

Approche documentaire : l'effet Tunnel

L'effet tunnel désigne la propriété que possède un objet quantique de franchir une barrière de potentiel même si son énergie est inférieure à l'énergie minimale requise pour franchir cette barrière. C'est un effet purement quantique, qui ne peut pas s'expliquer par la mécanique classique. Pour une telle particule, la fonction d'onde, dont le carré du module représente la densité de probabilité de présence, ne s'annule pas au niveau de la barrière, mais s'atténue à l'intérieur de la barrière, pratiquement exponentiellement pour une barrière assez épaisse. Si, à la sortie de la barrière de potentiel, la particule possède une probabilité de présence non nulle, elle peut traverser cette barrière. Cette probabilité dépend des états accessibles de part et d'autre de la barrière ainsi que de l'extension spatiale de la barrière.

Au niveau théorique le comportement tunnel n'est pas fondamentalement différent du comportement classique de la particule quantique face à la barrière de potentiel ; elle satisfait à l'équation de Schrödinger, équation différentielle impliquant la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première dans tout l'espace. De même que l'équation des ondes électromagnétiques mène au phénomène des ondes évanescences, de même la fonction d'onde rencontre des cas où l'amplitude de probabilité de présence est non nulle dans des endroits où l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie totale.

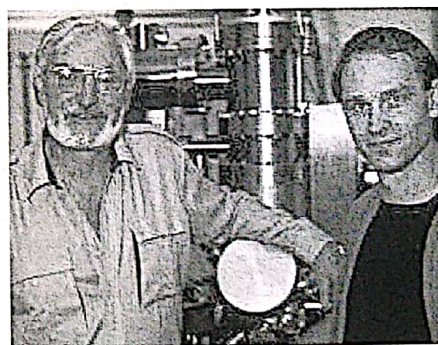
Si, au niveau mathématique l'évaluation de l'effet tunnel peut parfois être simple, l'interprétation que l'on cherche à donner aux solutions révèle le fossé qui sépare la mécanique classique, domaine du point matériel suivant une trajectoire définie dans l'espace-temps, de la mécanique quantique où la notion de trajectoire disparaît.

La durée de traversée tunnel d'une particule à travers une barrière quantique a été, et est encore, le sujet d'âpres discussions. Des études assez nombreuses dans le domaine électromagnétique ou photonique ont révélé l'apparition de ce que l'on peut interpréter comme des vitesses supraluminiques, respectant toutefois la relativité restreinte : il s'agit du phénomène connu sous le nom d'effet Hartman.

http://www.laradioactivite.com/fr/site/pages/Effet_tunnel_Radioactivite_Alpha.htm

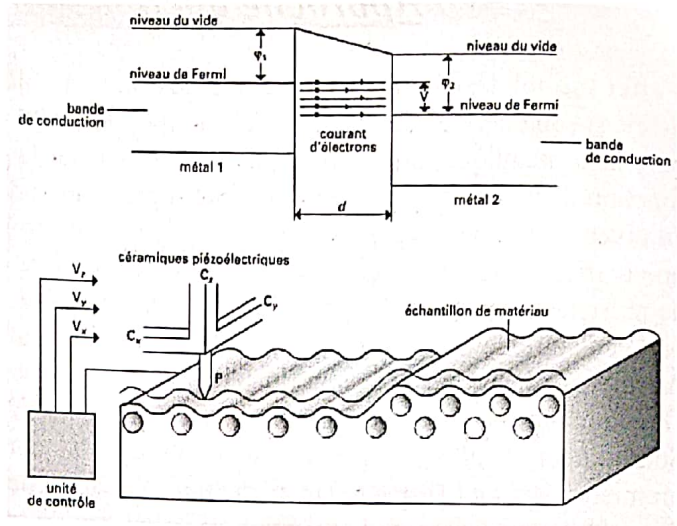
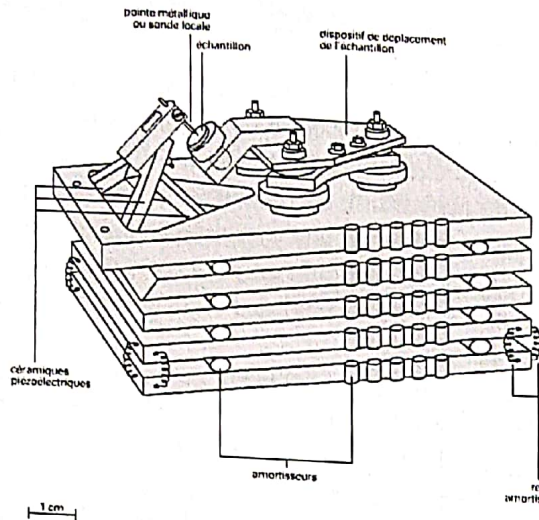
Microscopie à effet tunnel

