

Outils Mathématiques

I Champs, circulation, flux

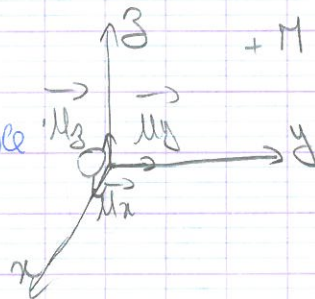
1. Coordonnées utiles:

Espace affine E de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ (ev. $\mathbb{R}$)

a. Coordonnées cartésiennes:

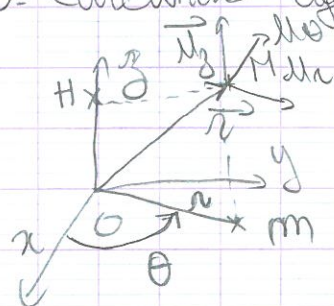
$\vec{OM} = \vec{r}$ vecteur position de M
 $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$

Ox, Oy, Oz fixe
orthogonales



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$$

b. Coordonnées cylindriques d'axe Oz :



$$\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{Om}$$

m : coordonnées polaires (ρ, θ) dans le plan (x, Oy)

M est repéré par (ρ, θ, z)

$$\rho \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, 2\pi[$$

* Vecteurs unitaires associés à la variation d'un seul paramètre de position

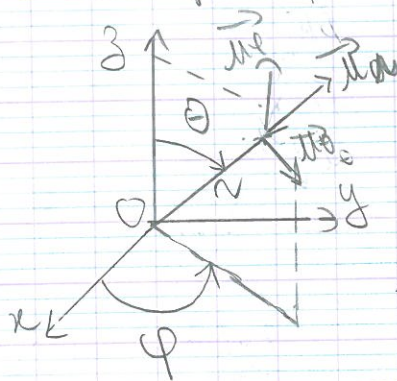
$\rightarrow (\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$: orthogonaux z à z

$\rightarrow$ coordonnées curvilignes orthogonales

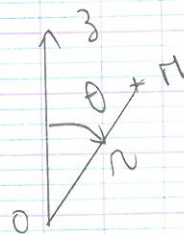
$$\vec{r} = \vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} (\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$$

c. Coordonnées sphériques d'axe Oz



repérage $M \in O_3$
demi-plan (O_3, M) limité
à Oz



repérage plané de M
dans le demi-plan
($\theta \in [0, \pi]$)
 $r \in \mathbb{R}^+$

on repère le demi-plan par un angle φ
(angle entre Ox et $(Oy) \cap$ demi-plan (O_3, M))
 $\varphi \in [0, 2\pi[$

M est repérée par (r, θ, φ)
 $\rightarrow$ base de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$
 $\vec{r} = r\vec{u}_r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$

2. Déplacements élémentaires:



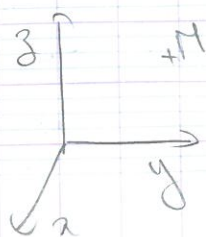
$$M' = M + dM$$

variations simultanées des 3 paramètres de
position: $dx, dy, dz, d\theta, d\varphi, \dots$

Règle: dM est une somme de 3 termes:

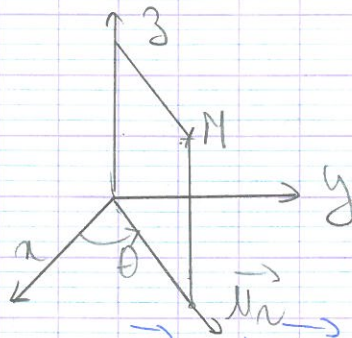
$$d\vec{M} = \sum_{3 \text{ termes}} \text{déplacement avec 1 seul paramètre variable}$$

o - Cartésienne:



$$d\vec{M} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

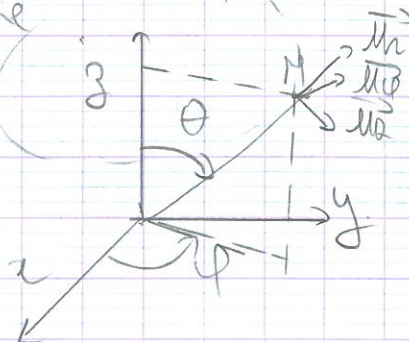
b- Cylindriques



$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

c- Sphériques.

