

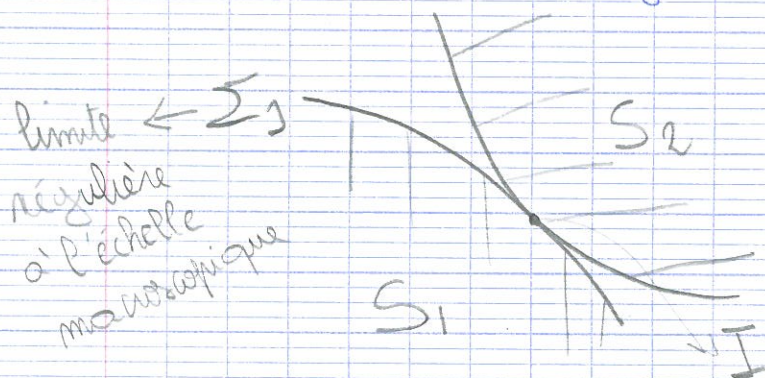
Contact entre solides

I Description générale du contact entre deux solides

II Description géométrique

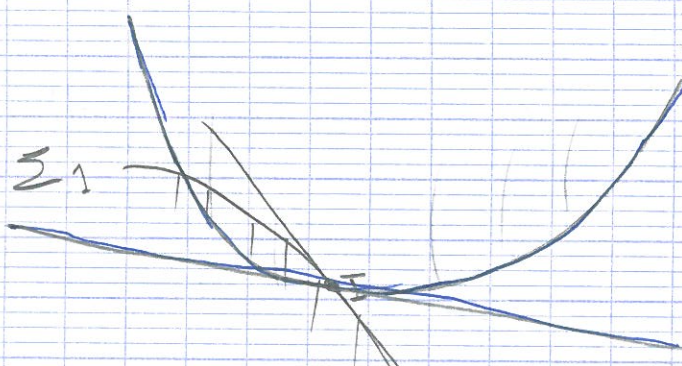
a. Modèle du contact quasi-ponctuel

Mécanique, solide parfaitement indéformable

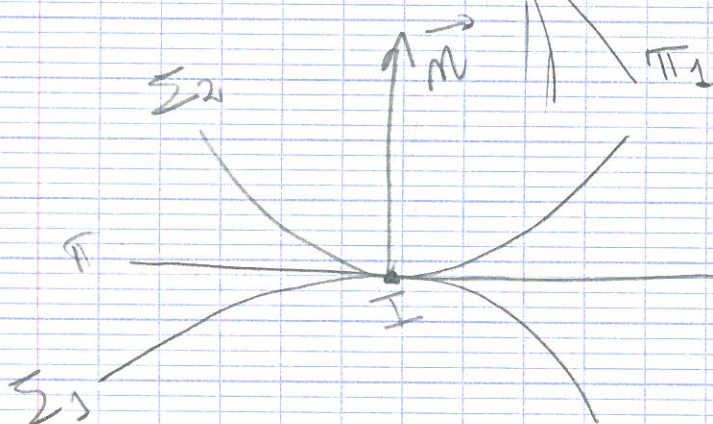


$\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ réduite à un point I
point de contact géométrique

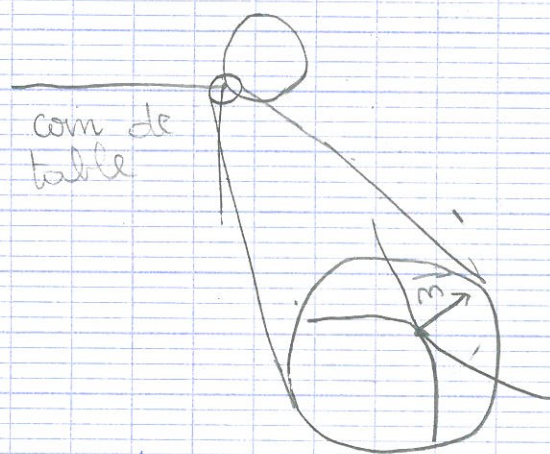
④ en I , Σ_1 et Σ_2 possèdent un plan tangent



→ mérisable
 $\Rightarrow \pi_1, \pi_2$ confondus
plan tangent commun



cas particuliers

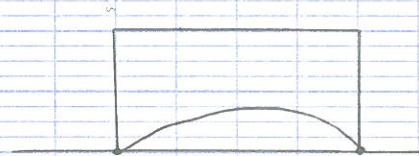
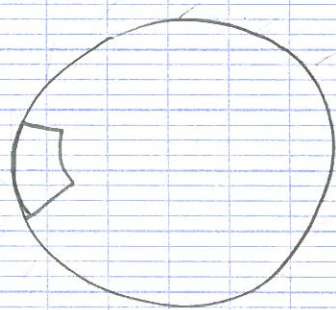


en présence d'un pt anguleux la normale est imposée par le solide ayant une surface régulière

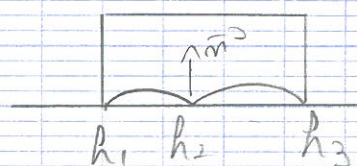
b) Contact étendu:
par exemple contact plan sur plan



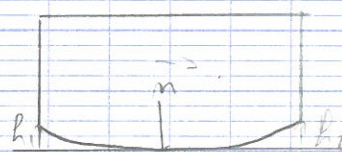
+ variante



ou



ou



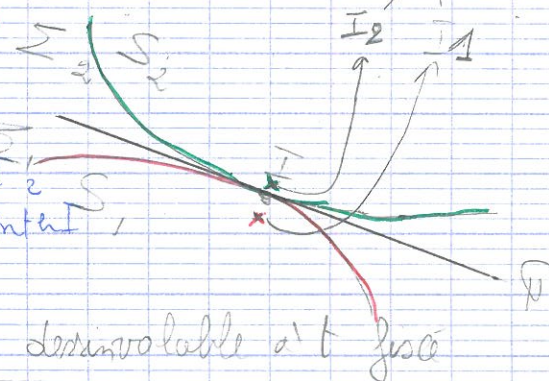
$h_1, h_2, h_3 \ll \text{autres dimensions}$

2) Description cinématique : vitesse de glissement.