Les microscopes à sonde locale permettent de réaliser par ordinateur des cartes de contour d'une surface, atome par atome (voir figures ci-dessous). On en distingue deux types, les microscopes à effet tunnel (STM pour Scanning Tunneling Microscopes) et les microscopes à force atomique (AFM pour Atomic Force Microscopes), qui ont révolutionné l'imagerie des surfaces atomiques. **Gerd Binnig** et **Heinrich Rohrer** (prix Nobel en 1986) ont inventé les STM au début des années 1980 au laboratoire de recherche IBM à Zurich, en Suisse. Plus tard, alors que Binnig était accueilli à l'Université de Stanford et au centre de recherche d'IBM d'Almaden (Californie, USA), il pensa au concept d'AFM, qu'il développa en 1985 avec Christophe Gerber d'IBM et Calvin Quate de Stanford.

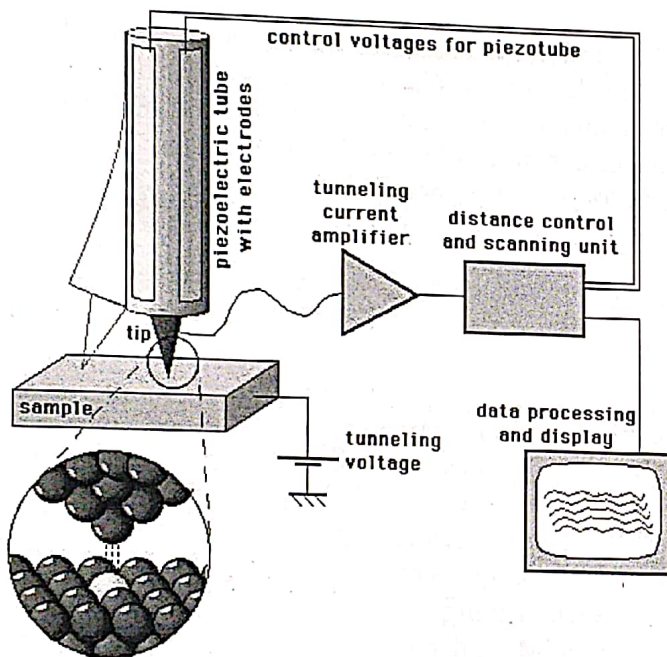


Dans la forme la plus courante de STM, un potentiel constant de polarité appropriée est appliqué entre les atomes d'une pointe et l'échantillon à examiner (figure A). Lorsque la pointe parcourt la surface de l'échantillon, à environ un atome de distance, les électrons attirés par la pointe traversent la séparation par effet tunnel. Le principe du STM réside dans le fait que la valeur du courant tunnel varie fortement avec la distance de séparation. Ce courant tunnel peut être aussi faible que quelques pA (10^{-12} A), et une variation de la séparation de seulement 0,4 nm peut provoquer un facteur 10^4 dans le courant tunnel. Un mécanisme de rétroaction très sensible régule la position de la pointe pour maintenir un courant électronique stable. Le mouvement de la pointe perpendiculairement à la surface permet de reproduire les contours des atomes de l'échantillon, produisant une sorte de carte topographique. L'image résultante (chemin de la pointe) est représentée par la courbe pleine rouge sur la 2ème figure à droite ci-dessous.

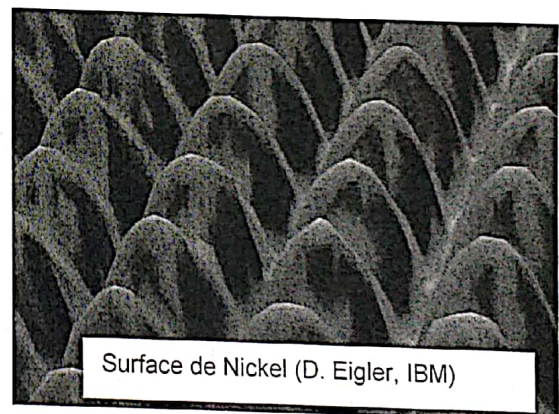
Thornton Rex Physique moderne (Ed. de Boeck)



http://www.phys.ens.fr/~dalibard/PHY311/2012/PHY311_cours4.pdf



Binnig et Rohrer (IBM) 1981-85
Prix Nobel 1986



Surface de Nickel (D. Eigler, IBM)