Figure



$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{u}_\phi$$

d- Conclusion:

coordonnées q_1, q_2, q_3

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \vec{u}_{q_1} + h_2 dq_2 \vec{u}_{q_2} + h_3 dq_3 \vec{u}_{q_3}$$

h_1, h_2, h_3 fonctions des q_i

3- Axes élémentaires

Paramètres de position variables
élémentaire de surface

→ Choix de paramètres q_1, q_2 permettant
de décrire M sur la surface



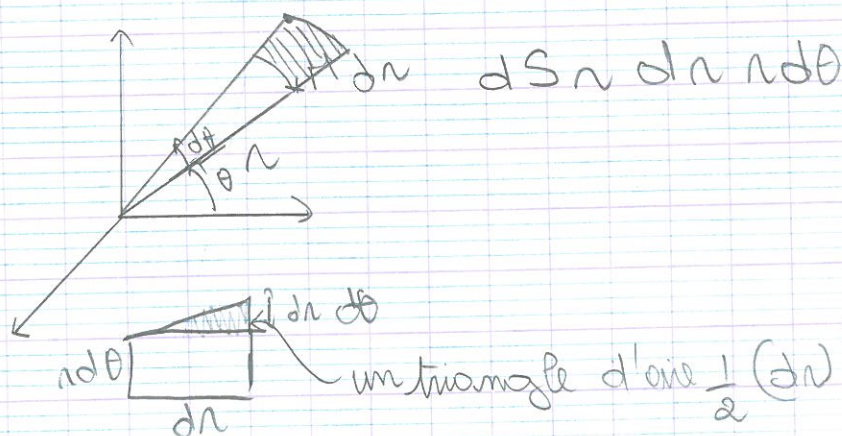
$$\frac{(dn)^2 d\theta}{2} - \frac{n^2 d\theta}{2} = \frac{1}{2} d\theta (dn^2 + 2n dn) \sim \frac{1}{2} n dn d\theta$$

→ {points} associé à une variation de $q_1 \in [0, dq_1]$
variation de $q_2 \in [0, dq_2]$

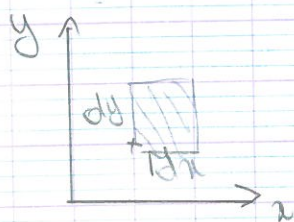
→ ~~équivalent de P~~ P q

① coordonnées curvilignes orthogonales $dS \sim dP_1 \times dP_2$
 $= |h_1 + q_1, h_2 + q_2| dq_1 dq_2$

a- Exemple : coord. polaires (surface plane)



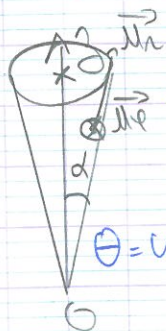
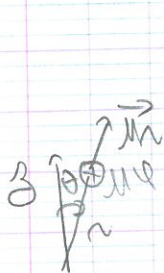
b- Plan (coordonnées cartésiennes)



$$dS = dx dy$$



c- Sur un cône de révolution



* Paramètres de position pour repérer un point sur un cône

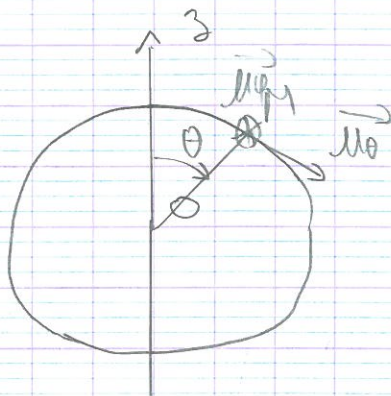
$$\theta = \arctan \frac{R}{z}$$

→ Sphérique

$$dS = dr r \sin \theta d\varphi$$

$$dS = dr r \sin \theta d\varphi$$

d. Sur une Sphère de centre O de rayon R :
 coordonnées sphériques: r, θ, ϕ
 $r = R$

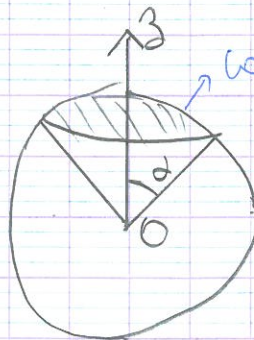


$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{e}_\phi$$

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= R^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad \text{classique}$$

application: aire d'une calotte sphérique de demi-angle α



$$S = \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \int_0^\alpha 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

$$= 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha)$$

4. Volume élémentaire

(H) Volume à étudier

→ avec coordonnées cylindriques orthogonales



$$q_1 \text{ varie de } \xi_1 \in [0, dq_1] \quad | \quad q_3 \text{ varie de } \xi_3 \in [0, dq_3]$$

$$q_2 \text{ varie de } \xi_2 \in [0, dq_2]$$

$$dV \sim dp_1 dp_2 dp_3$$

a - Cartésienne $dV = dx dy dz$

b - Cylindrique:

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$dV = dr r d\theta dz$$

c - Sphériques: $dV = dr r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

5 - Notion de champ scalaire ou vectoriel:

