Les théorèmes de Riemann sur les séries trigonométriques (X 1976)

8 octobre 2016

Les parties I et II sont indépendantes.

1 Etude d'une série en $\sin c$

1.1

Dans tout ce qui suit, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série de nombre réels convergente. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on désigne par U_n l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue et telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}^*$ on ait

$$U_n(t) = u_n \frac{\sin^2 nt}{n^2t^2}.$$

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, la série $\sum U_n(t)$ converge. On désigne par $S(t)$ sa somme.

b) Montrer que S est continue sur $\mathbf{R}^*$.

1.2

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on note $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ et l'on pose pour $t \in \mathbf{R}$

$$R_n(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} U_k(t).$$

a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) dx|$ converge.

b) Montrer que, pour tout nombre réel $t > 0$, la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |r_{k+1}| \int_{kt}^{(k+1)t} |\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)| dx$$

converge et que l'on a

$$|R_n(t)| \leq | r_n| + \sum_{k=n}^{+\infty} |r_{k+1}| \int_{kt}^{(k+1)t} |\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)|$$

On pourra écrire $u_n = r_n - r_{n+1}$ et effectuer une transformation d'Abel.

1.3

Montrer que la série définissant S converge uniformément sur $\mathbf{R}$, puis que S est continue sur $\mathbf{R}$.

1.4

Soient un nombre réel $t > 0$ et N le plus petit entier $\geq \frac{1}{t}$. En majorant séparément $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2 nt}{n^2}$ et $\sum_{n \geq N+1} \frac{\sin^2 nt}{n^2}$ montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nt}{n^2} \leq 2t + t^2$.

1.5

Soit v_n une suite de nombres réels convergeant vers 0. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on désigne par V_n l'application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie sur $\mathbf{R}^*$ par $V_n(t) = v_n \frac{\sin^2 nt}{n^2 t}$.

a) Vérifier que $\sum V_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$, soit V sa somme .

b) Montrer avec I-4) que le reste de $\sum V_n$ tend uniformément vers 0 sur tout compact de $\mathbf{R}$ et que V est continue.

2 Un théorème de Hermann Schwarz

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbf{R}$ d'intérieur J, E l'algèbre des fonctions continues de I dans $\mathbf{R}^+$, E' l'algèbre des application de J dans $\mathbf{R}$. Pour $f \in E$, $x_0 \in J$ et $h > 0$ tels que l'on ait $[x_0 - h, x_0 + h] \subset I$ on pose

$$\Delta f(x_0, h) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)].$$

Si, f et x_0 étant fixés, $\Delta f(x_0, h)$ admet une limite finie quand h tend vers 0^+ on désignera cette limite par $f^{('')}(x_0)$ et on dira que $f^{('')}(x_0)$ est la pseudo-dérivée seconde de f en x_0.

2.1

Soient $f \in E$ et $x_0 \in J$ tels que f admette une dérivée seconde au sens ordinaire (notée f'') sur un intervalle ouvert contenant x_0 et contenu dans I ; montrer que f admet en x_0 une pseudo-dérivée seconde et que l'on a $f^{('')}(x_0) = f''(x_0)$.

2.2

Etant donné un élément x_0 de J trouver $f \in E$ admettant en x_0 une pseudo-dérivée seconde et n'admettant pas en ce point de dérivée seconde au sens ordinaire (pour I.H : la fonction nulle ne convient pas).

2.3

Soient $f \in E$ et $x_0 \in J$ tels que f admette une pseudo-dérivée seconde en x_0. Etudier le signe de $f^{('')}(x_0)$ dans le cas où f admet un maximum en x_0 et dans le cas où f admet un minimum en x_0.

2.4

On désigne par E_1 le sous-espace vectoriel formé des éléments de E admettant une pseudo-dérivée seconde en tout point de J. Lorsque $f \in E_1$ on désigne par $f^{('')}$ l'application $x \to f^{('')}(x)$ de J dans $\mathbf{R}$. On notera alors d l'application de E_1 dans E' définie pour $f \in E_1$ par $d(f) = f^{('')}$.