Pour un électron tel que $V_0 - E = 1$ eV, on a :

largeur du puits de potentiel	coefficient de transmission tunnel
$L = 5$ Angströms	$T \approx 6 \cdot 10^{-3}$
$L = 6$ Angströms	$T \approx 2 \cdot 10^{-3}$

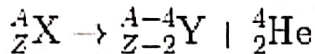
Le courant varie extrêmement vite avec la distance !

http://www.phys.ens.fr/~dalibard/PHY311/2012/PHY311_cours4.pdf

Radioactivité alpha

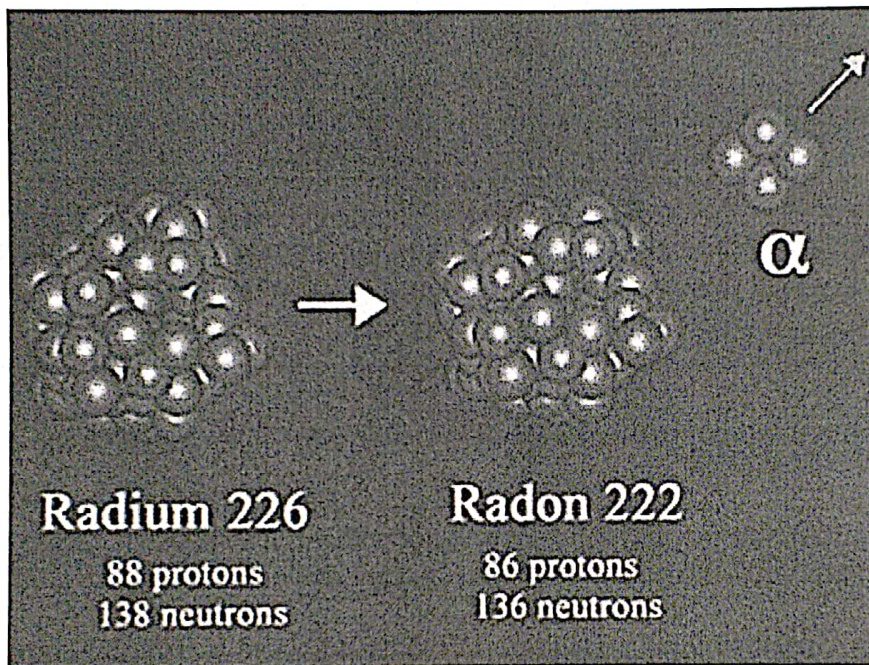
où comment des noyaux trop lourds perdent du poids...

La radioactivité alpha correspond à la désintégration d'un noyau lourd en un noyau fils plus léger, avec émission d'une particule alpha. Celle-ci, encore appelée hélion, a été identifiée en 1909 par Rutherford comme étant un noyau d'hélium, contenant deux protons et deux neutrons. Ainsi peut-on écrire la réaction de désintégration α comme :



A représente le nombre de masse (nombre de nucléons), et Z le numéro atomique (nombre de protons).

Le noyau fils Y est parfois obtenu dans un état excité. Sa désexcitation s'accompagne alors d'une émission de rayonnement γ .



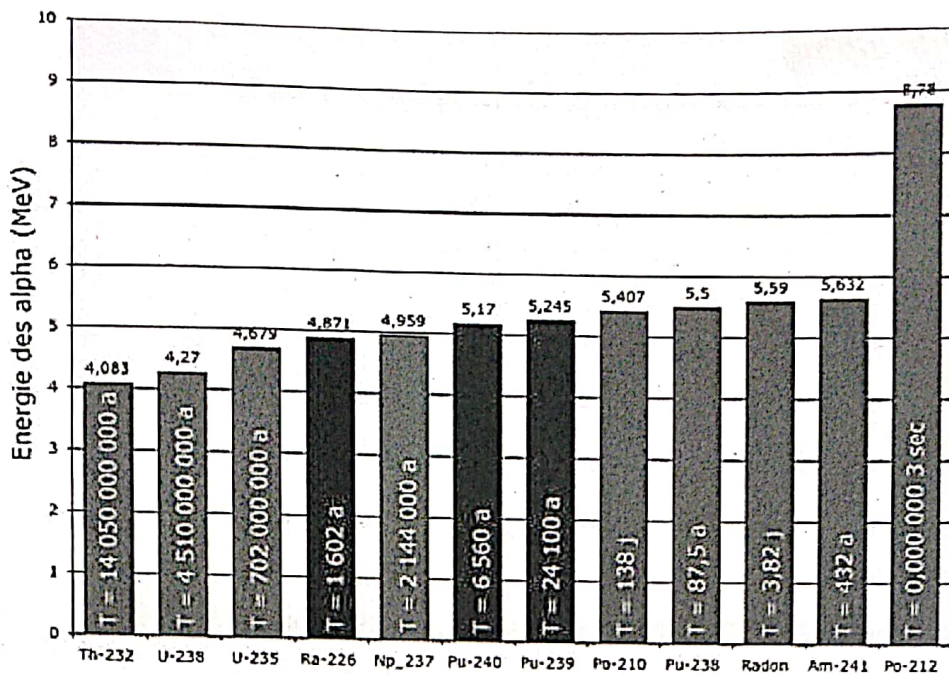
Exemple de la désintégration historique du radium-226