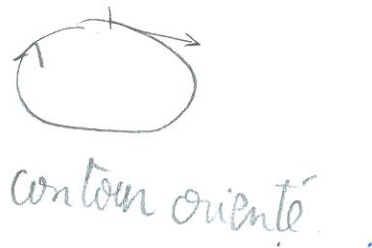
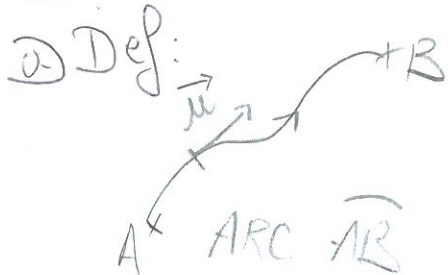
①

Espace affine E
 Champ = application $E \rightarrow \begin{cases} \mathbb{R} & \text{champ scalaire } f \\ \mathbb{R}^3 & \text{champ vectoriel } \vec{E} \end{cases}$

$$\text{champ } \vec{E}: \begin{matrix} E \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M \mapsto \vec{E}(M) \end{matrix}$$

champ $\vec{E}$ uniforme: $\forall M \vec{E}(M) = \vec{cte}$

6 - Circulation d'un champ vectoriel sur un contour orienté:



$$\boxed{dM = ds \vec{u}}$$

circulation du champ vectoriel $\vec{E}$ sur la
 courbe orientée = $\int_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{M} = \int_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{M}$

si contour fermé $\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{M}$

$$\int_{q_A}^{q_B} \vec{F}(q) \cdot \vec{u}_q h_q dq$$

b - En pratique

M est repéré sur la courbe par un param $q \in \mathbb{R}$

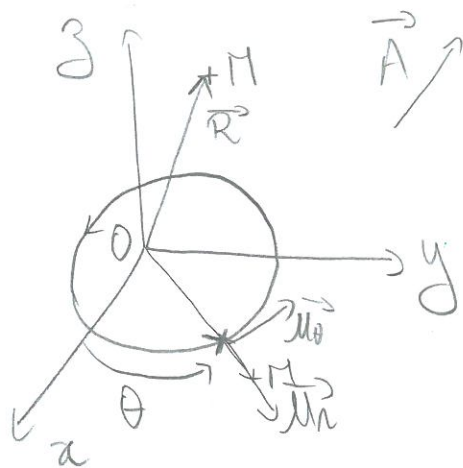
$$d\vec{M} = \vec{u}_q dq h_q = d\ell \vec{u}_q$$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(M(q)) = \vec{F}(q)$$

C - Exemple:

(2)

circulation du champ $\vec{E} = \vec{A} \wedge \vec{R} = \vec{A} \wedge \vec{OM} = \vec{E}(M)$
sur le cercle de centre O de rayon R dans le plan
orienté
 $n \odot y$



* Cas où $\vec{A} = A_z \vec{u}_z$
paramètre choisi: θ

$$d\vec{M} = R d\theta \vec{e}_\theta$$

$$E(\vec{M}) = \vec{A} \wedge \vec{OM} = A_z \vec{u}_z \wedge R \vec{u}_r = A_z R \vec{u}_\theta$$

$$\int_0^{2\pi} R A_z \vec{u}_\theta R d\theta \vec{u}_\theta = R^2 A_z \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R^2 A_z$$

* Cas général $\vec{A} = A_z \vec{u}_z + \vec{A}_{xy} \rightarrow \vec{A}_{xy} \wedge \vec{OM} \perp$ au plan Oxy

Conclusion $\int \vec{E}_{\text{cercle}} = 2\pi R^2 \vec{A} \cdot \vec{u}_z = 2\pi R^2 \vec{A} \cdot \vec{n}$

$$= 2 A_{\text{disque}}$$

Vct normal
au cercle

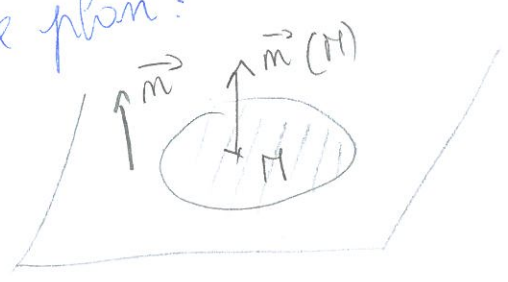
7. Surface orientée:

a. Def:

(H): Surface régulière : admet en tout point un plan tangent
 une surface est orientée si on a pu choisir en tout point de la surface un vecteur normal $\vec{n}$ qui dépend de façon continue de $M \vec{n}(M)$

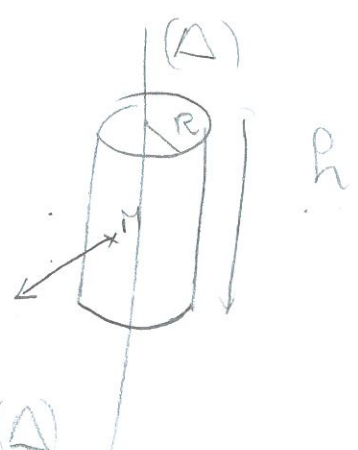
b. Exemples:

* morceau de plan:



choise $\vec{n}(M) = \vec{cte}$

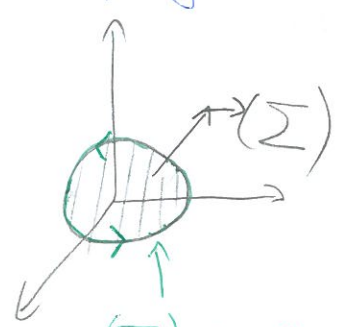
* morceau de cylindre



$\vec{n}(M) = \underline{\underline{u_r}}$
 cylindrique d'axe (Δ)

c. Convention 1: surface s'appuyant sur un contour orienté

* Exemple de base:



choise pour le disque
 $\vec{n} = \vec{u_z}$

↳ le disque est orienté en cohérence avec le cercle

On dit que le disque s'appuie sur le cercle (Γ) qui est un contour fermé orienté selon les flèches vertes.

* Cas général:

Toute surface obtenue par déformation continue du disque sera orientée par avec le choix $\vec{n}^*(M)$ obtenu de façon continue au cours de la déformation

①

d- Convention 2:

Une surface fermée est orientable et on choisit le vecteur normal dans le sens intérieur vers extérieur

6- Flux d'un champ vectoriel à travers une surface orientée:

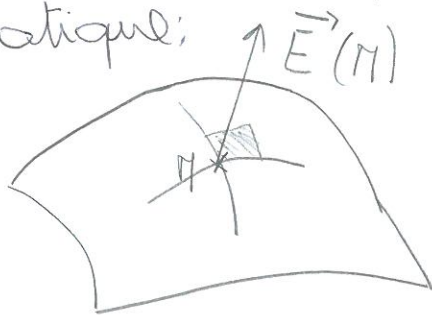
$\vec{E}$, (Σ) surface orientée $\vec{n}$

a- Définition

flux du champ $\vec{E}$ à travers $(\Sigma) = \oint_{\vec{\Sigma}} \vec{E} \cdot \vec{n} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$

si surface fermée $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \neq 0$

b- En pratique:



choix de paramètres

$M(q_1, q_2)$

$d\Sigma = dq_1 dq_2 \times f(q_1, q_2)$

* $\vec{n}(q_1, q_2)$

* $\vec{E}(M) = \vec{E}(M(q_1, q_2)) = \vec{F}(q_1, q_2)$

donc ~~$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint \vec{F}(q_1, q_2) \cdot d\vec{\Sigma} f(q_1) f(q_2)$~~

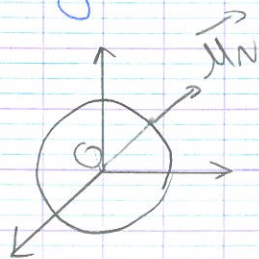
donc $\Phi = \iint_{\{q_1, q_2\}} \vec{F}(q_1, q_2) \cdot \vec{m}(q_1, q_2) f(q_1, q_2) dq_1 dq_2$



$$\begin{aligned} \iint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} &= \iint \vec{E}(M) \cdot d\vec{\Sigma} \vec{m}(M) = \vec{E} \cdot \vec{n} \iint d\Sigma(M) \\ &= \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot A \quad \text{si} \\ &= A \cdot \cos \theta \cdot E \end{aligned}$$

d. Exemple 2:

Flux du champ $\vec{E} = \vec{E}_k(M)$ à travers la sphère de centre O de rayon R



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$$

paramétrage: R, θ, ϕ (sphériques)
 $[0, \pi]$ $[0, 2\pi[$

$$d\Sigma = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\vec{n} = \vec{u}_n$$

$$\vec{E} = 3\vec{u}_3$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot d\Sigma \vec{n} &= R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, 3 \vec{u}_n \cdot \vec{u}_3 \\ &= R^3 \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{u}_n \cdot \vec{u}_3 \\ &= R^3 \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi = \oint_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} R^3 \cos^2\theta \sin\theta \, d\phi \, d\theta$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_0^{\pi} R^3 \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \\ &= -\frac{2\pi R^3}{3} (\cos^3\theta - \cos^3 0) \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3} = \text{volume de la sphère}$$

II Fonctions à plusieurs variables, différentielle

1. Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables $f(x,y)$

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

y fixé on pose $F(x) = f(x,y)$

si F est dérivable en un point

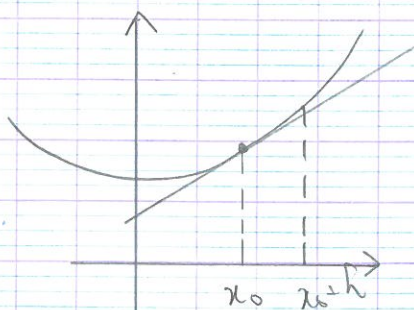
$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$ dérivée partielle de f par rapport à x au point considéré

de même si y est fixé on peut définir $G(y) = f(x, y)$ à x fixé

on a priori $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ dépendent de x et de y