① Contact ponctuel entre 2 solides

② Les points matériels en contact au I :

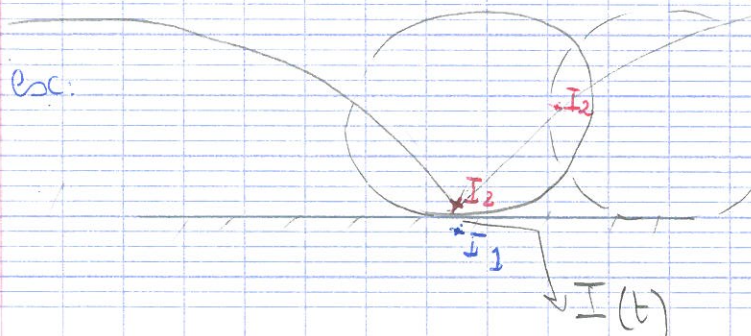
à t donné $\leftarrow$ un point matériel $\in S_1 : I_1$ et I_2 sont en I ,
 $\in S_2 : I_2$



deux molécules au même lieu

I_1 et I_2 se déplacent au cours du temps

derrière l'autre à t fixe



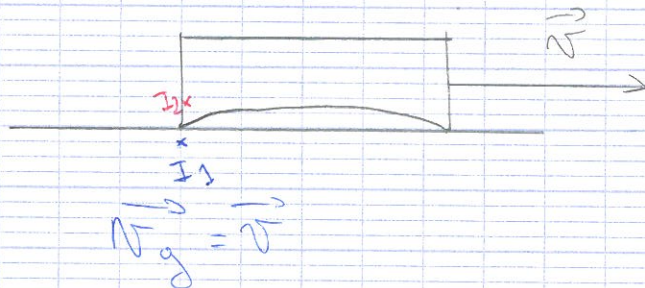
esc.

d'un point de vue physique
contact $\Rightarrow$ 1 molécule de solide 1
en I

b) Vitesse de glissement de 2 par rapport à 1 à t:

definition $\boxed{\vec{V}_{g(2/1)} = \vec{V}_{I_2(t)} - \vec{V}_{I_1(t)}}$ ($\vec{V}_{g(2/1)} = \vec{V}_{g(1/2)}$)

esc

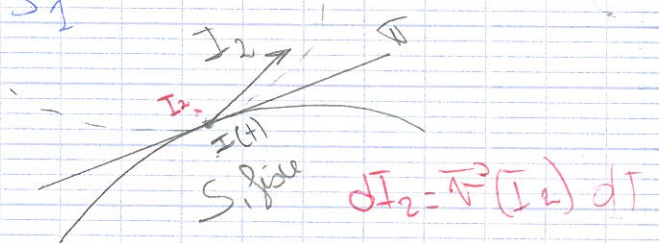


c) La vitesse de glissement est tangente à la surface du solide
 $\vec{V}_g \parallel$ plan tangent commun aux 2 solides

On se place dans le référentiel lié à S_1

$\rightarrow S_1$ est immobile

$\vec{V}_g = \vec{V}(I_2)$



$\vec{V}(I_2) \times \Pi \rightarrow I_2$ devant être

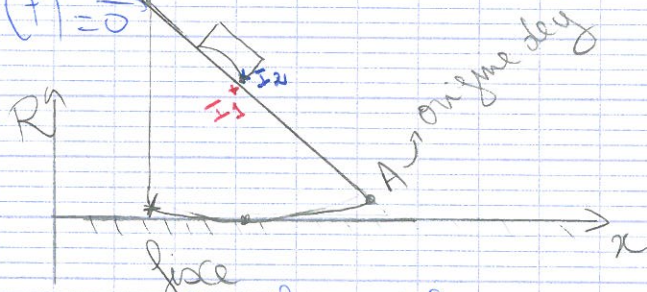
à l'intérieur de S_1 juste avant ou après $\rightarrow$ impossible

$\Rightarrow \vec{V}(I_2) \parallel \Pi$

d) Non glissement:

Def: Deux solides sont en contact sans glissement (à la date t)
 $\text{ou } \vec{V}_g(t) = \vec{0}$

e) Exemples

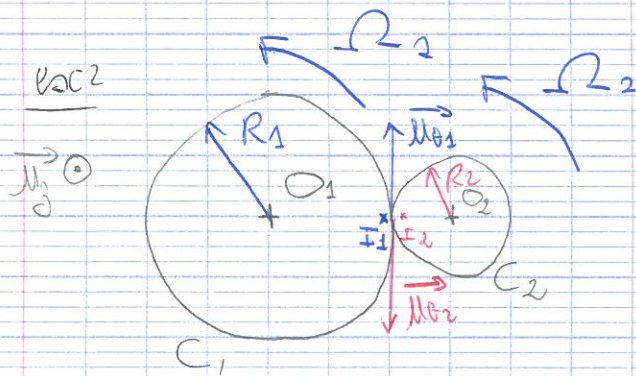


* paramètres de position
 prise en translation X
 posée

$\vec{V}_g$ = calculée dans le référentiel lié au prisme = $\dot{y} \vec{u}_y$

non glissement permanent $\Leftrightarrow \dot{y} = \alpha \Rightarrow y = \alpha t \Leftrightarrow$ prisme ne glisse pas par rapport au prisme $\Leftrightarrow$ l'ensemble des deux est un solide