Ce gros noyau de 226 nucléons, dont 88 protons et 138 neutrons, émet une particule alpha. Il se transforme alors en noyau de radon-222, lui-même radioactif, contenant deux protons et deux neutrons de moins. La désintégration libère 4,6 millions d'électronvolts d'énergie. La particule alpha en emporte les 222/226 ièmes et le radon 4/226 ièmes. La période du radium est 2300 ans.

©IN2P3

L'énergie libérée lors d'une désintégration alpha se retrouve sous forme d'énergie cinétique partagée entre la particule α et le noyau qui recule. L'énergie de la particule α est unique pour une désintégration donnée ; les valeurs s'échelonnent typiquement entre 4 et 8 MeV selon la nature du noyau de départ. A ces valeurs d'énergie relativement peu dispersées, correspondent des périodes radioactives d'une grande disparité : de quelques milliards d'années pour le Thorium 232 à des fractions de millionième de seconde pour le Polonium 212. On constate que la durée de vie du noyau radioactif est fonction décroissante de l'énergie de la particule α libérée.

Comment expliquer cette relation entre la durée de vie d'un élément radioactif et l'énergie de la particule α qu'il émet ?



Energies des particules alpha, et période radioactives : ce diagramme de l'énergie des particules α émis par quelques-uns des principaux émetteurs montre des énergies toujours supérieures à 4 MeV. Plus l'énergie est élevée, plus la durée de vie du noyau est courte. La période varie de façon impressionnante de 14 milliards d'années pour le thorium (à gauche) à une fraction de milliardième de seconde pour le polonium-212 (à droite) alors que l'énergie des particules α émises varie seulement de 4,083 à 8,78 MeV. La limite en énergie à 4 MeV et les durées de vie généralement très longues sont expliquées par l'effet 'tunnel'. ©IN2P3

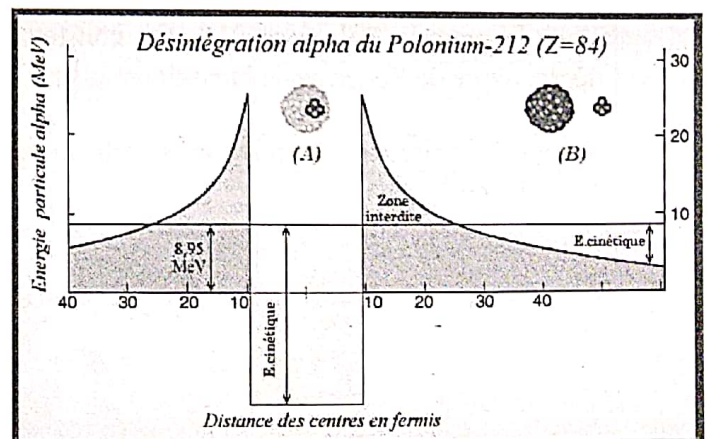
Un modèle de la radioactivité alpha

Le très grand âge des noyaux d'uranium et de thorium qui atteignent des milliards d'années témoigne que les désintégrations alpha se produisent difficilement, bien qu'elles libèrent des millions d'électronvolts d'énergie.

Ces noyaux seraient parfaitement stables sans un mécanisme laborieux qui vient à bout des forces nucléaires et déclenche une désintégration. L'effet attractif de la colle nucléaire cesse brutalement hors du noyau. Si quatre nucléons, groupés en une particule alpha, arrivent à perdre le contact avec les autres nucléons, ce groupe ne ressent plus que la répulsion due à la charge électrique du reste du noyau. Il s'en éloigne alors de plus en plus vite pour acquérir l'énergie cinétique de quelques millions d'électronvolts dont il a été question. Le tout est d'arriver à perdre ce contact.

Un "puits" de potentiel..