2.5

On se propose de montrer que le noyau de d est constitué par l'espace vectoriel V_1 fonctions polynômes de degré ≤ 1.

a) Vérifier que $V_1 \subset \ker(d)$.

b) Soient $f \in \ker(d)$, $a < b$ deux points de I ; pour $\varepsilon > 0$ et $i \in \{1, 2\}$ on désigne par $\phi_{\varepsilon,i}$ l'application définie pour $x \in I$ par

$$x \to f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + (-1)^i \varepsilon (x - a)(b - x).$$

Calculer la pseudo-dérivée seconde de $\phi_{\varepsilon,i}$ sur $[a, b]$ et étudier avec II-3) son signe aux extrema de $\phi_{\varepsilon,i}$ dans $]a, b[$, s'il y en a . En déduire le signe de $\phi_{\varepsilon,i}$ sur $[a, b]$, et montrer alors que $f \in V_1$.

3 Premier théorème de Riemann

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels bornées ; x étant une variable réelle, on envisage la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_0 = \frac{a_0}{2}$ et, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

3.1

Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la série

$$\frac{a_0}{4}x^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge. Soit F sa somme, vérifier que F est continue sur $\mathbf{R}$.

Calculer alors, lorsque $n \in \mathbf{N}^*$, $\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx$.

3.2

Soit x_0 un nombre réel tel que $\sum f_n(x_0-$ converge. Montrer que

$$\Delta F(x_0, h) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)\frac{\sin^2(\frac{nh}{2})}{n^2(\frac{h}{2})^2}$$

et en déduire que F possède une pseudo-dérivée seconde en x_0 que l'on explicitera.

3.3

Montrer que, si en tout point de $[-\pi, \pi]$ la série $\sum f_n$ converge de somme nulle, les suites a_n et b_n sont nulles.

4 Extension et application

4.1

On reprend les notations de la partie 2. Soient $A = \{x_1 < \ldots < x_m\}$ un sous-ensemble fini non vide de J, et $f \in E$ admettant en tout point de $J \setminus A$ une pseudo-dérivée seconde nulle et telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $h\Delta f(x_i, h)$ tende vers 0 lorsque h tend vers 0. Montrer que $f \in V_1$.

4.2

Soient $f \in E_1$ tel qu'il existe des nombres réels m et M tels que

$$m \leq f^{('')} \leq M.$$

Soient $x_0 \in J$ et $h > 0$ tels que $[x_0 - h, x_0 + h] \subset J$, P la fonction polynôme de degré ≤ 2 telle que $P(x_0 - h) = f(x_0 - h)$, $P(x_0) = f(x_0)$, $P(x_0 + h) = f(x_0 + h)$. En utilisant II-3) et le calcul de la pseudo-dérivée seconde de $f - P$ montrer que

$$m \leq \Delta f(x_0, h) \leq M$$

4.3

On reprend les notations de la partie III. Soit B un sous-ensemble fini et non vide de $]-\pi, \pi[$, on suppose qu'en tout point de $[-\pi, \pi] \setminus B$ la série $\sum f_n$ converge de somme nulle.

a) (Hors composition, sera prouvé en cours) En utilisant le théorème de convergence bornée, montrer que a_n et b_n convergent vers 0.

b) Prouver que, pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$, $h\Delta F(x_0, h)$ tend vers 0.

c) Prouver que les suites a_n et b_n sont nulles.

4.4

Dans cette question, on suppose que la série $\sum f_n$ converge en tout point de $\mathbf{R}$, on note g sa somme, et l'on suppose que g est continue.

a) Montrer que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$ et tout $h \in]0, +\alpha]$ on ait

$$|\Delta F(x_0, h) - g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

b) En déduire que l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta F(x, h) - g(x)| dx$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Montrer que l'on a alors :
$\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx$.

X 1976 1ère

I - 1°) U_n est naturellement prolongée par :

$$U_n(0) = u_n .$$

Pour $r = 0$, la série converge par hypothèse ; sinon, (u_n) étant bornée : $U_n(t) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui assure la convergence absolue, donc la convergence puisque $\mathbb{R}$ est complet.