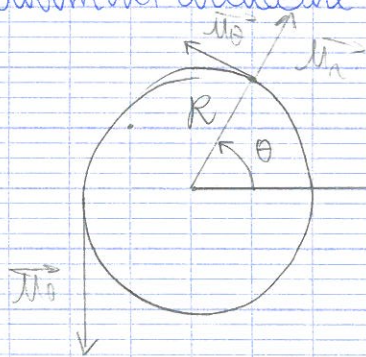
ne pas confondre véc méca du solide et du point
 solide : rotation
 point : caractérisé par sa trajectoire : Mvt circulaire



④ 2 cylindres en rotation autour de $(O_1, \vec{M}_3), (O_2, \vec{M}_3)$

I_1 : mouvement circulaire

I_2



$$\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{M}_\theta$$

$$\vec{v} = R \Omega \vec{M}_\theta$$

$$\vec{v}(I_1) = R_1 \Omega_1 \vec{M}_{\theta_1}$$

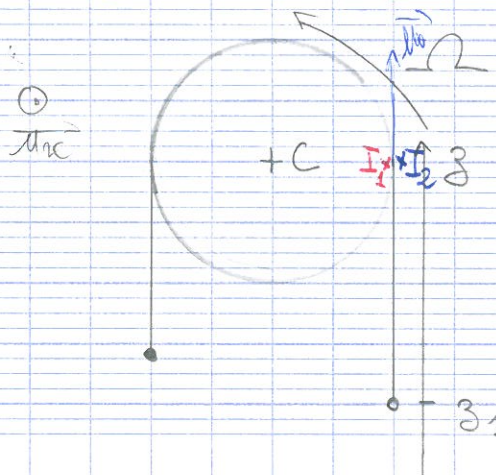
$$\vec{v}(I_2) = R_2 \Omega_2 \vec{M}_{\theta_2}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_g &= \vec{v}(I_2) - \vec{v}(I_1) = R_2 \Omega_2 \vec{M}_{\theta_2} - R_1 \Omega_1 \vec{M}_{\theta_1} \\ &= (R_2 \Omega_2 + R_1 \Omega_1) \vec{M}_{\theta_2} \end{aligned}$$

Cas particulier : non glissement

$$\vec{v}_g = \vec{0} \Leftrightarrow R_1 \Omega_1 + R_2 \Omega_2 = 0$$

Ex 3:



- poulie en rotation autour de C_x
- corde verticale (sauf en contact de poulie)
- corde inextensible

→ Paramètres de position

* poulie : angle de rotation θ , $\Omega = \dot{\theta}$

* masses m_1, m_2
corde inextensible

2 degrés de liberté

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_2) - \vec{v}(I_1)$$

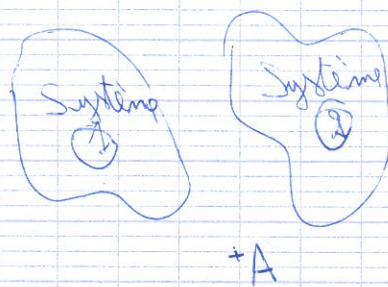
fil → c'est aussi la vitesse du point m_2

$$= \dot{z}_1 \vec{u}_3 - R \Omega \vec{u}_3$$

donc $\vec{v}_g = (\dot{z}_1 - R \Omega) \vec{u}_3$, non glissement $\Rightarrow \dot{z}_1 = R \Omega$
1 seul degré de liberté

3) Description dynamique du contact

a) Description des actions entre 2 systèmes



Toute interaction peut être décrite par la donnée d'une résultante des forces (force totale) et d'un moment en un point

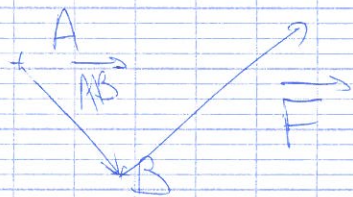
action de ① sur ② $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{T}(A)_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}$ données nécessaires pour déterminer l'action de ① sur ②

$$\vec{T}(B)_{1 \rightarrow 2} = \vec{T}(A)_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \wedge \vec{AB}$$

exemple : actions exercées par un dipôle électrique dans un champ $\vec{E}_{ext}$

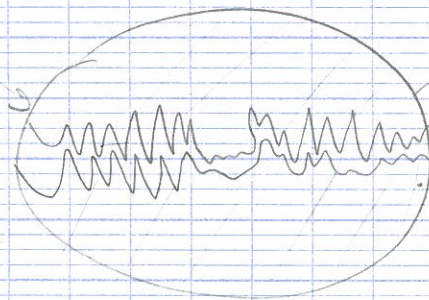
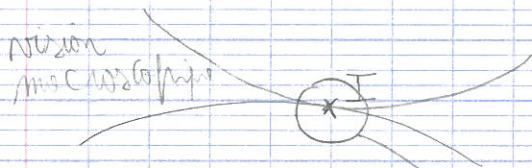
$\vec{F} = q_{tot} (\vec{P} \cdot \vec{E}_{ext})$ $\vec{p} = d\vec{e}$
 $\vec{T}(A) = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}(A)$

cas particulier très simple : s'il existe un point B tel que $\vec{T}(B) = \vec{0}$



on dit qu'on a une force $\vec{F}$ appliquée en B

b- Contact entre 2 solides - nature des solides



forces d'interaction d'origine électrostatique

calculable grâce à une connaissance détaillée des positions des particules

a) Description macroscopique de l'interaction ?