2-Différentielle d'une fonction de 2 variables

a. Rappel: fonction d'une variable



$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{df}{dx} \bigg|_{x_0} \times h + hE(h)$$

avec $E(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

b. Différentielle de fonctions de 2 variables:

f (fonction à 2 var) est différentiable en (x_0, y_0) si il existe une fct linéaire $df: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

tg: $f(x_0 + u, y_0 + v) = f(x_0, y_0) + df(u, v) + \| (u, v) \| E(u, v)$

avec $E(u, v) \xrightarrow{\|(u, v)\| \rightarrow 0} 0$

c. Interprétation:

"A l'ordre 1" en $\|(u, v)\|$

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(u, v)$$

$u = x - x_0$
 $v = y - y_0$

"à l'ordre 1" en Taylor: $f(x, y)$

$$\Delta f \approx df(\delta x, \delta y)$$

variations de x, y

d- Expression de la diff pour une fonction de deux variables

* Cas particuliers: $v=0$

$$f(x_0 + u, y_0) = f(x_0, y_0) + df(u, 0) + |u| E(u)$$

$\rightarrow 0$

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ existe et que $df(u, 0) = \frac{\partial f}{\partial x} \times u$ $u \rightarrow 0$

De même $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et $df(0, v) = \frac{\partial f}{\partial y} \times v$

$$\text{Enfin } df(u, v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) u + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) v \quad \text{à } (x_0, y_0)$$

$$(u, v) = (u, 0) + (0, v)$$

conclusion $f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} (y - y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\| E(x - x_0, y - y_0)$

$$\rightarrow \Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \quad \text{"à l'ordre 1" en } (\delta x, \delta y)$$

$d \rightarrow$ une variable
 $\partial \rightarrow$ 2 variables

3. Règle de la chaîne:

$f(x, y)$, f différentiable
 on envisage un déplacement $x(t), y(t)$
 $F(t) = f(x(t), y(t))$

si f est différentiable alors F est dérivable

$$\text{et } \frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \quad \begin{matrix} t \\ t \end{matrix}$

4. Gradient d'un champ scalaire différentiable

a- Définition:

$df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ application linéaire
 forme linéaire

$$\exists! \vec{V} \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } df(\vec{r}) = \vec{V} \cdot \vec{r}, \text{ m chose } \vec{V} \in \mathbb{R}^2$$

$\downarrow$
 $\text{grad } f \text{ en } x_0, y_0, z_0$

de même avec 3 variables $f(x, y, z)$

$$\exists! \vec{V} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } df(\vec{r}) = \vec{V} \cdot \vec{r}$$

$\text{grad } f \text{ en } x_0, y_0, z_0$

dans l'espace affine E

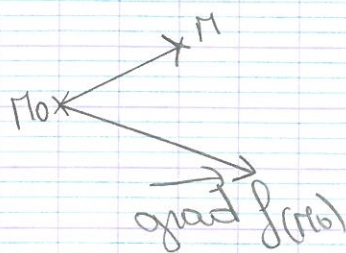
champ scalaire f app: $E \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \mapsto f(M)$$

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + df_{x_0, y_0, z_0}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) + \text{terme } o$$

$$\Rightarrow f(M) = f(M_0) + \underbrace{df_{M_0}}_{\text{grad } f \cdot \vec{MM_0}} + t.c$$

b. Ecriture utile:



$$df \approx \overrightarrow{\text{grad } f(r_0)} \cdot \overrightarrow{SM}$$

à l'ordre 1
en $\overrightarrow{SM}$

Ex pression du gradient
 $df(\overrightarrow{SM}) = \overrightarrow{\text{grad } f} \cdot \overrightarrow{SM}$

* Cartésiennes

$$f(x, y, z) \quad df(\delta x, \delta y, \delta z) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z$$

$$\overrightarrow{\text{grad } f} = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix} \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$$

$$= G_x \delta x + G_y \delta y + G_z \delta z$$

donc $\overrightarrow{\text{grad } f} = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix}$

* Cylindrique: (r, θ, z)

Champ scalaire $E \rightarrow \mathbb{R}$

$M \mapsto f(M) = g(r, \theta, z)$

on suppose g différentiable

$$dg(d\vec{r}, d\vec{\theta}, d\vec{z}) = \frac{\partial g}{\partial r} dr + \frac{\partial g}{\partial \theta} r d\theta + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$

$$= \vec{\text{grad}} g \cdot d\vec{M}$$

$$d\vec{M} = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{pmatrix} \quad \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$$

$$\vec{\text{grad}} g = \begin{pmatrix} G_r \\ G_\theta \\ G_z \end{pmatrix} \quad \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$$

$$= G_r dr + r G_\theta d\theta + G_z dz$$

donc $\vec{\text{grad}} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ r \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$

