ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – C – (ULCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on notera $\lfloor y \rfloor$ la **partie entière** de y, c'est-à-dire l'unique entier relatif $\lfloor y \rfloor \in \mathbf{Z}$ tel que $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$. Pour tout sous-ensemble $A \subset \mathbf{R}$, on notera $\mathbf{1}_A$ sa fonction caractéristique.

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on notera $|z|$ le module de z. On notera $\ell^1(\mathbf{Z})$ l'ensemble des suites de nombres complexes $(z_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ telles que $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |z_k| < +\infty$.

On dira qu'une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est **périodique de période** $T > 0$ si pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x+T) = f(x)$. Dans ce problème, on supposera toujours que $T = 1$ et on dira simplement qu'une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est **périodique** si pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x+1) = f(x)$. On notera $\mathcal{C}_{\text{per}}$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continues et périodiques muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|.$$

Si $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est une fonction continue et périodique que l'on suppose de plus de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, on notera $f^{(m)}$ pour tout $m \in \mathbf{N}$, la dérivée m-ième de f qui appartient encore à l'espace $\mathcal{C}_{\text{per}}$. On rappelle qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}_{\text{per}}$ **converge uniformément** vers $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ lorsque $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on notera $e_k \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par

$$e_k(x) = \exp(2\pi i k x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on définit $c_k(f) \in \mathbf{C}$, le k-ième **coefficient de Fourier** de f, par

$$c_k(f) = \int_0^1 f(y) e_{-k}(y)\, \mathrm{d}y.$$

Pour tous $n, N \in \mathbf{N}$, on définit les fonctions $S_n(f) \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ et $\sigma_N(f) \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ par

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k \quad \text{et} \quad \sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f).$$

Le sujet est composé de cinq parties. Les résultats de la partie **I** seront utilisés dans la partie **II**. Les résultats de la partie **II** seront utilisés dans les parties **III** et **V**. Les résultats de la partie **III** seront utilisés dans la partie **IV**.

I. Préliminaires

Le but de cette partie est d'étabir des résultats préliminaires qui seront utiles dans la partie **II**.

(I.1) Soit $f : [0,1] \to \mathbf{C}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Soit $\widetilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $\widetilde{f}(x) = f(x - \lfloor x \rfloor)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\text{per}}$.

(I.2) Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

(I.3) Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $z \in \mathbf{C}$. Montrer que la suite de nombres complexes $(Z_N)_{N\in\mathbf{N}}$ definie par

$$Z_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} z_n$$

converge aussi vers z.

II. Théorème de Fejér et applications

Le but de cette partie est de démontrer le Théorème de Fejér qui affirme que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est la limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(S_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$.

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $K_N \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ par

$$K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e_k.$$

(II.1) Soit $N \in \mathbf{N}$. Montrer que

$$\int_0^1 K_N(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

(II.2) Soient $N \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Montrer que

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2.$$

(II.3) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Soient $N \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.

(II.3.a) Montrer que

$$\sigma_N(f)(x) = \int_0^1 f(y)K_N(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

(II.3.b) En déduire que

$$\sigma_N(f)(x) - f(x) = \int_0^1 (f(x-y) - f(x))K_N(y)\,\mathrm{d}y.$$

(II.4) **Théorème de Fejér**. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$.

(II.4.a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tel que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\int_0^{\delta} |f(x-y) - f(x)|K_N(y)\,\mathrm{d}y \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{1-\delta}^{1} |f(x-y) - f(x)|K_N(y)\,\mathrm{d}y \leq \varepsilon.$$

(II.4.b) Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $\kappa_{\delta,f} > 0$ (qui dépend de δ et de f) telle que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\int_{\delta}^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)| K_N(y)\,\mathrm{d}y \leq \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}.$$

(II.4.c) En déduire que la suite de fonctions $(\sigma_N(f))_{N\geq 1}$ converge uniformément vers f.

(II.5) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ une fonction que l'on suppose de plus de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

(II.5.a) Soient $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Établir une relation entre les coefficients de Fourier $c_k(f)$ et $c_k(f^{(n)})$.

(II.5.b) En déduire que $(c_k(f))_{k\in\mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z})$.

(II.5.c) Montrer que la suite de fonctions $(S_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f.

III. Équirépartition

Le but de cette partie est d'étudier l'équirépartition modulo 1 des suites de nombres réels.