on a besoin de paramètre $\vec{F}$ $\vec{T}(A)$

pas des fonctions d'état = on a besoin des paramètres microscopique pour le calculer les paramètres macroscopiques ne suffisent pas

mais on peut faire des mesures

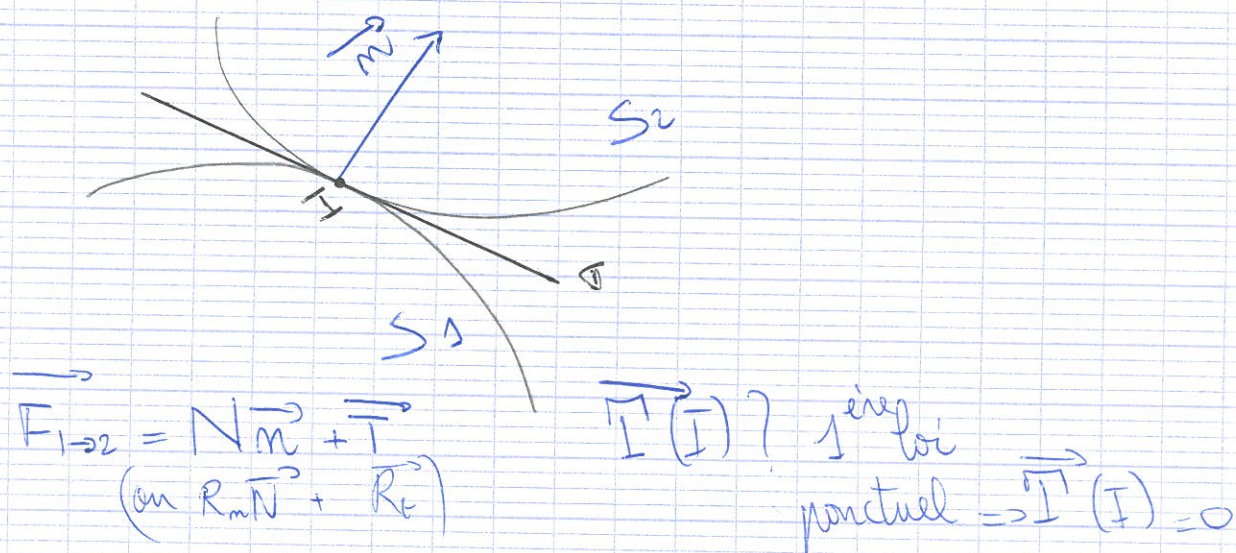
on va avoir recours à des lois expérimentales

Loi d'Amontons-Coulomb
1633 1780

expériences non vérifiées

a) Décomposition de l'action entre 2 solides

on se place dans le cadre du contact ponctuel



b) Principe général des lois de Coulomb

Les forces de contact $(\vec{N}, \vec{T})$ n'ont pas de valeur prédéfinies mais elles s'adaptent aux contraintes extérieures tant qu'on ne dépasse pas certaines limites.

c) Énoncé loi relative à la force normale:

La force normale s'ajuste pour maintenir le contact entre les solides mais elle ne peut être que répulsive (N ne peut être que > 0) si le calcul de la force nécessaire au maintien du contact donne une valeur $< 0 \rightarrow$ le contact va se rompre

d) Énoncé loi relatives ^{aux} à la force tangentielle:

* Si à une date donnée $\vec{v}_g = \vec{0}$ alors ultérieurement la force tangentielle s'ajuste pour maintenir le non glissement tant que c'est compatible avec $|\vec{T}| \leq f_0 N$

f_0 est caractéristique des matériaux en contact
 f_0 est le coefficient de frottement statique

* à une date où $\vec{v}_g \neq \vec{0}$

Alors $\vec{T}$

* $\parallel \vec{v}_g$

* sens opposé à la vitesse de glissement

* $|\vec{T}| = f N$

f est le coefficient de frottement dynamique $f \sim f_0, f < f_0$

aussi traduite en une seule équation : $\vec{T} = - \frac{f \vec{v}_g N}{\|\vec{v}_g\|} \quad (N \geq 0)$

c. Valeurs numériques

* pas de frottement : f et $f_0 \rightarrow 0$

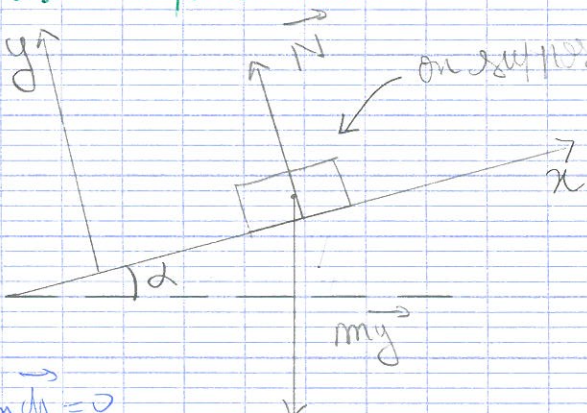
$$\boxed{\vec{T} = \vec{0} \text{ toujours}}$$