* sphérique $d\vec{M} = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin\theta d\phi \end{pmatrix} \quad \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi$

$$g(r, \theta, \phi)$$

$$dg(dr, d\theta, d\phi) = \frac{\partial g}{\partial r} dr + \frac{\partial g}{\partial \theta} r d\theta + \frac{\partial g}{\partial \phi} r \sin\theta d\phi$$

$$\vec{\text{grad}} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ r \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ r \sin\theta \frac{\partial g}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

d - Usage complémentaire du gradient en un point d'un champ scalaire

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0) \cdot \overrightarrow{dM} \quad (\text{ordre 1})$$



$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0)$ pointe la direction dans laquelle f varie le plus vite.

5 - Dérivée partielle d'ordre supérieur

a - Définition:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ exist.} : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ exist.} : \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

b - Théorème de Schwarz:

si les dérivées seconde existent au voisinage d'un point et sont continues en ce point alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

c - Développement limité d'ordre 2 d'une fonction de classe C^2 .

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} + o(h^2)$$

2 variables

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \delta x \delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \delta y^2 \right] + o(\delta x^2 + \delta y^2)$$

6- Recherche d'un extrémum local d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

a - Point critique de f :

définition : point où les dérivées d'ordres 1^{er} sont nulles.

b - Critère pour avoir un extrémum local ou non.

* Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$ au point critique étudié alors le point est ~~pas~~ un extrémum local

* Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$ au pt critique étudié

alors pas d'extrémum.

II Différentielle Logarithmique:

* def f a' valeurs dans $\mathbb{R}^+$

différentielle de $\log f$ = diff logarithmique de f

* Lien entre df et la diff logarithmique

$$df(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v$$

$$f(x+u, y+v) = f(x,y) + df(u,v) + \|u,v\| \varepsilon(u,v)$$

$$d \log f = \frac{\partial \log f}{\partial x} dx + \frac{\partial \log f}{\partial y} dy$$

$$\frac{d}{dx} \log F = \frac{1}{F} \frac{dF}{dx}$$

$$\text{donc } d(\log f) = \frac{1}{f} df$$

* application aux petites variations des variables

$$\delta f \approx df \text{ (petites variations de } x, y \text{) (approx.)}$$

$$\delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y$$

$$\text{en absolue} \rightarrow \delta(\log f) \approx \frac{\delta f}{f} \rightarrow \text{var relative}$$

* Cas particulier de fct monome:

$$f(x, y) = K x^\alpha y^\beta$$

$$\log f = \log K + \alpha \log x + \beta \log y$$

$$\frac{\delta f}{f} = \alpha \delta \log x + \beta \delta \log y$$

$$\frac{\delta f}{f} \underset{\substack{\text{à l'ordre 1} \\ \text{en } \delta x, \delta y}}{\approx} \alpha \times \frac{\delta x}{x} + \beta \frac{\delta y}{y}$$

exemple: pendule simple, petites oscillations

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



supposons que l soit variable.

donc $\frac{\delta T}{T} \approx \frac{1}{2} \frac{\delta p}{p}$, m'arrive: $\frac{\delta T}{T} \approx \frac{1}{2} \frac{\delta p}{p} + \frac{1}{2} \frac{\delta g}{g}$

fonction: $f(x,y) = k x^\alpha e^y$

$\log f = \log k + \alpha \log x + y$

donc $\frac{\delta f}{f} \approx \alpha \frac{\delta x}{x} + \delta y$

III Opérateurs différentiels usuels:

1. Opérateurs gradient:

a. Définition:

f champ scalaire différentiable $E \rightarrow \mathbb{R}$
 $M \mapsto f(M)$

en M : $df(\vec{\partial M}) = \text{grad } f(M) \cdot \vec{\partial M}$

$\text{grad } f(M) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x}(M) \\ \frac{\delta f}{\delta y}(M) \\ \frac{\delta f}{\delta z}(M) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
 $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$

$\text{grad } f \begin{matrix} E \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M \mapsto \text{grad } f(M) \end{matrix} \Rightarrow \text{Champ vectoriel}$

$\xrightarrow{\text{grad}} \{ \text{champs scalaires différentiables} \} \rightarrow \text{Champs vectoriels}$
 application gradient $f \mapsto \text{grad } f$

b. Propriété: linéarité de la fonction gradient
 entant que 2 espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

En effet on peut vérifier que $\text{grad}(f_1 + f_2) = \text{grad } f_1 + \text{grad } f_2$