Pour tout sous-ensemble fini $X \subset \mathbf{N}$, on notera $\sharp X$ le cardinal de l'ensemble X. Pour tout entier $N \geq 1$, on notera simplement $[\![1, N]\!] = \{k \in \mathbf{N} : 1 \leq k \leq N\}$. Pour tout entier $N \geq 1$, toute suite de nombres réels $(x_n)_{n\geq 1}$ et tout sous-ensemble non vide $Y \subset [0,1]$, on notera

$$\gamma(N, (x_n), Y) = \frac{1}{N} \sharp \{1 \leq n \leq N : x_n - \lfloor x_n \rfloor \in Y\}.$$

On dira qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n\geq 1}$ est **équirépartie** si pour tous $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \gamma(N, (x_n), [a,b]) = b - a.$$

(III.1) Montrer qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie si et seulement pour tous $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \gamma(N, (x_n), [a,b[) = b - a.$$

(III.2) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Pour tout entier $M \geq 1$, on notera

$$\Phi_M(f) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \sum_{j=0}^{M-1} f\left(k + \frac{j}{M}\right) \mathbb{1}_{[k+\frac{j}{M}, k+\frac{j+1}{M}[}.$$

(III.2.a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $M \geq 1$ tel que

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x) - \Phi_M(f)(x)| \leq \varepsilon.$$

(III.2.b) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels équirépartie. En déduire que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y. \qquad (*)$$

(III.3) On se propose de montrer la réciproque de la question III.2. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels qui vérifie $(*)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Soient $0 \leq a < b \leq 1$.

(III.3.a) Étant donné $\varepsilon > 0$, en vous aidant d'un dessin, construire des fonctions $f_\varepsilon^-, f_\varepsilon^+ \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ telles que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$f_\varepsilon^-(x) \leq \mathbf{1}_{[a,b]}(x) \leq f_\varepsilon^+(x)$$

et

$$\int_0^1 (f_\varepsilon^+(y) - f_\varepsilon^-(y))\,\mathrm{d}y \leq \varepsilon.$$

(III.3.b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie.

(III.4) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que pour tout $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(x_n) = 0.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie.

(III.5) Soient $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et $x \in \mathbf{R}$. Montrer que la suite $(\alpha n + x)_{n\geq 1}$ est équirépartie.

(III.6) Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $F_n \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par $F_n(x) = f(\alpha n + x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} \left\| \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} F_n \right\|_\infty = 0.$$

IV. Théorème de Weyl

Le but de cette partie est de démontrer le **Théorème de Weyl** qui affirme que pour tout polynôme de degré $d \geq 1$ à coefficients réels $P(X) = \alpha_d X^d + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\alpha_d \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, la suite de nombres réels $(P(n))_{n\geq 1}$ est équirépartie.

(IV.1) Inégalité de van der Corput. Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes tels que $|z_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Soient $1 \leq H \leq N$.

(IV.1.a) Montrer que

$$\left| \sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right| \leq H + 1.$$

(IV.1.b) Montrer que

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_n \right| \leq \frac{1}{N^{1/2}} \frac{1}{H} \left(\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.$$

(IV.1.c) En écrivant

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{h,h'=1}^{H} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=1}^{H} |z_{n+h}|^2 + 2 \sum_{n=1}^{N} \sum_{1\leq h'<h\leq H} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}},$$

et en effectuant un changement de variables approprié, montrer que

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 \leq NH + 2H \sum_{h=1}^{H} \left| \sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n} \right| + H^2(H+1).$$

(IV.1.d) En déduire que

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \leq \sqrt{2}\left(\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\right|\right)^{1/2} + \frac{1}{H^{1/2}} + \left(\frac{H+1}{N}\right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.$$

(IV.2) Lemme de van der Corput. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels tels que pour tout $h \geq 1$, la suite de nombres réels $(x_{n+h} - x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie.

(IV.3) Démontrer le **Théorème de Weyl** en raisonnant par récurrence sur le degré $d \geq 1$.

V. Approximation rationnelle et équirépartition quantitative

Le but de cette partie est d'étudier l'approximation des nombres réels par les nombres rationnels et les liens avec l'équirépartition.

On dira qu'un nombre réel α est de **Liouville** si pour tout entier $n \geq 1$, il existe un couple $(p_n, q_n) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{N} \setminus \{0, 1\})$ tel que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left(\frac{1}{q_n}\right)^n.$$

On dira qu'un nombre réel α est **algébrique** s'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbf{Q}[X]$ non constant tel que $P(\alpha) = 0$.

(V.1) Montrer qu'un nombre réel de Liouville est irrationnel.

(V.2) Théorème de Liouville.

(V.2.a) Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tel qu'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbf{Q}[X]$ irréductible à coefficients entiers de degré $d \geq 2$ tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer qu'il existe une constante $c_\alpha > 0$ (qui dépend de α) telle que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c_\alpha}{q^d} \quad \text{pour tout } (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*.$$

(V.2.b) En déduire qu'un nombre réel algébrique sur $\mathbf{Q}$ n'est pas de Liouville.