* en général $f, f_0 \in [0, 1[$

II Exemples d'utilisation

1) Pavé posé sur un plan incliné

on suppose que le contact est ponctuel



force $\vec{T}$ selon $\vec{u}_n$
2 cas possibles : symétriques
ou p.f.d. $\Rightarrow$ copassante selon $\vec{u}_g = 0$

pavé reste immobile?
état initial $\vec{v}_g = \vec{0}$
* actions subies : $m\vec{g}$, $N\vec{u}_y$, $T\vec{u}_n$
* pas de glissement : $m\vec{a}(G) = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

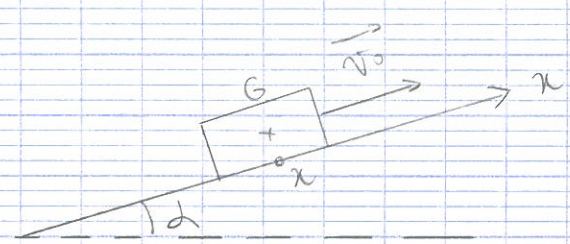
$$m\vec{g} + N\vec{u}_y + T\vec{u}_n = \vec{0}$$

* on projette sur $\vec{u}_g$: $-mg \sin \alpha + T = 0$
sur $\vec{u}_y$: $-mg \cos \alpha + N = 0$

$$T = mg \sin \alpha, \quad N = mg \cos \alpha \geq 0$$

OK si $T \leq f_0 N$, $\sin \alpha \leq f_0 \cos \alpha$, $\tan \alpha \leq f_0$.

2) Pavé lancé vers le haut d'un plan incliné



$\vec{v}_0 = x \vec{u}_n$, $x > 0$ initial

$\vec{T}$ selon $-\vec{u}_n$ avec $\|\vec{T}\| = fN$

$m\vec{a}(G) = m\vec{g} + N\vec{u}_y + T\vec{u}_n$, objet.

* $\vec{u}_n$: $m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + T$

* $\vec{M}_y$ $0 = -mg \cos \alpha + N \rightarrow N = mg \cos \alpha$

$T = -f mg \cos \alpha$

donc $\ddot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)$, mvt unif "accéléré"

$\dot{x} = -g t (\sin \alpha + f \cos \alpha) + \dot{x}_0 \Rightarrow$ valable pour $\dot{x} > 0$

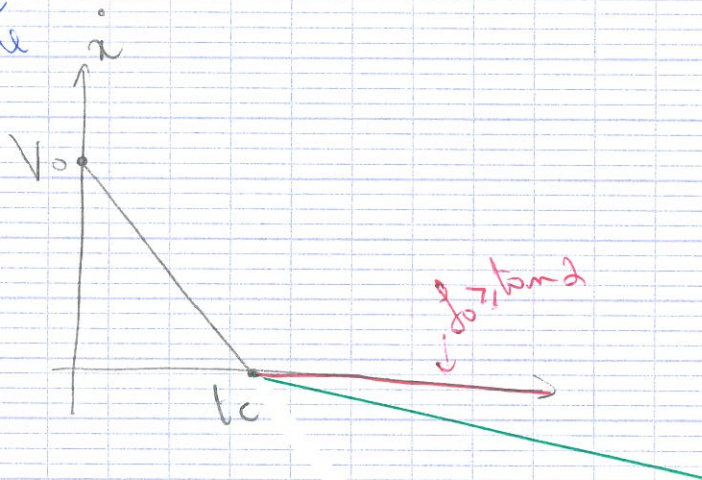
donc $t < \frac{\dot{x}_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = t_c$

pour $t = t_c$ $\vec{v}_g = \vec{0}$

si $\tan \alpha \leq f_0$ pour $t > t_c$ part immobile
 sinon si $\tan \alpha > f_0 > f$
 $\rightarrow$ glissement, f change de signe

$\Rightarrow$ même calcul, on remplace f par $-f$: $\ddot{x} = -g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$

Résumé



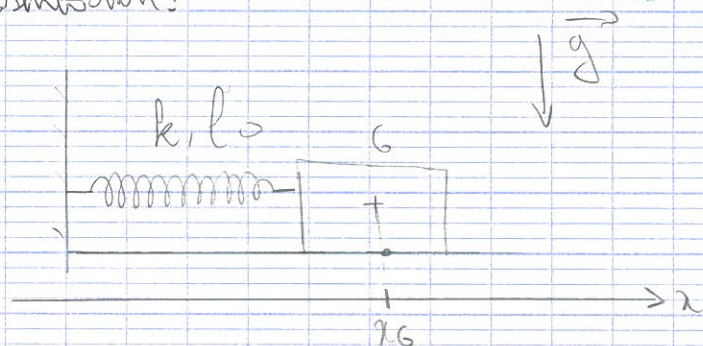
$= -g \cos \alpha (\sin \alpha - f)$
 $\#0$
 $\#0$

Miscellaneous etc : quand on marche
 ↖

③ Les frottements s'opposent au glissement mais pas au mouvement

④ Oscillateur harmonique avec frottement solide

① Présentation :



$$N\vec{g} = \dot{x} \vec{u}_x \text{ (translation)}$$

① Origine de l'axe x lorsque le ressort non tendu

$$\vec{F}_{\text{ressort}} = -kx \vec{u}_x$$

① Contact ponctuel $f \propto f_0$

② Possibilité d'équilibre (vitesse nulle)

$$* t=0, \dot{x}=0$$

$$* \sum \vec{F} = \vec{0} = -kx \vec{u}_x + m\vec{g} + N\vec{u}_y + T\vec{u}_x$$

$$mg \vec{u}_x - kx + T = 0$$

$$-mg + N = 0$$

$$N = mg, T = kx$$

vérification $|T| \leq f_0 N = f_0 mg$, $|x| \leq \frac{f_0 mg}{k}$ condition d'équilibre