I - 2°) * (r_n) tend vers 0, donc est bornée. De plus

$$\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right| = \left| - \frac{2\sin^2 x}{x^3} + \frac{2\sin x \cos x}{x^2}\right| \leq 2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\int_{kt}^{(k+1)t} \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right| dx \leq 2\left(\frac{1}{k^2t^2}+\frac{1}{k^3t^3}\right)$$ terme général d'une série convergente, donc $\sum |r_{k+1}| \int_{kt}^{(k+1)t} \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right| dx$ converge

** Observons aussi que, pour $x \neq 0$, $\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$ possède, en tant que série entière de rayon $+\infty$, un prolongement C^∞ en 0. Donc $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ possède un prolongement C^∞ en 0, avec ce qui précède :

$$(\bullet) \quad \int_0^{+\infty} \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right| dx \text{ converge.}$$

*** Soit $m > n$, il vient

$$\sum_{k=n}^{m} u_k \frac{\sin^2 kt}{k^2t^2} = \sum_{k=n}^{m} (r_k - r_{k+1})\alpha_k \qquad \alpha_k = \frac{\sin^2 kt}{k^2t^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \sum_{k=n}^{m} r_k\alpha_k - \sum_{k=n+1}^{m+1} r_k \alpha_{k-1} \\ &= r_n\alpha_n - r_{m+1}\alpha_m + \sum_{k=n+1}^{m} r_k(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \end{aligned}\right\} \text{ABEL}$$

avec $$|\alpha_k - \alpha_{k+1}| = \left|\int_{(k-1)t}^{kt} \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)dx\right|$$

$$\leq \int_{(k-1)t}^{kt} \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right| dx$$

ce qui donne la convergence de $\sum r_k(\alpha_k - \alpha_{k+1})$.

Faisons tendre $n \to +\infty$:

$$R_n(t) = r_n \alpha_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k(\alpha_k - \alpha_{k-1})$$

puis $$|R_n(t)| \leq |r_n| + \sum_{k=n}^{+\infty} |r_{k+1}| \int_{kt}^{(k+1)t} \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right| dx \quad (\alpha_n \leq 1)$$

I - 3°) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad |r_n| \leq \varepsilon$$

L'inégalité ci-dessus donne alors :

$$\forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad |R_n(t)| \leq \varepsilon\left(1 + \int_0^{+\infty} \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right| dx\right)$$

ce qui amène la convergence uniforme de R_n vers 0, et la continuité de S.

I - 4°) Pour $t \geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nt}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{6} < 3 \leq 2t + t^2$.

Pour $t < 1$ on choisit $n_0 \geq 2$ tel que $n_0 - 1 < \frac{1}{t} \leq n_0$

et l'on dit que :

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{\sin^2 nt}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|\sin nt|^2}{n^2} \leq t^2 \sum_{n=1}^{n_0} 1 = (tn_0)t \leq (1+t)t = t + t^2$$

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nt}{n^2} \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n_0} \leq t$$

en sommant, l'inégalité vient.

I - 5°) La suite (v_n) étant bornée, la série est absolument convergente. Notons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n(0) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|v_n| \leq \varepsilon$.

De là, pour tout $t > 0$ et tout $n \geq n_\varepsilon$

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \frac{\sin^2 kt}{k^2 t}\right| \leq \frac{\varepsilon}{t} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nt}{n^2} \leq \frac{\varepsilon}{t}(2t + t^2) = 2\varepsilon + t$$

Cette inégalité montre que $\sum V_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$, d'où la continuité de V.

X 761 1ère (

II - 1°) Il s'agit d'une application classique de la formule de Taylor-Young.
Comme $x_0 \in J$, $x_0 - h$ et $x_0 + h$ sont dans J pour h assez petit et :

$$\begin{cases} f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + h^2 \varepsilon_1(h) \\ f(x_0-h) = f(x_0) - h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + h^2 \varepsilon_2(h) \end{cases}$$

De là si $h \neq 0$:

$$\Delta^2 f(x_0, h) = f''(x_0) + (\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h))$$

tend vers $f''(x_0)$ lorsque h tend vers 0 □

II - 2°) Il suffit de prendre $J = I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ et f impaire, par exemple $f(x) = x|x|$:
$\forall h \neq 0$, $\exists \Delta f(0,h) = 0$ donc $\exists f^{(4)}(0) = 0$ mais
$f''(0^+) = 2$, $f''(0^-) = -2$.