(V.2.c) Montrer que le nombre réel

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

n'est pas algébrique.

(V.3) Équirépartition quantitative. Dans cette question, on prouve une version quantitative de la convergence de la question III.6.

Soit α un nombre irrationnel qui n'est pas de Liouville. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ une fonction que l'on suppose de plus de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $F_n \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par $F_n(x) = f(\alpha n + x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Montrer qu'il existe une constante $C_{\alpha,f} > 0$ (qui dépend de α et de f) telle que

$$\left\|\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_n\right\|_\infty \leq \frac{C_{\alpha,f}}{N} \quad \text{pour tout } N \geq 1.$$

Indication : on pourra utiliser les résultats de la question II.4.

Correction du sujet X-ENS Mathématiques C 2017

Cette correction comporte certainement des erreurs et peut être améliorer. Vous pouvez me faire part de vos suggestions à l'adresse *mpeh4@free.fr*. Serge Francinou.

I. Première partie : préliminaires

1) Comme f est continue sur $[0,1]$ et $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique, continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ à valeurs dans $[0,1[$, $\tilde{f}$ est bien définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Enfin si $n \in \mathbb{Z}$, on a $\tilde{f}(n^-) = f(1) = f(0) = \tilde{f}(n^+) = \tilde{f}(n)$ et $\tilde{f}$ est continue en n et donc finalement sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f restreinte à $[-1,1]$ est continue sur un compact donc uniformément continue par le théorème de Heine. On prend $\eta < 1$ un module d'uniforme continuité de cette restriction pour ε. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y| \leqslant \varepsilon$. Supposons $x \leqslant y$ et $n = \lfloor y \rfloor$. Alors $y' = y - n \in [0,1[$ et $x' = x - n \in [-\eta, 1[\subset [-1,1]$. En particulier x' et y' sont proches à moins d'ε et ils sont dans $[-1,1]$. Il s'ensuit que

$$|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

3) Ultra classique théorème de Cesaro. On peut le démontrer en une ligne si on utilise le théorème de sommation des o : $|z_N - z| = o(1)$ et 1 est le terme général positif d'une série divergente donc $\sum_{n=0}^{N} |z_n - z| = o(N+1)$...

II. Deuxième partie : théorème de Fejér et applications

1) L'intégrale de e_k sur $[0,1]$ vaut 1 si $k = 0$ et 0 sinon. Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} 1 = 1.$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^{n} e_k(x) = e_{-n}(x)\sum_{l=0}^{2n} e_l(x) = e_{-n}(x)\frac{1-e_{2n+1}(x)}{1-e_1(x)} = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin \pi x},$$

après factorisation par le demi-angle. K_N est donc la partie imaginaire de

$$\frac{1}{(N+1)\sin \pi x}\sum_{n=0}^{N} e^{(2n+1)i\pi x} = \frac{e^{i\pi x}}{(N+1)\sin \pi x}\sum_{n=0}^{N}\left(e^{2i\pi x}\right)^n = \frac{e^{i\pi x}}{(N+1)\sin \pi x}\frac{1-e^{2i(N+1)\pi x}}{1-e^{2i\pi x}}$$

ce qui donne par factorisation par demi-angle

$$\frac{e^{i(N+1)\pi x}}{(N+1)\sin \pi x}\frac{\sin(N+1)\pi x}{\sin \pi x},$$

dont la partie imaginaire est bien $\displaystyle\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(N+1)\pi x}{\sin \pi x}\right)^2$: c'est le noyau de Fejér.

3) a. Par linéarité de l'intégrale,

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n}\int_0^1 f(y)e_k(x-y)\mathrm{d}y = \int_0^1 f(y)K_N(x-y)\mathrm{d}y.$$

b. Comme $f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x)K_N(y)\mathrm{d}y$, on a en posant $z = x - y$

$$\sigma_N(f)(x)-f(x) = -\int_x^{x-1} f(x-z)K_n(z)\mathrm{d}z - \int_0^1 f(x)K_N(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 (f(x-y)-f(x))K_N(y)\mathrm{d}y,$$

car par invariance par translation (*hors programme depuis 2014 me semble t-il ?*), $\displaystyle\int_{x-1}^{x} f(x-z)K_n(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 f(x-z)K_N(z)\mathrm{d}z$ puisque la fonction $z \longmapsto f(x-z)K_N(z)$ est 1-périodique.