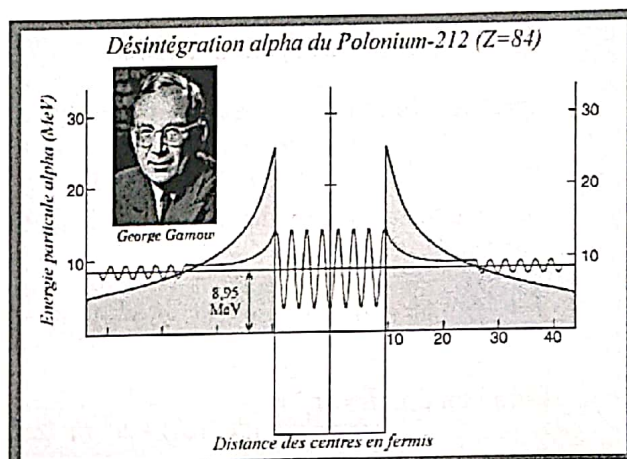
La désintégration alpha du Polonium-212 est celle qui dégage le plus d'énergie, 8,95 MeV. Cette désintégration est pourtant interdite par la mécanique classique. Il est impossible pour une particule alpha de passer de l'intérieur du noyau en A à l'extérieur en B. Elle se retrouve prisonnière au fond d'un « puits » comme le montre la courbe (en gris) qui représente l'énergie potentielle d'interaction entre la particule et le reste du noyau. Pour aller de A en B, la particule doit franchir une zone interdite où son énergie cinétique serait négative. Les zones permises sont le puits où l'attraction nucléaire prédomine, et l'extérieur du puits où la répulsion due à la charge du noyau l'emporte. ©IN2P3



Effet tunnel

On doit à un physicien américain d'origine russe, **Georges Gamow**, la première explication de la désintégration alpha, une désintégration qui n'est pas autorisée par les lois de la physique classique. En effet, en supposant, comme le fit Gamow à son époque, que la particule alpha préexiste dans le noyau, celle-ci ne peut pas franchir d'un point de vue classique la barrière de potentiel car elle ne possède pas l'énergie nécessaire. Elle se retrouve dans la situation d'un alpiniste, prisonnier d'un cratère, qui n'a plus de forces pour gagner le sommet, passer sur l'autre versant, et dévaler vers la vallée.

Pour expliquer l'expulsion de la particule alpha, il faut faire appel à la mécanique quantique : le mécanisme proposé par Gamow a été appelé "effet tunnel". L'effet tunnel est dû à ce qu'une particule se comporte à la fois comme un corpuscule et comme une onde dans le domaine de l'infiniment petit où la mécanique quantique se substitue à la mécanique classique. La résolution de l'équation de Schrödinger donne une densité de probabilité de détection de la particule alpha non nulle à l'extérieur du puits. Sur la figure ci-contre est représentée en rouge l'allure de la courbe de densité de probabilité. Une onde de probabilité évanescente prend place dans le domaine interdit par la mécanique classique, et sert de raccord aux deux ondes de probabilité des domaines accessibles.

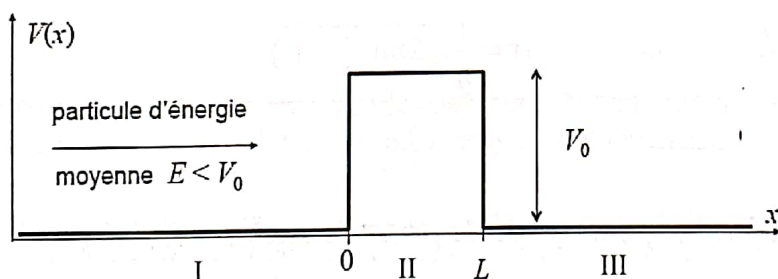


http://www.laradioactivite.com/fr/site/pages/Effet_tunnel_Radioactivite

Coefficient de transmission tunnel pour une barrière rectangulaire

Afin d'expliquer l'effet tunnel, commençons par une modélisation simple d'une barrière rectangulaire de potentiel de largeur L et de hauteur V_0 :

$$\begin{cases} V(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \text{ et } x > L \\ V(x) = V_0 \text{ pour } 0 < x < L \end{cases}$$



La recherche d'états stationnaires solutions de l'équation de Schrödinger conduit aux fonctions d'onde dans les domaines I, II et III :

$$\begin{cases} \Psi_I(x) = A e^{ikx} + \underline{r} A e^{-ikx} \\ \Psi_{II}(x) = \underline{B} e^{\alpha x} + \underline{C} e^{-\alpha x} \\ \Psi_{III}(x) = \underline{\tau} A e^{ikx} \end{cases} \quad \text{où } k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad \text{et } \alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

et où les inconnues sont $\underline{r}$, $\underline{\tau}$, $\underline{B}$ et $\underline{C}$.