II - 3°) Clairement :
— Si x_0 est un maximum local, $f^{(4)}(x_0) \leqslant 0$
— Si x_0 est un minimum local, $f^{(4)}(x_0) \geqslant 0$.

II - 4°) Il s'agit d'une simple application de la compatibilité des limites avec les opérations.

II - 5°) - a) Avec cette question, personne n'a zéro.
b) Compte-tenu des questions précédentes, pour $x_0 \in J$

$$\varphi^{\wedge}_{,i}(x_0) = f^{(4)}(x_0) - 0 + (-1)^{(+1)} . 2\varepsilon = 2(-1)^{(+1)}\varepsilon .$$

Prenons $\underline{i=1}$, d'où $\varphi''_{\varepsilon,i}(x_0) = 2\varepsilon$.
Observons aussi : $\varphi_{\varepsilon,i}(a) = \varphi_{\varepsilon,i}(b) = 0$.

S'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $\varphi_{\varepsilon,1}(x_0) > 0$, la fonction continue $\varphi_{\varepsilon,1}$ possède un maximum >0 sur $[a,b]$, atteint en $x_0 \in]a,b[$, avec II-3° il vient $\varphi_{\varepsilon,1}^{(\prime\prime)}(x_0) \leq 0$, c'est absurde. Ainsi :

$$\varphi_{\varepsilon,1} \leqslant 0 \text{ sur } [a,b].$$

De même : $\varphi_{\varepsilon,2} \geqslant 0$ sur $[a,b]$.

Ceci donne ; pour tout $x \in [a,b]$ et tout $\varepsilon > 0$:

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - (x-a)(b-x) \leq f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \varepsilon(x-a)(b-x)$$

donc f est affine sur $[a,b]$.

Comme tout point de J est intérieur à un segment $[a,b]$, f' possède une dérivée nulle sur J, donc f est affine sur J, donc sur $[a,b]$.

II-6° D'après la question précédente, f est affine par morceaux sur I. Pour vérifier que f est affine, il suffit de prouver que la pente est la même sur les intervalles limités par les x_i.

Or si $f(x) = a(x-x_i)+b$ sur $]x_i-\alpha, x_i[$

$f(x) = a'(x-x_i)+b$ sur $]x_i, x_i+\alpha[$

il vient $\frac{1}{h}\left(f(x_i+h)+f(x_i-h)-2f(x_i)\right) \to 0$

donc $a'-a=0$ □

II-7°) Posons $\lambda = \max\limits_{x \in [x_0-h, x_0+h]} (f-P)(x)$.

• Si $\lambda = 0$, λ est atteint en x_0 intérieur à $[x_0-h, x_0+h]$, donc $f^{(\prime\prime)}(x_0) \leq P^{(\prime\prime)}(x_0)$ (I-3°)

On $\quad P^{(2)}(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(P(x_0+h) + P(x_0-h) - 2P(x_0)\right)$ car $\deg P \leq 2$

$$= \Delta f(x_0, h)$$

de là : $\quad m \leq f^{(2)}(x_0) \leq \Delta f(x_0, h)$

Si $\lambda > 0$, λ est atteint en un point $x \in]x_0-h, x_0+h[$

et : $\quad f^{(2)}(x) \leqslant P^{(2)}(x) = P''(x_0) \quad (\deg P = 2)$

$$m \leqslant \Delta f(x_0, h).$$

... En considérant $\min\limits_{x \in [x_0-h, x_0+h]} (f-P)$, on obtient de la même façon : $\Delta f(x_0, h) \leqslant M$ $\square$

III

III - 1°) Visiblement :

$\forall n \in$ [illegible] $|a_n$ [illegible] $\leq \frac{|a_n| + |b_n|}{n^2}$

d'où la convergence normale de la série.