4) a. Soit $\delta < 1/2$ un module d'uniforme continuité de f pour ε. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [0, \delta]$, $|f(x-y) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ et donc comme K_N est positive (I.2), on a

$$\int_0^\delta |f(x-y) - f(y)|K_n(y)\mathrm{d}y \leqslant \int_0^\delta \varepsilon K_n(y)\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon\int_0^1 K_n(y)\mathrm{d}y = \varepsilon.$$

De même si $y \in [1-\delta, 1]$, $y - 1 \in [-\delta, 0]$ et par périodicité, $|f(x-y) - f(x)| = |f(x-(y-1)) - f(x)| \leqslant \delta$ et on obtient de même l'autre inégalité.

b. Pour $\delta \leqslant y \leqslant 1-\delta$, on a $\sin \pi y \geqslant \sin \pi\delta$ si bien que $K_n(y) \leqslant \frac{1}{(N+1)\sin^2(\pi\delta)}$. Ainsi,

$$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)|K_N(y)\mathrm{d}y \leqslant \int_\delta^{1-\delta} \frac{2\|f\|_\infty}{(N+1)\sin^2(\pi\delta)}\mathrm{d}y \leqslant \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1},$$

avec $\kappa_{\delta,f} = \dfrac{2\|f\|_\infty}{\sin^2(\pi\delta)}$.

c. On fixe $\varepsilon > 0$ et l'on prend δ comme en 4)a. On a par découpage de l'intégrale par la relation de Chasles

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leqslant \int_0^1 |f(x-y) - f(x)|K_N(y)\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon + \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}.$$

Il existe n_0 tel que si $N \geqslant n_0$, on a $\dfrac{\kappa_{\delta,f}}{N+1} \leqslant \varepsilon$. Ainsi si $N \geqslant n_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui prouve la convergence uniforme de $(\sigma_N(f))_N$ vers f.

5) a. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a par intégration par parties

$$c_k(f') = \int_0^1 f'(y)e^{-2ik\pi y}\mathrm{d}y = \left[f(y)e^{-2ik\pi y}\right]_0^1 + 2ik\pi\int_0^1 f(y)e^{-2ik\pi y}\mathrm{d}y = 2ik\pi c_k(f).$$

Par récurrence immédiate, $c_k(f^{(n)}) = (2ik\pi)^n c_k(f)$.

b. On a $|c_k(f)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y \leqslant \|f\|_\infty$. Avec $n = 2$ dans l'égalité précédente, on a donc $|c_k(f)| \leqslant \dfrac{\|f''\|_\infty}{4\pi^2k^2}$ pour $k \neq 0$ et par comparaison, la famille des $c_k(f)$ est sommable.

c. Posons $g = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)$. Les séries de fonctions $\sum c_k(f)e_k$ et $\sum c_{-k}(f)e_{-k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (et donc uniformément) puisque $|c_k(f)e_k| \leqslant |c_k(f)|$ (resp. $|c_{-k}(f)e_{-k}| \leqslant |c_{-k}(f)|$) qui est le terme général d'une série convergente. Par le théorème de Cesaro (I.3)), la moyenne des $S_n(f)(x)$ converge donc vers $g(x)$ aussi. Mais aussi vers f par 4). On en déduit que $f = g$ et que la suite de fonction $S_n(f)$ converge uniformément vers f.

III. Troisième partie : équirépartition

Il manque un "si" dans la définition de l'équirépartition.

1) La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ étant supposée fixée, on notera $\gamma_N(Y)$ au lieu de $\gamma(N,(x_n),Y)$: c'est la proportion des termes de la suite parmi les N premiers qui modulo 1 tombent dans la partie Y. Dans cette question on veut montrer qu'on peut remplacer les segments par des intervalles semi-ouverts dans la définition de l'équirépartition.

• Soit $a < b < 1$. On a alors $\gamma_N([a,b[) = \gamma_N([a,1]) - \gamma_N(b,1)$ qui tend par définition vers $1-a-(1-b) = b-a$. Pour montrer que cela reste encore vrai dans le cas $b=1$ il suffit de prouver que $\gamma_N(\{1\})$ tend vers 0. Cela se fait en quantifiant. Soit $\varepsilon > 0$. L'intervalle $[1-\varepsilon, 1]$ contient le singleton $\{1\}$. On a alors $\gamma_N(\{1\}) \leqslant \gamma_N([1-\varepsilon,1])$ pour tout N et le majorant tend vers ε lorsque $N \to +\infty$. Il existe donc un rang N_0 à partir duquel $\gamma_N(\{1\}) \leqslant 2\varepsilon$. D'où le résultat.

• On fait de même dans l'autre sens en encadrant un segment $[a,b]$ quelconque entre $[a,b[$ et $[a,b+\varepsilon[$ pour $\varepsilon > 0$ petit et en traitant à part le cas $b=1$ où il suffit de majorer par 1.