On parle d'opérateur gradient
= application linéaire

2) Vecteur symbolique "noble".

en cartes réelles $\text{grad } f(M) = \vec{\nabla} f(M) =$

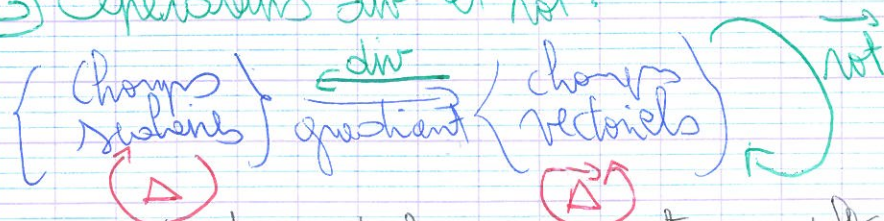
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

utilisable
uniquement
en cartes réelles

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f$$

3) Opérateurs div et $\vec{\text{rot}}$.



a- 3 opérateurs de base : opérateurs différentiels
d'ordre 1, $\vec{\text{grad}}$, $\vec{\text{rot}}$, div : (applin)
définies à partir de la notion de différentielle

b- Ecriture en données cartésiennes :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

$$\text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

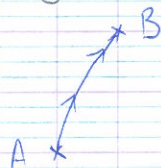
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \vec{\text{rot}} (\vec{E})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \text{div } \vec{E}(M)$$

④ Propriété de base de chaque opération

a - gradient

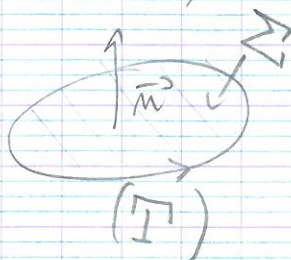


$$d f = \text{grad } f \cdot d\vec{M}$$

$$\int_A^B \text{grad } f \cdot d\vec{M} = f(B) - f(A)$$

circulation de $\text{grad } f$ sur Parc $\overline{AB}$

b - rotationnel (Stokes)



(S) s'appuie sur (Gamma) contour fermé

$$\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{M}$$

♥ • essayer pour $\vec{E} = E_0 \sin y \vec{e}_z$

c - Divergence (Green - Ostrogradski)

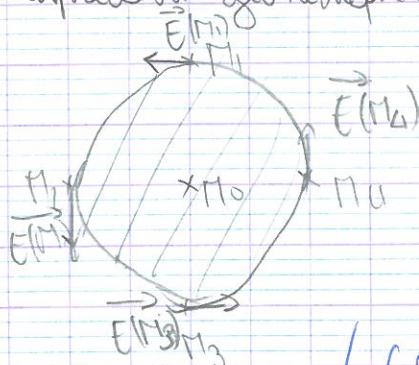


(Sigma) surface fermée

$$\iiint_V \text{div } \vec{E} \, dV = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

♥

4 - Interprétation géométrique :



$$\int_{\text{cercle autour de } M_0} \vec{E} \cdot d\vec{M} > 0 \quad / \quad \iint \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} > 0 \text{ (Stokes)}$$

à compléter (2-3 lignes) $\Rightarrow$ au voisinage de M_0 $\vec{\text{rot}} \vec{E} > 0$

5 - Autre ppt (voir 5, formulaire)

def: On appelle laplacien scalaire l'opérateur $f \mapsto \text{div}(\text{grad } f) = \Delta f$

ce champ scalaire vérifie:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix}$$

($\vec{M} \rightarrow \vec{M}_0$
($\vec{M}_0 \rightarrow \vec{M}$)
laplacien
vectoriel
du champ

qu'on note $\vec{\Delta}(\vec{E})$

Rq importante: E continue $(\vec{\Delta} \vec{E})_x = \Delta(E_x)$

2. Opérateurs appliqués à un produit:
voir 3, des du formulaire III.

6. Champs à circulation ou à flux conservatif (s)

a. Théorème de Poincaré:

$$\text{rot grad } f = \vec{0}$$

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{E})) = 0$$

↗

$$\vec{F} = \text{grad } f \quad \text{si } \vec{F} \text{ est un } \vec{\text{grad}}$$

$$\vec{G} = \text{rot}(\vec{E}) \quad \text{si } \vec{G} \text{ est rotationnel alors } \text{div}(\vec{G}) = 0$$

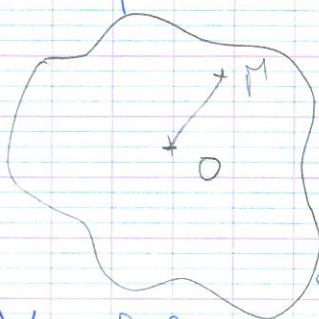
Réciproque?

si en tout point d'un ouvert étoilé

* $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$ alors il existe un champ scalaire f

$$\text{tq } \vec{F} = \text{grad } f$$

* $\text{div} \vec{F} = 0$ alors il existe un champ vect $\vec{A}$
tel que $\vec{F} = \text{rot} \vec{A}$



il existe O tel que $\forall$ les pts M
tel que pour tous du domaine
étudié le segment OM soit à l'intérieur
du domaine.

ouvert étoilé.