L'écriture des conditions aux limites (continuité de Ψ et de ses dérivées) conduit au système de 4 équations à 4 inconnues suivant :

$$\begin{cases} A(1+r) = \underline{B} + \underline{C} \\ ik A(1-r) = \alpha(\underline{B} - \underline{C}) \\ \underline{B}e^{\alpha L} + \underline{C}e^{-\alpha L} = A\tau e^{ikL} \\ \alpha(\underline{B}e^{\alpha L} - \underline{C}e^{-\alpha L}) = A\tau ik e^{ikL} \end{cases}$$

Après résolution de ce système, on trouve $\tau = \frac{e^{-ikL}}{ch(\alpha L) + i\mu sh(\alpha L)}$ où $\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\alpha}\right)$

Ce qui permet ensuite de calculer le facteur de transmission tunnel (ou coefficient de transmission de courant de probabilité) :

$$T = \frac{J_t}{J_i} \quad \text{où} \quad J_i = |A|^2 \frac{\hbar k}{m} \quad \text{et} \quad J_t = |A|^2 |\tau|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

$$\text{D'où l'on tire } T = |\tau|^2 = \frac{1}{ch^2(\alpha L) + \mu^2 sh^2(\alpha L)} \quad \text{où } M = 1 + \mu^2$$

Où encore, finalement :

$$T = \frac{1}{1 + M sh^2(\alpha L)} \quad \text{où } M = \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)}$$

Cas particulier de la barrière épaisse : si $\alpha L \gg 1$, alors $T \approx 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2\alpha L}$

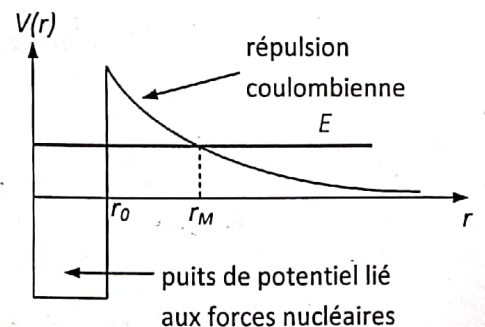
➡ Dans l'approximation de la barrière épaisse, le coefficient de transmission tunnel varie exponentiellement avec la hauteur V_0 et la largeur L de la barrière

$$T \propto \exp(-2\alpha L) \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

Retour sur une barrière de potentiel plus réaliste pour la radioactivité α

Les résultats sur le facteur de transmission tunnel T , établis précédemment, doivent être adaptés puisque la barrière a un profil non rectangulaire. En admettant localement l'approximation de barrière épaisse, et l'approximation W.K.B. (c.f. annexe), on trouve :

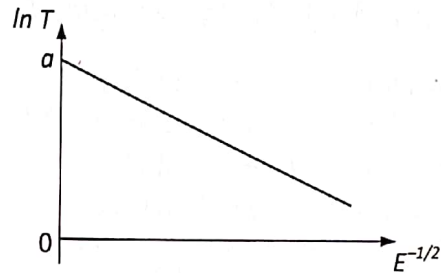
$$\ln T = -2 \int_{r_0}^{r_M} \alpha dr$$



r_0 et r_M étant les valeurs extrêmes de r pour lesquelles l'énergie E est

égale à l'énergie potentielle. On retrouve alors la loi expérimentale de Gamow-Condon-Gurney :

$$\ln T = a + \frac{b}{E^{1/2}}$$



C'est ainsi que l'on interprète la grande stabilité de l'uranium 238 : $T \approx 10^{-39}$, et donc sa grande durée de vie $T_{1/2}$, de l'ordre de 10^{17} s, soit environ 4,5 Gan. En effet $T_{1/2}$ est inversement proportionnel au facteur de transmission, puisque l'on a, d'une part selon la loi radioactive :

$$\frac{dN}{N} = -\frac{dt}{\tau_r} \quad \text{avec} \quad \tau_r = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$$

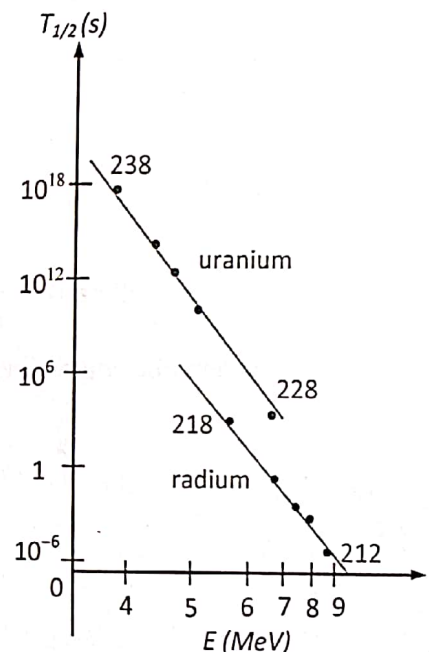
Et d'autre part pendant la durée Δt d'observation :

$$T = \frac{\Delta N}{N} \approx \frac{\Delta t}{\tau_r}$$

Cette loi permet d'expliquer la grande variation de T , et donc de $T_{1/2}$, lorsque l'énergie potentielle nucléaire change légèrement.