III - 2°) La convergence normale de la série permet d'intervertir série et intégrale sur le segment $[-\pi, \pi]$ d'où

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = a_0 \frac{\pi^3}{6} \quad \text{et, pour } n \geqslant 1 :$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx = \alpha_n - \pi a_n, \quad \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx = \beta_n - \pi b_n$$

où $\alpha_n = \frac{a_0}{4}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx$, $\beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx)\,dx$.

III - 3°) On calcule, pour $h \neq 0$

$$\frac{1}{h^2}\left(\cos n(x+h) + \cos n(x-h) - 2\cos nx\right) = -\cos nx \cdot \frac{\sin^2 n\frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

$$\frac{1}{h^2}\left(\sin n(x+h) + \sin n(x-h) - 2\sin x\right) = \ldots$$

$$= -\sin nx \cdot \frac{\sin^2 \frac{nh}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

De là, avec II et les notations du I :

$h \neq 0$; $\Delta F(x_0, h) = \dfrac{a_0}{2} + S\left(\dfrac{h}{2}\right)$ où $u_n = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0$

La continuité de S établie en I donne :

$$\exists F^{(4)}(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx)$$

III - 3°) Ici, compte-tenu de II - 2°), F est 2-pseudo-dérivable sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F^{(4)}(x) = 0$.

Il résulte de II - 5°) que F est affine sur $\mathbb{R}$. Or $x \mapsto F(x) - \dfrac{a_0^2}{4}x^2$ est 2π- périodique, donc constante.

Donc F est constante, et avec II - 1°)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx = 0$$

$$'' \quad , \pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx = 0$$

Enfin $x \to \dfrac{a_0}{4}x^2$ est constante donc $a_0 = 0$.

III - 4°) Nous prouverons dans le cours sur la convergence dominée le résultat suivant :

" Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, a_n, b_n deux suites réelles telles que :

$$\forall x \in I, \quad a_n \cos nx + b_n \sin nx \to 0.$$

Alors : $(a_n) \to 0$ et $(b_n) \to 0$. "

Envisageons, pour $x \in [-\pi, \pi] \setminus B$, $u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$,

$$V_n(t) = u_n \frac{\sin^2 nt}{n^2 t} \quad (t \neq 0, \; V_n(0) = 0) \quad \text{et}$$

$$V(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} V_n(t).$$

D'après II - 5°), V est continue sur $\mathbb{R}$ ie :

$$\exists \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} V(t) = 0.$$

Il résulte alors des calculs précédents que :

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \setminus B \quad , \quad \exists F''(x) = 0$$

$$\forall x \in B, \quad h\, \Delta F(x, h) \to 0 .$$

Avec II - 6°), F est affine, et comme ci-dessus :

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = b_n = 0 .$$

III . 5°) Avec ce qui précède :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists F''(x) = g(x) .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x_i \in [-\pi, \pi]$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$(*) \quad \forall x \in [-2\delta + x_i, x_i + 2\delta], \quad g(x_i) - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant g(x_i) + \varepsilon$$

Appliquons II - 7°) avec $m = g(x_i) - \varepsilon$, $M = g(x_i) + \varepsilon$, et $0 < |h| \leqslant \delta$:

$$\forall x \in [x_i - \delta, x_i + \delta], \quad m \leqslant \Delta F(x, h) \leqslant M$$

$$\Rightarrow \quad g(x_i) - \varepsilon \leqslant \Delta F(x, h) \leqslant g(x_i) + \varepsilon$$

et donc : $\Rightarrow \quad |g(x) - \Delta F(x, h)| \leqslant 2\varepsilon.$

L'uniforme continuité de g permet de recouvrir $[-\pi, \pi]$ par un nombre fini de $[x_i - \delta, x_i + \delta]$ avec $\delta > 0$, fixé $\square$

Avec ce qui précède, pour $0 < |h| \leqslant \delta$: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta F(x, h) - g(x)|\, dx \leqslant 2\pi\varepsilon$

d'où :

$$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \Delta F(x, h) \cos nx\, dx}_{\pi \frac{a_n}{n^2} \frac{\sin^2 \frac{nh}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}} \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}]{} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx)\, dx$$

par CVN sur $[-\pi, \pi]$

Finalement : $\displaystyle a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx)\, dx$

de même pour b_n $\square$