Vocabulaire: f est un potentiel scalaire dont
dérive $\vec{F}$

$\vec{A}$ est un potentiel vecteur dont dérive $\vec{F}$

il n'est pas unique $\vec{F} = -\text{grad } f_1 = -\text{grad } f_2$
donc $\text{grad } f_1 - \text{grad } f_2 = \vec{0}$ donc $f_1 - f_2 = \text{cte}$

pour div: $\vec{\text{rot}}(\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = \vec{0} \rightarrow \vec{A}_1 - \vec{A}_2 = -\vec{\text{grad}} \phi$

b. Champ de circulation conservatif ou de flux conservatif:

circulation
Champ conservatif

① $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$

② $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$

③ Pour tout contour fermé (Γ)
 $\oint_{(\Gamma)} \vec{E} d\vec{M} = 0$

④ pour tout Arc AB orienté

$\int_{AB} \vec{E} d\vec{M}$ ne dépend que de A et de B

→ les 4 propriétés sont équivalentes

① voir $\Rightarrow$ $\int_{AB} \vec{E} d\vec{M} = - \int_{AB} \vec{\text{grad}}(V) d\vec{M} = (V(B) - V(A))$

Flux conservatif

① $\exists \vec{A}: \vec{E} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$

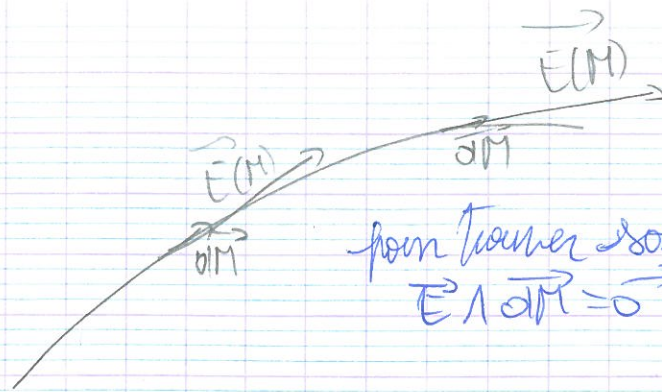
② $\text{div} \vec{E} = 0$ en tout point

③ $\oiint_{\Sigma_{\text{fermé}}} \vec{E} d\vec{\Sigma} = 0$ pour toute surface fermée

④ $\iint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{\Sigma}$ ne dépend que de (Γ) (si Σ détermine Γ)

c. Pour un champ de flux conservatif, son flux se conserve sur un tube de champ:

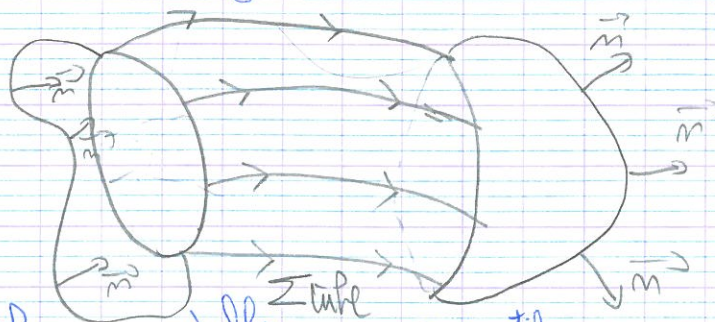
Ligne de champ d'un champ vectoriel $\vec{E}$:
courbe tangente en tout point M à $\vec{E}(M)$



pour trouver son expression:
 $\vec{E} \wedge d\vec{M} = \vec{0}$

* tube de champ

ensemble de ligne de champ entre des points d'un contour fermé



⊕ champ à flux conservatif
 $\rightarrow$ flux à travers (C)
 $=$ flux à travers (C')

$\{\Sigma_{\text{entrée}}, \Sigma_{\text{tube}}, \Sigma_{\text{sortie}}\}$

donc le qui précède

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 0 = -\phi_{\Sigma_{\text{entrée}}} + \phi_{\Sigma_{\text{tube}}} + \phi_{\Sigma_{\text{sortie}}}$$

$\{\Sigma_{\text{entrée}}, \Sigma_{\text{tube}}, \Sigma_{\text{sortie}}\}$

ou 'car' $\phi_{\Sigma_{\text{entrée}}} = \phi_{\Sigma_{\text{sortie}}}$

$\vec{E} \perp \vec{n} \rightarrow 0$