Perez-Pujol Physique quantique Ed. De Boeck

www.phys.ens.fr/~dalibard/PHY311/2012/PHY311_cours4.pdf



Au programme : « en utilisant le coefficient de transmission fourni, expliquer le rôle de l'effet Tunnel dans la radioactivité alpha ou la microscopie à effet tunnel »

Questions :

- 1) Quelles sont les équations permettant de déterminer le coefficient de transmission ?
- 2) Quelle est la méthode pour déplacer l'échantillon dans le microscope à effet Tunnel ?
- 3) Peut-on dire que la microscopie à effet Tunnel permet de voir les atomes ?
- 4) Quel calcul proposeriez-vous pour justifier du traitement ondulatoire de la particule α dans le noyau ?
- 5) Dans le cas de l'uranium 238 par exemple, justifiez l'approximation de barrière épaisse.
- 6) Pouvez-vous donner une estimation du facteur de transmission tunnel pour le radon $^{222}_{86}\text{Rn}$?
- 7) En estimant le temps d'un « aller et retour » d'une particule alpha dans le noyau $^{238}_{92}\text{U}$, et en utilisant son coefficient de transmission tunnel $T \approx 2 \times 10^{-39}$, pouvez-vous donner une estimation du temps moyen d'émission d'une particule alpha pour l'uranium 238 ?

Annexe : démonstration de la loi de Gamow-Condon-Gurney

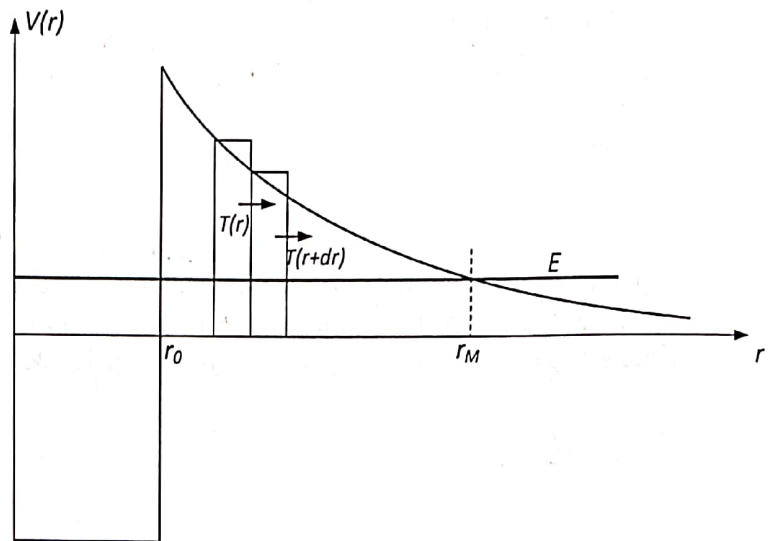
1) Approximation WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin)

On approche le profil coulombien par une succession de barrières rectangulaires élémentaires de hauteur $V(r)$ et d'épaisseur dr . En supposant ces barrières épaisses, on a :

$$T(r + dr) = T(r) e^{-2\alpha dr} \approx T(r)(1 - 2\alpha dr)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = -2\alpha dr$$

$$\Rightarrow \ln T = -2 \int_{r_0}^{r_M} \alpha dr$$



2) Intégration :

Il suffit ensuite d'utiliser $\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V(r) - E)}$, où $V(r) = \frac{K}{r}$ avec $K = \frac{2e^2(Z-2)}{4\pi\epsilon_0}$ est l'énergie potentielle coulombienne de la particule α , chargée $2e$, dans le potentiel du noyau $(Z-2)e$.

