

Séries entières (Boost)

→ Hadamard-Cauchy

$$\rho(\sum a_n z^n) > 0 \Leftrightarrow \exists c > 0 \ a_n = O(c^n)$$

→ Rayon de CV: $\rho(\sum a_n z^n) = \frac{1}{\limsup^n \sqrt[n]{|a_n|}}$

→ Pour $F \in \mathbb{C}(X)$, F est DSE sur $D(0, \rho)$

où $\rho = \min\{|\omega|, \omega \text{ pôle de } F\}$

Hou? Décompo en éléms simples puis séries géométriques.

→ Méthodes de DSE

- * équa diff
- * fractions rationnelle (si c'en est une)
- * équation fonctionnelle
- * Si DL connu: majoration du reste intégral se fait souvent sur $\mathbb{R}$

En bref: trouver un DSE puis montrer que c'est le bon (et qu'il CV)

FSE CMPLX

→ exp: $\forall z \in \mathbb{C} \ e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ (justification: reste int $C \rightarrow \infty$ sans tout compl)

→ Logarithme complexe: $z = x + it$, $\log z = \log|z| + i \arg\left(\frac{t}{x + i|z|}\right)$
 $\forall z \in D(0, 1): \log(1+z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$

méthode: $\rho = \sum (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$: pour $\psi(t) = \rho(1+it)$ dériver $\psi = \exp(\psi(t)) \dots$

→ $\sum a_n z^n$ CVN sur tous les compacts de $D(0, \rho)$
 $\rho = \rho(\sum a_n z^n)$

↳ $\sum |a_n| R^n < \infty \Rightarrow \sum a_n z^n$ CV et $\rho \geq R$ sur $\overline{D}(0, R)$

→ Zéros isolés : $f_a(z) = \sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$

si $(a_n) \neq (0) \nexists n \in]0, R[\forall z \in D(0, n) \setminus \{0\} f(z) \neq 0$

utile → Expression intégrale des coeffs : $\rho(\sum a_n z^n) = R > 0$

$$\forall n \in]0, R[\forall p \in \mathbb{N} \quad a_p = \frac{1}{2i\pi n^p} \int_0^{2\pi} f(ne^{it}) e^{-ip t} dt$$

→ Formule de Cauchy $\rho(\sum a_n z^n) = R > 0$

$$\forall n \in]0, R[\forall z \in D(0, n) : f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ne^{it} f(ne^{it})}{ne^{it} - z} dt$$

→ Pour voir si f est analytique en a , regarder $f(a+h)$.

→ Soit f et g DSE sur $D(0, R_f), D(0, R_g)$

il existe ρ tq $f \circ g$ DSE sur $D(0, \rho)$ (non)

→ Fct AM $\mathcal{E}^\infty \Rightarrow f$ analytique

→ Théorème d'Abel. $(a_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}, \sum a_n z^n$

$f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définie sur $[0, 1]$

$f \xrightarrow{1^-} \sum a_n$ (preuve: CCV)
 $\nexists f_{\text{CVU}} \dots$

STUCT

Recherche d'équivalent + Comparaison série-intég

+ Régularisation : on multiplie par $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ + Produit de Cauchy.

Exo 01 $\rightarrow f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, a_n > 0$ après de rayon $< \infty$

$b_n = 0 \ (a_n) \Rightarrow g = 0 \ (f)$

$\rightarrow (a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \rightarrow$ f admet une lim en 1- ($f = \sum a_n x^n$) $\text{lim} \Leftrightarrow \sum a_n < \infty$

$\rightarrow$ CSA : $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ (C/N m (2,1)).

$\rightarrow$ Abel : $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de finit m (2,2) ($\rightarrow \sum a_n < \infty$)

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightarrow$ réciproque fautive en général

décode de $\sum a_n x^n$ DSE $\rightarrow \sum a_n$ DSE (produit de Cauchy)

STUCT Recherche d'équivalent + Comparaison série-intég

+ Régularisation : on multiplie par $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ + Produit de Cauchy.

Exo
OM $\rightarrow f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, 0_n > 0$ apr
de rayon > 0

$$(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \quad b_n = o(a_n) \Rightarrow g = o(f)$$

$\rightarrow$ jachmet une lim en 1- ($f = \sum a_n 2^n$) jmil $\Leftrightarrow \sum a_n CV$

$\rightarrow$ CSA : $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ (CNSM (91)).

$\rightarrow$ Abel : $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de jmil m (92) ($\rightarrow \sum a_n CV$)

$\lim_{1^-} f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rightarrow$ réciproque fausse en général

décode de f, g DSE $\rightarrow f \cdot g$ DSE (produit de Cauchy)