2) a. Soit η un module d'uniforme continuité de f pour ε. Il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{M} \leqslant \eta$. Dans ces conditions, pour $x \in \mathbb{R}$, si k est sa partie partière et si $j/M \leqslant x < (j+1)/M$, $\Phi_M(f)(x) = f(k+j/M)$. Comme x et j/M sont proches à moins de $1/M \leqslant \eta$, on a $|f(x) - \Phi_M(x)| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, on obtient bien $\|f - \Phi_M(f)\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

b. On remarque que $\Phi_M(f)$ s'écrit en fait $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{M-1} f(j/M)1_{[j/M,(j+1)/M[} = \sum_{j=0}^{M-1} f(j/M)h_{j,M}$, avec $h_{j,M} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 1_{[j/M,(j+1)/M[}$ par périodicité de f.

On va commencer par démontrer $(*)$ pour une fonction $f_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{M-1} 1_{[a,b[}$ où $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$. D'une part l'intégrale de f_0 sur $[0,1]$ vaut $b-a$. D'autre part,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \gamma(N,(x_n),[a,b[)$$

qui tend bien vers $b - a = \displaystyle\int_0^1 f_0$.

Par linéarité de la moyenne et de l'intégrale, $(*)$ reste vraie pour $\Phi_M(f)$.

Passons à f. Soit $\varepsilon > 0$. On considère l'entier M de 2)b. On a alors

$$\left|\int_0^1 f - \int_0^1 \Phi_M(f)\right| \leqslant \int_0^1 |f - \Phi_M(f)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et}$$

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n)\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|f(x_n) - \Phi_M(f)(x_n)| \leqslant \varepsilon.$$

En écrivant

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n) + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n) - \int_0^1 \Phi_M(f) + \int_0^1 \Phi_M(f) - \int_0^1 f,$$

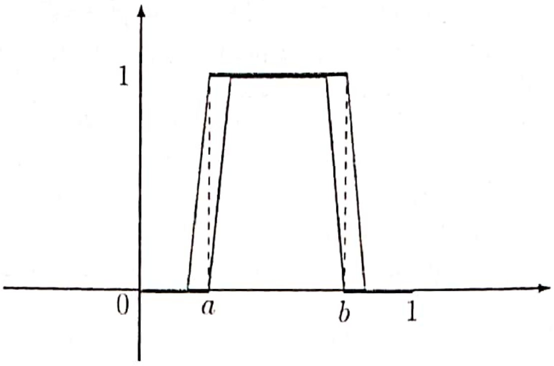
on obtient par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f\right| \leqslant \varepsilon + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_M(f)(x_n) - \int_0^1 \Phi_M(f)\right| + \varepsilon,$$

et pour N assez grand,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f\right| \leqslant 3\varepsilon.$$

3) a. Il est facile de construire des fonctions f_ε^+ et f_ε^- affines par morceaux vérifiant toutes les conditions.



b. Notons $\mu_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)$ pour $f \in \mathcal{C}_{per}$. Soit $\varepsilon > 0$. On remarque que $\gamma(N,(x_n),[a,b]) = \mu_N(1_{[a,b]})$. On en déduit que

$$\mu_N(f_\varepsilon^-) \leqslant \gamma(N,(x_n),[a,b]) \leqslant \mu_N(f_\varepsilon^+).$$

Étant donné les limites des membres de droite et de gauche, à partir d'un certain rang,

$$\int_0^1 f_\varepsilon^- - \varepsilon \leqslant \gamma(N,(x_n),[a,b]) \leqslant \int_0^1 f_\varepsilon^+ + \varepsilon.$$

Or les deux intégrales sont proches de $\int_0^1 1_{[a,b]} = b-a$ à moins de ε par construction. Donc à partir d'un certain rang, on a

$$b-a-2\varepsilon \leqslant \gamma(N,(x_n),[a,b]) \leqslant b-a+2\varepsilon.$$

Au final, $\gamma(N,(x_n),[a,b])$ converge vers $b-a$ et (x_n) est bien équirépartie.

4) On va utiliser le critère précédent. L'assertion $(*)$ est vrai pour tout polynôme trigonométrique de période 1 (par linéarité sur l'hypothèse, le cas $k=0$ étant trivialement vérifié). Or, les polynômes trigonométriques sont denses dans $(\mathcal{C}_{per}, \|\ \|_\infty)$ en vertu de la question II4)c. Soit $f \in \mathcal{C}_{per}$ et $\varepsilon > 0$. On se donne P polynôme trigonométrique approchant f à moins de ε de manière uniforme sur $\mathbb{R}$. On écrit

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n) + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n) - \int_0^1 P(f) + \int_0^1 P - \int_0^1 f.$$

Comme

$$\left|\int_0^1 f - \int_0^1 P\right| \leqslant \int_0^1 |f-P| \leqslant \varepsilon \quad \text{et}$$

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n)\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(x_n) - P(x_n)| \leqslant \varepsilon,$$

on obtient par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f\right| \leqslant \varepsilon + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n) - \int_0^1 P\right| + \varepsilon,$$

et donc pour N assez grand,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f\right| \leqslant 3\varepsilon,$$

et $(*)$ est vraie pour f : la suite (x_n) est bien équirépartie.