③ Mise en équation dans le cas d'un glissement

① glissement vers la droite, $\dot{x} > 0 \Rightarrow T = -fN$

$$m\vec{a}(G) = \sum \vec{F}, \quad -kx + fmg = m\ddot{x}$$

$$-mg + N = 0$$

$$\rightarrow m\ddot{x} = -kx - fmg$$

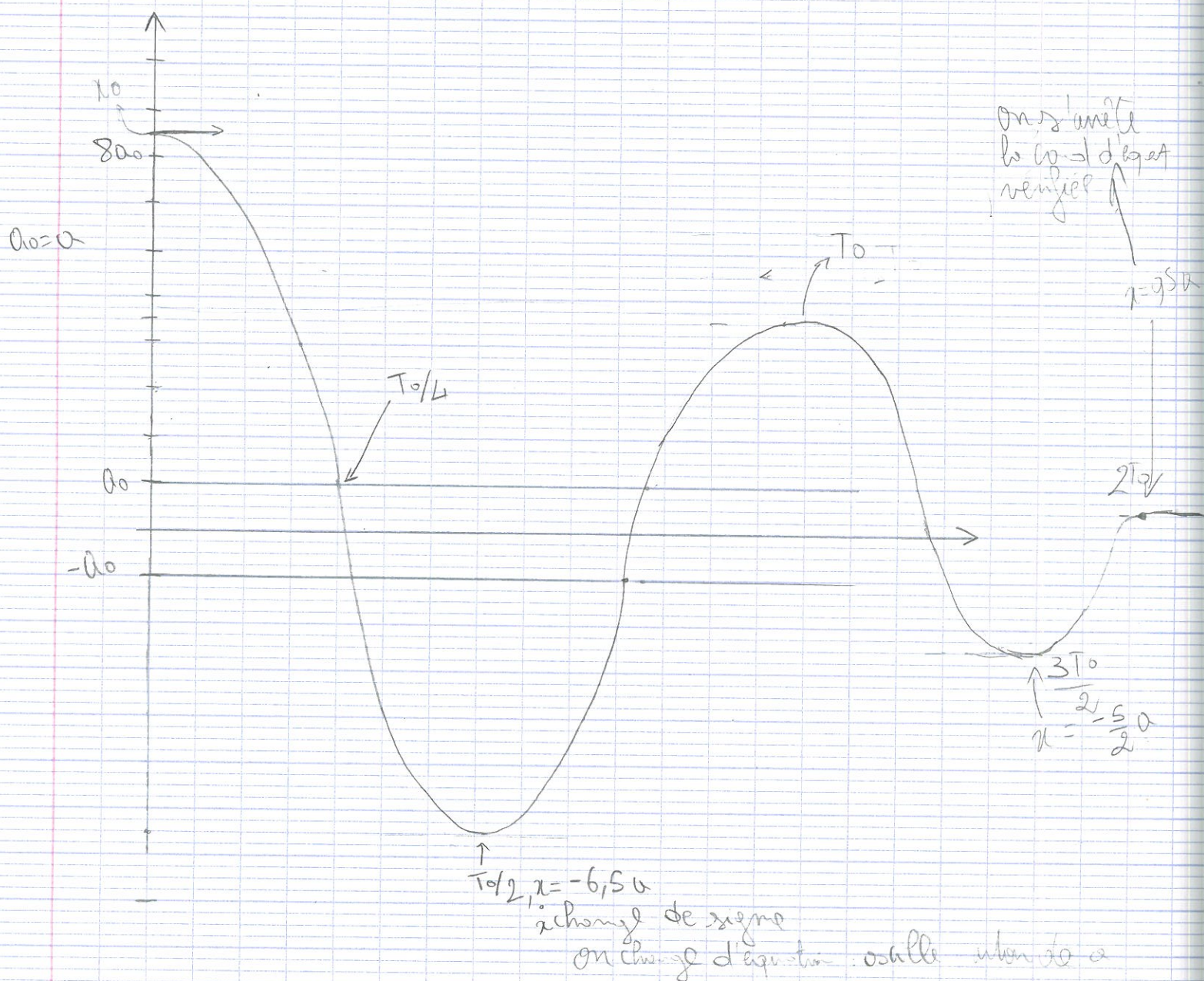
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x-a) = 0 \quad \text{pour } x < 0$$

interpretation: oscillation harmonique autour de $\varphi = 0$

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x-a) = 0 \quad \text{pour } x < 0$$

① Étude générale du mouvement $\dot{x}_0 = 0, x_0 \sim 8.5a$



Conclusion: Comparaison avec sciloteur harmonique et frottement fluide

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

frottement solide	frottement fluide
Mouvement pseudopériodique pseudopériode pseudopériode	pseudopériodique pour Q assez grand pseudopériode $\neq T_0$
dénominateur (proportion arithmétique de raideur $-4a = 4 \frac{f g m}{k}$) pour pseudopériode	amplitude décroissant exponentiellement $e^{-t/\tau}$ où $(\omega t + \varphi)$
immobilisation en une durée finie	pas d'équilibre atteint de façon asymptotique $t \rightarrow \infty$
état final $x \neq 0$ sauf coïncidence	$x_{\infty} = 0$ état final $x = 0$

III Aspects énergétiques

1) Rappel - puissance, travail

* Pour un simple point matériel soumis à une force appliquée en ce point

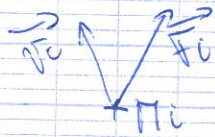


$$P_{\text{instantanée}}(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{\vec{M}} \vec{F} d\vec{OM}$$

