_0}$ et donc, par unitarité, $P_{i_0} = Q_{i_0}$

## 6. Lemme des noyau emboîtés/itérés :

**Proposition I.6.**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, la suite

$$(u_k) = (\dim \operatorname{Ker} P^{k+1}(u) - \dim \operatorname{Ker} P^k(u))_{k \in \mathbb{N}}$$

est positive, décroissante et stationnaire en 0.

**Remarque :** Le cas fréquent d'utilisation de ce théorème est pour $P = X - \lambda$ où $\lambda$ est une valeur propre de $u$.

**Preuve :**
$(u_k)$ est clairement à termes positifs et est stationnaire en 0 car en dimension finie. Prenons $k \geq 0$, $v := P(u)$ et $f := v^k\big|_{\operatorname{Ker}(v^{k+1})}$, on démontrera la décroissance de deux manières différentes :


CC BY-NC-SA

$$\dim(\mathrm{Ker}(v^{k+1})) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(v^{k+1})) - \dim(\mathrm{Ker}(v^k) = u_k$$

D'autre part

$$rg(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(v^k(\mathrm{Ker}(v^{k+1}))) \underset{*}{=} \dim(\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(v^k))$$

Pour $(*)$ : $\subset$ est claire.
Inversement, si $x \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(v^k)$, alors $x = v^k(y)$ pour un certain $y \in E$ et donc $0 = v(x) = v^{k+1}(y)$ i.e. $x = v^k(y)$ avec $y \in \mathrm{Ker}(v^{k+1})$
Appliquonq finalement le théorème de rang à $f$

$$u_k = \dim(\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(v^k))$$

Ce dernier, étant clairement décroissant vu que $\mathrm{Im}(v^k) \supset \mathrm{Im}(v^{k+1})$, on obtient le résultat.
Remarquons qu'on pouvait utiliser les images au lieu des noyaux pour définir $f$, ce qui aurait donné une démonstration similaire mais légèrement moins calculatoire.
Pour montrer son utilité, une application directe de ce théorème est que

$$\mu_u = \chi_u \iff \forall \lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(u)\ \dim(E_{\lambda,u}) = 1$$

Ce lemme est très important car permet d'avoir une vision nettement plus clair sur le comportement des endomorphismes
En effet, pour $X - \lambda$ où $\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(u)$, le nombre $u_k$ n'est en faite que le nombre de blocs de Jordans dans $F_{\lambda,u}$ de taille $\geq k+1$ si $k \geq 0$. En particulier, pour $k = 0$, on obtient que c'est la dimension de l'espace propre associé à $\lambda$.
Ainsi, puisque la réduction de Jordan dans $\mathbb{K}$ lorsque elle existe définit la classe de similitude d'une matrice, on obtient donc le corollaire suivant :

**Proposition I.7.**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\chi_A$ ou $\chi_B$ scindés. Alors

$$A \simeq_{\mathbb{K}} B \iff \forall P \in \mathbb{K}[X]\ \dim(\mathrm{Ker}(P(A))) = \dim(\mathrm{Ker}(P(B)))$$

**Preuve :**
La preuve a déja été établie, le seul point à vérifier est qu'on peut effectivement réduire en Jordan les deux matrices sous chacune des deux propositions formant notre équivalence.
Disons aussi sans perte de généralité que $\chi_A$ est scindé.

- Si $A \simeq_{\mathbb{K}} B$ : Alors $\chi_B = \chi_A$ est scindé
- Si $\forall P \in \mathbb{K}[X]\ \dim(\mathrm{Ker}(P(A))) = \dim(\mathrm{Ker}(P(B)))$ : Alors en l'appliquant à $\chi_A$ on trouve que

$$\dim(\mathrm{Ker}(\chi_A(B)) = \dim(\mathrm{Ker}(\chi_A(A))) \underset{C.H.}{=} n$$

et donc $\mu_B | \chi_A$. En particulier $\mu_B$ est scindé et donc $\chi_B$ aussi


(cc) BY-NC-SA

**Corollaire :** Pour $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^tA \simeq_{\mathbb{K}} A$.
En effet, ceci est vrai dans $\mathbb{C}$ par la proposition ci-dessus et la généralisation à $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ se fait en passant par $\mathbb{C}$ et en utilisant que $A \simeq_{\mathbb{K}} B \iff A \simeq_{\mathbb{C}} B$ vu que $\mathbb{K}$ est infini (voir la section suivante)
Remarquons que la réduction de Jordan permet aussi d'affirmer cette propriété directement. En effet, un bloc de Jordan est aisement semblable à sa transposée (changer la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ par $(e_n, \dots, e_1)$) et donc le résultat découle immédiatement.
Ajoutons finalement une dernière propriété qui lie toute norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (en particulier la norme d'opérateur, associée à n'importe quelle norme sur $E$ $\mathbb{C}$-ev de dimension finie) au rayon spectrale

**Proposition I.8.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $||.||$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Alors
$$||A^p||^{1/p} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \rho(A) = sup\{|\lambda|,\ \lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A)\}$$