5) On va utiliser la question précédente. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$ et calculons

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2ik\pi\alpha n + 2ik\pi x) = \frac{\exp(2ik\pi x)}{N}\frac{1-\exp(2i(N+1)k\pi\alpha)}{1-\exp(2ik\pi\alpha)},$$

avec $\exp(2ik\pi\alpha) \neq 1$ car $2\pi k\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$ puisque α est irrationnel. En passant au module, il vient

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2ik\pi\alpha n + 2ik\pi x)\right| \leqslant \frac{2}{|1-\exp(2ik\pi\alpha)|N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

La suite $(\alpha n + x)$ est donc bien équirépartie.

6) On remarque avec la majoration précédente que

$$\left\|\int_0^1 e_k - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e_k(\alpha n + .)\right\|_\infty \leqslant \frac{2}{|1-\exp(2ik\pi\alpha)|N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Si $k = 0$, la norme infinie est nulle. On en déduit par linéarité et inégalité triangulaire que si P est un polynôme trigonométrique et $P_n(x) = P(\alpha n + x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to+\infty}\left\|\int_0^1 P - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_n\right\|_\infty = 0.$$

Si P est un polynome trigonométrique approchant f de manière uniforme à ε près,

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^1 f - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_n\right\|_\infty &\leqslant \left\|\int_0^1 f - \int_0^1 P\right\|_\infty + \left\|\int_0^1 P - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_n\right\|_\infty + \left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_n\right\|_\infty \\ &\leqslant \varepsilon + \left\|\int_0^1 P - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_n\right\|_\infty + \varepsilon = 2\varepsilon + \left\|\int_0^1 P - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_n\right\|_\infty\end{aligned}$$

et donc pour N assez grand,

$$\left\|\int_0^1 f - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_n\right\|_\infty \leqslant 3\varepsilon.$$

C'est ce qu'on voulait.

IV. Quatrième partie : théorème de Weyl

1) a. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h} &= (z_2 + \cdots + z_{H+1}) + (z_3 + \cdots + z_{H+2}) + \cdots + (z_{N+1} + \cdots + z_{N+H}) \\ &= z_2 + 2z_3 + (H-1)z_H + Hz_{H+1} + \cdots + Hz_{N+1} + (H-1)z_{N+2} + \cdots + z_{N+H}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{N} z_n - \sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h} = \frac{1}{H}\left(Hz_1 + (H-1)z_2 + \cdots + z_H - Hz_{N+1} - \cdots - 2z_{N+H-1} - z_{N+H}\right).$$

En passant au module, les $|z_n|$ étant inférieur à 1, on obtient par inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z_n - \sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right| \leqslant \frac{2}{H}\sum_{k=1}^{H} k = H+1.$$

b. On écrit

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n = \frac{1}{NH}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h} + \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{NH}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right)$$

Compte tenu de l'inégalité de la question précédente, on a par inégalité triangulaire

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \leqslant \frac{1}{NH}\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right| + \frac{H+1}{N}.$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{N} 1^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2\right)} = \sqrt{N}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2\right)^{1/2},$$

ce qui donne bien l'inégalité proposée.

c. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2 &= \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right)\overline{\left(\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right)} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{1\leqslant h,h'\leqslant H} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{1\leqslant h\leqslant H} z_{n+h}\overline{z_{n+h}} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{1\leqslant h,h'\leqslant H\\ h\neq h'}} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} |z_{n+h}|^2 + \sum_{n=1}^{N}\sum_{1\leqslant h<h'\leqslant H} \left(z_{n+h}\overline{z_{n+h'}} + z_{n+h'}\overline{z_{n+h}}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} |z_{n+h}|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{1\leqslant h<h'\leqslant H} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}}\right) \\
&\leqslant NH + 2\left|\sum_{n=1}^{N}\sum_{1\leqslant h<h'\leqslant H} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}}\right|
\end{aligned}$$