Le calcul de l'intégrale $\int_{r_0}^{r_M} \alpha dr$, aboutit à la loi de Gamow-Condon-Gurney

$$\ln T = a + \frac{b}{E^{1/2}}, \text{ avec } a = \frac{4}{\hbar} K^{1/2} (2mr_0)^{1/2} \text{ et } b = -\frac{1}{\hbar} \pi K (2m)^{1/2}$$

Données numériques :

Constante de Planck réduite : $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

masse d'une particule α : $m = 3727 \text{ MeV} / c^2 = 6,645 \times 10^{-27} \text{ kg}$

rayon approximatif d'un noyau de nombre de masse A : $r_0 = r_H A^{1/3}$ où $r_H = 1,2 \text{ fm}$

constante diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,84 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

charge de l'électron : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Approche documentaire : l'effet tunnel

1. Le coefficient de transmission est déterminé à partir des relations de continuité (fonction d'onde et dérivée) entre les solutions de l'équation de Schrödinger dans les différentes zones (voir page 6).
2. Des céramiques piézoélectriques (cristaux se déformant sous l'action d'une différence de potentiel) permettent de faire varier la position relative de la sonde et de l'échantillon (voir figure de la page 2).
3. La microscopie à effet tunnel ne permet pas de voir les atomes. Elle permet juste d'obtenir une information sur la distance par rapport à l'échantillon à laquelle le courant tunnel a une certaine valeur. On peut ainsi détecter « creux et bosses » du « nuage électronique » de l'échantillon. Ces creux et bosses sont liés à la position des atomes. Un ordinateur peut alors faire une image de synthèse qui reproduit ces creux et bosses et semble représenter les atomes (car la résolution de l'appareil est à l'échelle des atomes) (« data processing and display » de la figure page 2). Chaque bosse serait par exemple l'illusion de l'image d'un atome.
4. La particule α est confinée sur une distance r_0 de l'ordre de $200^{1/3} \times 1,2 \text{ fm} \approx 7 \times 10^{-15} \text{ m}$. Sa quantité de mouvement vérifie $E = \frac{p^2}{2m}$ donc (avec $E \approx 4 \text{ MeV}$) $p \approx 9 \times 10^{-20} \text{ kg.m.s}^{-1}$. Or, d'après l'inégalité de Heisenberg, $\Delta p \geq \hbar / 2r_0 \approx 8 \times 10^{-21}$. L'incertitude sur la quantité de mouvement est comparable à la quantité de mouvement elle-même. Une description classique de la particule est exclue.
5. Pour l'uranium 238, $r_0 \approx 7,4 \text{ fm}$. La hauteur de la barrière de potentiel est $V_0 = \frac{2e^2(Z-2)}{4\pi\epsilon_0 r_0} = 35 \text{ MeV}$. Le coefficient α vaut alors $\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} = 2,4 \times 10^{15} \text{ m}^{-1}$. $E = \frac{2e^2(Z-2)}{4\pi\epsilon_0 r_M} = 4,27 \text{ MeV}$ donne $r_M = 61 \text{ fm}$. Le produit $\alpha(r_M - r_0) = 129 \gg 1$ valide l'hypothèse de barrière épaisse.
6. Pour $^{222}_{86}\text{Rn}$, $K = \frac{2e^2(Z-2)}{4\pi\epsilon_0} = 3,87 \times 10^{-26} \text{ SI}$, $r_0 = 7,27 \text{ fm}$ donc $a = 73,7$ et $b = -1,34 \times 10^{-4}$. On en déduit $\ln T = a + \frac{b}{E^{1/2}} = -68$ donc $T \approx 3 \times 10^{-30}$.
7. On estime la vitesse à partir de $E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \approx 1,4 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$ donc la durée pour parcourir la distance $2r_0 = 14,9 \text{ fm}$ est $\Delta t \approx 1,1 \times 10^{-21} \text{ s}$. Ceci correspond à la « durée d'observation » de la page 7 et conduit à $\tau_r = \frac{\Delta t}{T} = 5,5 \times 10^{17} \text{ s} = 17 \times 10^9 \text{ ans}$. Ce résultat est de l'ordre de grandeur de la valeur expérimentale : $5 \times 10^9 \text{ ans}$.

L'évaluation de la vitesse est incorrecte car calculée à partir de l'énergie cinétique après émission et non pas dans le puits de potentiel (voir figure en bas de page 4). On peut essayer d'évaluer la vitesse dans le puits de

largeur $2r_0$ avec la formule du cours pour un puits infini : $E_c = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m(2r_0)^2} \Rightarrow v = n \frac{\pi \hbar}{2r_0 m}$. Pour $n = 1$,

$v = 3,3 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$. Cela ne marche pas. La vitesse devrait être plus grande que celle trouvée par la première méthode pour donner une valeur plus faible pour τ_r . Il faudrait prendre une valeur de n plus grande mais, sans la valeur de la profondeur du puits, on ne peut choisir n de façon pertinente. De plus il ne faut pas bien entendu que v dépasse c .