= circulation de $\vec{F}(M)$ sur la trajectoire

* Pour un système complexe



$$\vec{P}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$P_{tot} = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$W_{total} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

* Pour un solide

- en translation $\rightarrow P_{totale} = \vec{F}_{totale} \cdot \vec{v}_G(t)$

- en rotation autour d'un axe fixe



$$P_{tot} = \vec{I}_{Oz} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\vec{I}_{Oz} = \vec{I}(O) \cdot \vec{n}_z \quad \text{avec } \vec{n}_z \in \vec{e}_z$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{n}_z$$

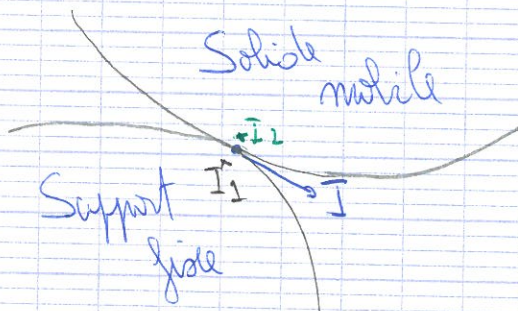
- cas général : lié au solide

$$P = \vec{F}_{tot} \cdot \vec{v}(A) + \vec{I}(A) \cdot \vec{\Omega}$$

dépend du référentiel
: toujours générale
choix du référentiel

2) Puissance des forces de contact sur un solide sur un support fixe

a) Expression de la puissance :
système étudié = solide



$$P_{système} = \vec{F}_{I_2} \cdot \vec{v}(I_2) + \vec{I}(I_2) \cdot \vec{\Omega} = \vec{F} \cdot \vec{v}_G$$

faible

faible

faible

faible

$$P = \vec{T} \cdot \vec{v}_g$$

b) Contact sans frottement:
 $\vec{T} = \vec{0} \Rightarrow P_{\text{contact}} = 0$

c) Pas de glissement:
 $\vec{v}_g = \vec{0} \Rightarrow P_{\text{contact}} = 0$

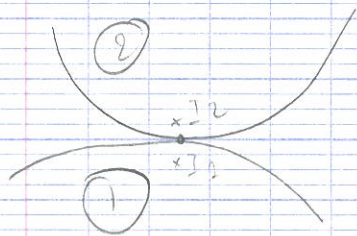
d) Glissement avec frottement

$$P = -fN \|\vec{v}_g\| < 0$$

3) Puissance des forces de contact entre 2 solides en mouvement quelconque

(système considéré = {2 solides}), forces de contact = forces internes

a) Expression générale:



$$P_{\text{subie par 2}} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(I_2) + \vec{I}(I_2) \cdot \vec{R}_2$$

$$P_{\text{subie par 1}} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(I_1)$$

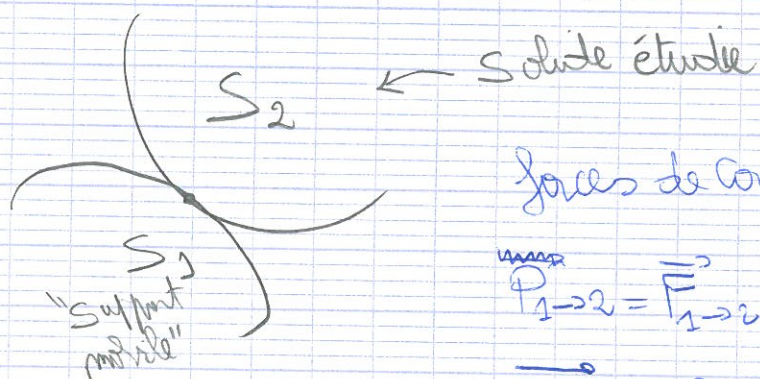
$$\begin{aligned} P_{\text{totale}} &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}(I_2) - \vec{v}(I_1)) \\ &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g = \vec{T} \cdot \vec{v}_g \end{aligned}$$

b) Contact sans f^+ :
 $P_{\text{tot}} = 0$

c) Contact sans glissement

d) Globalement avec frottement
 $P_{\text{totale}} = -fN \|\vec{v}_g\|$

④ Cas d'un solide en contact avec un support mobile



forces de contact = forces externes

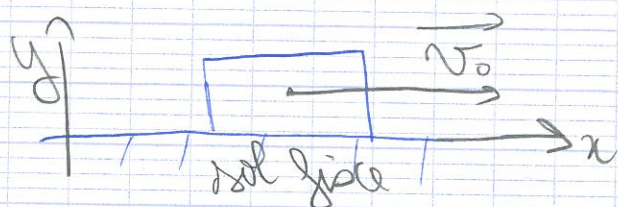
$$P_{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(I_2)$$

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_2) - \vec{v}(I_1)$$

$$P_{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(I_1)$$

$$P_{1 \rightarrow 2} = \vec{T} \cdot \vec{v}_g + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(I_1)$$

⑤ Exemple d'utilisation de l'énergie:



: mouvement de translation rectiligne $\vec{v} = v \vec{u}_x$
à $t=0$, $(v, v_0) > 0$

Quelle est la distance parcourue avant l'immobilisation?