Travaillons sur $\sum_{n=1}^{N} \sum_{1\leqslant h<h'\leqslant H} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}}$. On a en posant $k=h'-h$, puis $m=n+h'$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \sum_{1\leqslant h<h'\leqslant H} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}} &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{h'=1}^{H-1}\sum_{k=1}^{H-h'} z_{n+h'+k} z_{n+h'} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=n+1}^{n+H-1}\sum_{k=1}^{H-(m-n)} z_{m+k}\overline{z_m} \\
&= \sum_{k=1}^{H-1}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=n+1}^{n+H-k} z_{m+k}\overline{z_m} \\
&= \sum_{k=1}^{H-1}\sum_{m=2}^{N+H-k}\sum_{n=m-(H-k)}^{m-1} z_{m+k}\overline{z_m} \\
&= \sum_{k=1}^{H-1}(H-k)\sum_{m=2}^{N+H-k} z_{m+k}\overline{z_m} \\
&= \sum_{k=1}^{H-1}(H-k)\sum_{m=1}^{N+H-k} z_{m+k}\overline{z_m} - \sum_{k=1}^{H-1}(H-k)z_{1+k}\overline{z_1} \\
&= \sum_{k=1}^{H-1}(H-k)\sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\overline{z_m} - \sum_{k=1}^{H-1}(H-k)z_{1+k}\overline{z_1} + \sum_{k=1}^{H-1}(H-k)\sum_{m=N+1}^{N+H-k} z_{m+k}\overline{z_m}
\end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{N} \sum_{1\leqslant h<h'\leqslant H} z_{n+h}\overline{z_{n+h'}}\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{H-1}(H-k)\left|\sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\overline{z_m}\right| + \sum_{k=1}^{H-1}(H-k) + \sum_{k=1}^{H-1}(H-k)\underbrace{\sum_{m=N+1}^{N+H-k} 1}_{=H-k} \\
&\leqslant (H-1)\sum_{k=1}^{H-1}\left|\sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\overline{z_m}\right| + \sum_{l=1}^{H-1} l + \sum_{l=1}^{H-1} l^2 \text{ en posant } l=H-k, \\
&\leqslant (H-1)\sum_{k=1}^{H-1}\left|\sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\overline{z_m}\right| + \frac{H(H-1)(2H+2)}{6} \\
&\leqslant (H-1)\sum_{k=1}^{H-1}\left|\sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\overline{z_m}\right| + \frac{H(H^2-1)}{3}
\end{aligned}$$

d. Comme pour a,b positifs, $\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$, on a à partir du résultat de la question 1)b

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right| &\leqslant \frac{1}{H^{1/2}} + \left(2\frac{H-1}{NH^2}\sum_{k=1}^{H-1}\left|\sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\overline{z_m}\right|\right)^{1/2} + \left(\frac{2H(H^2-1)}{NH^2}\right)^{1/2} + \frac{H+1}{N} \\
&\leqslant \frac{1}{H^{1/2}} + \sqrt{2}\left(\frac{1}{H}\sum_{k=1}^{H-1}\left|\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\overline{z_m}\right|\right)^{1/2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\frac{H^{1/2}}{N^{1/2}} + \frac{H+1}{N}
\end{aligned}$$

2) Fixons $k\in\mathbb{Z}^*$. Posons pour $n\geqslant 1$, $z_n=e_k(x_n)$. Si $h\geqslant 1$ remarquons que $z_{n+h}\overline{z_n} =$

$e_k(x_{n+h}-x_n)$. Par hypothèse, nous avons donc en vertu de III.2)b appliquée à $f=e_k$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\overline{z_m}=0.$$

Soit $\varepsilon>0$. Comme les z_n sont de module 1, l'inégalité de la question précédente s'applique. Fixons H tel que $\frac{1}{H^{1/2}}\leqslant\varepsilon$. Pour N tendant vers 0, la quantité $\sqrt{2}\left(\frac{1}{H}\sum_{k=1}^{H-1}\left|\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\overline{z_m}\right|\right)^{1/2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\frac{H^{1/2}}{N^{1/2}}+\frac{H+1}{N}$ tend vers 0. Pour N assez grand, on a donc $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right|\leqslant\frac{1}{H^{1/2}}+\varepsilon\leqslant 2\varepsilon$. La quantité $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n$ converge donc vers 0 et d'après la quastion III.4), la suite (x_n) est équirépartie.

3) Procédons par récurrence sur le degré d. Le résultat pour $d=1$ a été prouvé à la question III.5). Si $d\geqslant 2$. On va utiliser la question précédente pour faire chuter le degré. Soit $h\geqslant 1$. Posons $x_n=P(n)$ et $y_n=x_{n+h}-x_n=P(n+h)-P(n)=Q(n)$ avec $Q(X)=P(X+h)-P(X)$. Le polynôme Q est de dégré $d-1$ et son coefficient dominant est $dh\alpha_d$ qui est toujours irrationel. Par hypothèse de récurrence, la suite (y_n) est donc équirépartie. On conclut avec la question précédente que (x_n) est équirépartie.