**Preuve :**
Le cas $\rho(A) = 0$ étant trivial (nilopotant), on peut supposer, après division par un $\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $|\lambda| = \rho(A)$, que $\rho(A) = 1$ et que $1 \in Spec_{\mathbb{C}}(A)$.
Ceci fournit alors l'inégalité
$$1 \leq ||A^p||^{1/p}$$
Pour l'autre inégalité, on peut :

- Le faire à la main : il suffit de remarquer que $||A^p||$ est majorée par un polynome en $p$

  Plus explicitement, considérons $B = PAP^{-1}$ une réduction de Jordan de $A$ et considérons la norme $N : M \mapsto ||PMP^{-1}||_1$. Alors, il suffit de montrer que la norme donnée par $N$ des puissances d'un bloc de Jordan (de taille $r \leq n$) auquel on a ajouté l'identité sur son espace est majorée par un polynome en $p$ (les calculs sont laissés au lecteur)

  L'équivalence des normes permet de conclure vu qu'une constante tend vers 1 lorsque mise à la puissance $1/p$.

- Utiliser un exercice précèdent : Soit $1 > \varepsilon > 0$. On sait que $Spec_{\mathbb{C}}((1-\varepsilon)A) \subset B(0,1)$ et donc $||((1-\varepsilon)A)^p|| \to 0$. En particulier, à partir d'un certain rang
$$1 \leq ||A^p|| \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} \text{ i.e. } 1 \leq ||A^p||^{1/p} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$$
  $\varepsilon$ étant arbitraire, on a le résultat

Ce résultat est surtout utilisé avec une norme d'opérateur en pratique.


(cc) BY-NC-SA

# II Changement corps

**Motivation** : Parfois on veut diagonaliser/trigonaliser/réduire en Jordan ... un endomorphisme ou une matrice mais notre corps ne nous le permet pas. Ainsi, il est interessant de savoir jongler entre ces derniers pour utiliser tous nos outils au maximum.
Dans tout ce qui suit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ sont deux corps (commutatifs).

**Proposition II.1.**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

1. $rg_{\mathbb{K}}(A) = rg_{\mathbb{L}}(A)$
2. $\mu_{A,\mathbb{K}} = \mu_{A,\mathbb{L}}$. On peut donc le noter $\mu_A$ sans mention du corps.
3. $\chi_{A,\mathbb{K}} = \chi_{A,\mathbb{L}}$. On peut donc le noter $\chi_A$ sans mention du corps.
4. Si $\mathbb{K}$ est infini, alors $A \simeq_{\mathbb{K}} B \iff A \simeq_{\mathbb{L}} B$
   En particulier, c'est toujours vrai pour $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, l'exemple typique étant si $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$

**Preuve :**

1. Posons $r := rg_{\mathbb{K}}(A)$, alors $A = PI_{r,n}Q$ où $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $I_{r,n} = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r \text{ fois}}, 0, \ldots, 0)$

   En particulier, ceci impose que $rg_{\mathbb{L}}(A) = rg(I_{r,n}) = r$

   Ce point est en fait intéréssant parce qu'il affirme que si $(X_1, \ldots, X_r)$ est une $\mathbb{K}-$base de $\mathrm{Ker}_{\mathbb{K}}(A)$, les solutions du système $AX = 0$ dans $\mathbb{K}$, alors c'est aussi une $\mathbb{L}$-base de $\mathrm{Ker}_{\mathbb{L}}(A)$, les solutions du même système dans $\mathbb{L}$

2. Remarquons d'abord que $\mu_{A,\mathbb{K}}(A) = 0$ i.e. $\mu_{A,\mathbb{L}} | \mu_{A,\mathbb{K}}$. Il suffit donc de montrer que $deg(\mu_{A,\mathbb{L}}) \geq d := deg(\mu_{A,\mathbb{K}})$ ou, équivalent, que $(id, A, \ldots, A^{d-1})$ est $\mathbb{L}-$libre.

   Considérons alors $M \in M_{n^2,d}(\mathbb{K})$ qui représente sur les $d$ matrices, une dans chaque colonne.

   On sait par ce qui précède que

$$rg_{\mathbb{L}}(M) = rg_{\mathbb{K}}(M) \underset{\mathbb{K}-\text{liberté}}{=} d$$

3. Clair vu que les opérations définissant $\chi_A$ sont faite dans $\mathbb{K}$

4. On ne donnera que la démonstration dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, celle générale y est similaire, à la différence près qu'on utilise des polynomes à plusieurs indéterminées plus quelques réctifications.

   Le sens direct étant trivial, prenons alors $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

   Ecrivons $P = U + iV$ où $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a alors

$$AP = A(U + iV) = PB = (U + iV)B$$


(cc) BY-NC-SA

et donc, en prenant les parties réelles et imaginaires :

$$AU = UB \text{ et } AV = VB$$

Posons $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = det(A + XB)$. $P \neq 0$ car $P(i) \neq 0$ et donc, en particulier, $P$ n'admet qu'un nombre fini de racines.
Considérons alors $\lambda \in \mathbb{R}$ qui ne soit pas racine de $P$, on a alors, en posant $M := A + \lambda B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A = MBM^{-1}$$

* *
*

Document compilé par Issam Tauil le 28/06/2022 pour cpge-paradise.com. Si vous repérez une erreur, ou avez des remarques, prière de me contacter via l'adresse contact@cpge-paradise.com.


(cc) BY-NC-SA