## Devoir n°15 bis. Matrices stochastiques et modèle d'Ehrenfest

On note $\Delta$ l'ensemble des vecteurs $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. On note $\Omega = (1, 1, ..., 1)$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique ssi $\begin{cases} \text{les coefficients sont positifs, c'est-à-dire } \forall (i,j),\ a_{ij} \geq 0 \\ A\Omega = \Omega, \text{ c'est-à-dire ssi } \forall i,\ \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1. \end{cases}$

1) a) Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

b) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, il en est de même des puissances $A^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

Montrer que toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de $A$ est de module $\leq 1$, c'est-à-dire vérifie $|\lambda| \leq 1$.

*Indication* : Considérer $X$ vecteur propre non nul, et la $p$-ième ligne de $AX = \lambda X$, où $|x_p| = \max_{1 \leq i \leq p}(|x_i|)$.

b) On suppose de plus $a_{ii} > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Montrer que 1 est la seule valeur propre de $A$ de module 1.

*Indication* : Considérer à nouveau $p$ tel que $|x_p| = \max_{1 \leq i \leq p}(|x_i|)$. Et justifier que $|\lambda - a_{pp}| \leq \sum_{j \neq p} a_{pj}$.

**3)** *Modèle d'Ehrenfest* : Il s'agit d'un modèle utilisé dans l'étude des mouvements des molécules :

On suppose que $M$ molécules sont contenues dans deux urnes.

On note $N_0$ la variable aléatoire donnant le nombre de molécules contenues dans la première urne.

A chaque unité de temps, UNE molécule est choisie au hasard et elle est changée d'urne avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

On désigne par $N_k$ le nombre de molécules contenues dans la première urne après $k$ unités de temps.

On considère $X_k = (P(N_k = i))_{0 \leq i \leq M}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{M+1}$ donnant la loi de $N_k$.

On considérera la matrice $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2M} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M}{2M} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M-1}{2M} & \frac{1}{2} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{2} & \frac{M}{2M} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2M} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d'ordre $M + 1$.

a) Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(N_{k+1} = i)$ en fonction des $P(N_k = j)$. On en déduit $X_{k+1} = BX_k$.

b) Montrer que $E(N_{k+1}) = \dfrac{1}{2} + \left(1 - \dfrac{1}{M}\right) E(N_k)$. En déduire la limite de $E(N_k)$ lorsque $k$ tend vers $+\infty$.

c) La matrice ${}^tB$ est une matrice stochastique et vérifie les propriétés du 2).

*On admet pour la suite* que le polynôme caractéristique de $B$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

On considère le vecteur $Z$ défini par $\forall i \in \{0, 1, ..., M\}$, $z_i = 2^{-M}\binom{M}{i}$.

Justifier que $Z$ est l'unique vecteur appartenant à $\Delta$ et vérifiant $BZ = Z$.

d) Montrer que, quelle que soit la valeur de $X_0$, on a : $\lim_{k \to +\infty} X_k = Z$. Retrouver le résultat du b).