V. Cinquième partie : approximation rationnelle et équirépartition quantitative

1) Soit $\alpha=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ et supposons que α soit de Liouville. Soit $(p_n)_{n\geqslant 1},(q_n)_{n\geqslant 1}$ des suites associées à α. On a alors pour tout n

$$0<\left|\frac{a}{b}-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^n}$$

Comme $|aq_n-bp_n|$ est un entier non nul il est supérieur ou égal à 1. On a donc $\frac{1}{bq_n}<\frac{1}{q_n^n}$ puis

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{q_n^{n-1}}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$$

ce qui est absurde puisque la suite de droite tend vers 0.

a. Comme P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (l'énoncé devrait préciser...) et de degré $\geqslant 2$ il ne peut avoir de racine rationnelle. Quitte à multiplier P par un entier non nul idoine on va supposer que P est à coefficients entiers. On a alors $P\left(\frac{p}{q}\right)$ de la forme $\frac{A}{q^d}$ avec $A\in\mathbb{Z}^*$ et donc $\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right|\geqslant\frac{1}{q^d}$ pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{N}$. Notons $M=\sup_{[\alpha-1,\alpha+1]}|P'(x)|$. D'après le théorème des accroissements finis, pour un rationnel $\frac{p}{q}$ qui est dans $[\alpha-1,\alpha+1]$ on a

$$\frac{1}{q^d}\leqslant\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|P(\alpha)-P\left(\frac{p}{q}\right)\right|\leqslant M\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$$

Si $\frac{p}{q}$ n'est pas dans l'intervalle $[\alpha-1,\alpha+1]$ alors $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geqslant 1\geqslant\frac{1}{q^d}$.

Bref, la constante $c_\alpha=\min\left(1,\frac{1}{M}\right)$ répond à la question.

b. Soit α un nombre réel algébrique. Si $\alpha\in\mathbb{Q}$ on a vu dans la question V.1 que α n'est pas de Liouville. Si α n'est pas rationnel il annule un polynôme irréductible de degré $\geqslant 2$ et on peut utiliser la question précédente. Supposons alors que α est de Liouville et considérons des suites $(p_n)_{n\geqslant 1}, (q_n)_{n\geqslant 1}$ associées. On a pour tout n,

$$\frac{c_\alpha}{q_n^d} < \frac{1}{q_n^n}$$

ce qui est encore impossible pour n assez grand.

c. Il suffit de prouver que α est un nombre de Liouville! Posons $\sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{k!}} = \frac{p_n}{q_n}$ avec $q_n = 10^{n!}$. On a déjà $\frac{p_n}{q_n} < \alpha$ et on va majorer la différence $\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}$. Or, pour $k \geqslant n+1$ on a $k! \geqslant n!k$. Ainsi,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!k}} = \frac{1}{10^{n!(n+1)}} \frac{1}{1-10^{-n!}} < \frac{1}{10^{nn!}} = \frac{1}{q_n^n}$$

2) D'après II.5.c la fonction f est somme de sa série de Fourier qui converge uniformément (et même normalement) sur $\mathbb{R}$: $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e_k$. On a $\int_0^1 f = c_0(f)$ et

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N F_n(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e_k(x)e_k(\alpha n) = \frac{1}{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(c_k(f)e_k(x)\sum_{n=1}^N e_k(\alpha n)\right)$$

(somme finie de séries absolument convergentes). Pour $k=0$ on retrouve $c_0(f)$ et on doit donc majorer :

$$\left|\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N F_n(x)\right| = \frac{1}{N}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left(c_k(f)e_k(x)\sum_{n=1}^N e_k(\alpha n)\right)\right|$$

On peut majorer par inégalité triangulaire par

$$\frac{1}{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|c_k(f)|\left|\sum_{n=1}^N e_k(\alpha n)\right|$$

On va voir que ce terme est fini. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique on a

$$\left|\sum_{n=1}^N e_k(\alpha n)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin k\pi\alpha|}$$

On introduit un entier p_k tel que $k\pi\alpha - p_k\pi$ soit dans $[-\pi/2, \pi/2]$ et on utilise la minoration $|\sin x| \geqslant \frac{2}{\pi}|x|$ valable sur cet intervalle. Comme α n'est pas de Liouville il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ on a $|\alpha - p/q| \geqslant \frac{1}{q^d}$. On a alors

$$\frac{1}{|\sin k\pi\alpha|} \leqslant \frac{1}{|\sin(k\pi\alpha - p_k\pi)|} \leqslant \frac{\pi}{2|k\pi\alpha - p_k\pi|} \leqslant \frac{|k|^d}{2|k|}$$

Or comme f est de classe C^∞ la suite $(|c_k(f)|k|^{d-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable ce qui permet de conclure.