a) Avec loi de qdm : glissement : $\vec{T} = T \vec{u}_x$ [$T < 0$]

$$T = -fN$$

$$m \ddot{x} = T \quad | \quad 0 = N - mg \quad | \quad T = -fmg$$

$$\ddot{x} = -fg \rightarrow x = -\frac{fg}{2} t^2 + v_0 t$$

$$\text{arrêt : } \dot{x} = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{fg} \rightarrow x = \frac{v_0^2}{fg} - \frac{fg}{2} \frac{v_0^2}{(fg)^2}$$

$$\text{et donc } \gamma_g = \frac{V_0^2}{2g}$$

b- Avec énergie cinétique

$$\Delta E_c = W_{\text{toutes forces}} = \cancel{W_{\text{poids}}} + W_{\text{contact}}$$

$$P_{\text{contact}} = \vec{T} \cdot \vec{v}_g$$

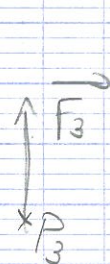
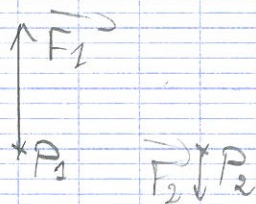
$$W = \int P dt = - \int m g l_{\text{proune}}$$

$$\Delta E_c = E_g - E_i = -\frac{1}{2} m V_0^2$$

$$\text{et alors } l_{\text{proune}} = \frac{V_0^2}{2g}$$

IV Applications, compléments, exemples

D Réduction d'un système de forces appliquées en des points précis et de résultante parallèles



$$\vec{F}_k = F_k \vec{u}_3$$

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(O) \text{ (ensemble des forces)} &= \sum_k \vec{OP}_k \wedge \vec{F}_k \\ &= \left(\sum_k F_k \vec{OP}_k \right) \wedge \vec{u}_3 \end{aligned}$$

Barycentre $\{P_k\}$ avec poids $\{F_k\}$ défini si $\sum F_k \neq 0$

$$\vec{OB} = \frac{\sum F_k \vec{OP}_k}{\sum F_k}$$

def intrinsèque: B est l'unique point vérifiant la relation:

$$\sum \vec{F}_k \overrightarrow{BP_k} = \vec{0}$$

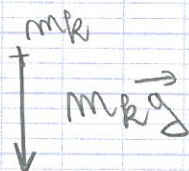
par exemple le centre de masse d'un ensemble de points: $\vec{OG} = \frac{\sum m_k \vec{OG_k}}{\sum m_k} \Leftrightarrow \sum m_k \vec{GP_k} = \vec{0}$

$$\vec{\Gamma}(O) = \vec{OB} \wedge \left(\sum \vec{F}_k \right) \vec{u}_z = \vec{OB} \wedge \sum \vec{F}_k = \vec{OB} \wedge \vec{F}_{\text{totale}}$$

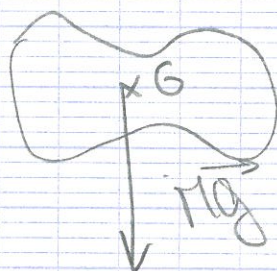
Dans le cas où $\sum \vec{F}_k \neq \vec{0}$

L'ensemble des forces parallèles entre elles est équivalent à une force appliquée au barycentre des (P_k, F_k)

Pour les forces de pesanteur, dans un champ de pesanteur uniforme



B = ~~G~~ $\vec{G}$
centre d'inertie



$$\sum \vec{F}_k = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma}(O) = \sum \vec{OP_k} \wedge \vec{F}_k$$

$$\vec{\Gamma}(O') = \sum \vec{O'P_k} \wedge \vec{F}_k$$

$$\vec{\Gamma}(O) - \vec{\Gamma}(O') = \sum \vec{OO'} \wedge \vec{F}_k = \underbrace{\vec{OO'}}_0 \wedge \underbrace{\sum \vec{F}_k}_0 = \vec{0}$$

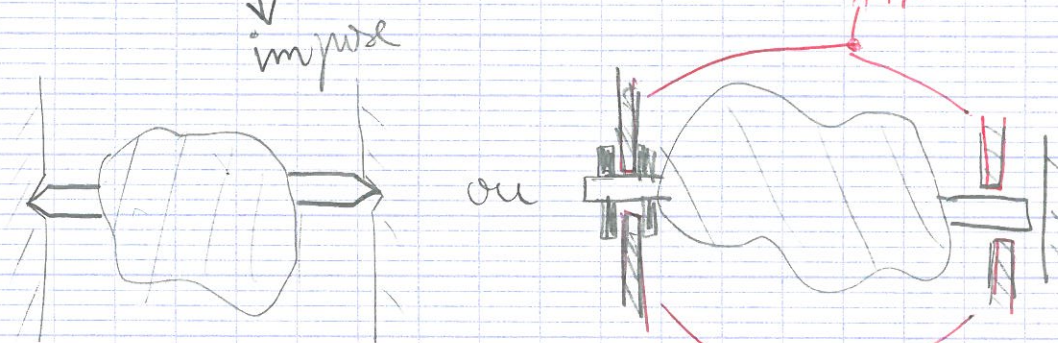
$\vec{I}(O)$ est indépendant de O

On dit que le système de forces est un couple

2) Liaison pivot

a) Définition et réalisation

Liaison pivot : permet le mouvement d'un solide ^{en rotation} autour d'un axe de rotation fixe



b - Forces de contact, travail des forces de contact

$$P = \vec{I}_\Delta \cdot \vec{\Omega}$$

* puissance de contact du support $\rightarrow$ solide: $P = \vec{I}_\Delta \cdot \vec{\Omega}$

pas de frottement, support fixe $P_{\text{contact}} = 0 \forall \vec{\Omega}$.

$\vec{I}_\Delta = 0$: liaison pivot parfaite

pas de frot

$$\vec{I}_\Delta = 0$$

$$P_{\text{contact}} = 0$$

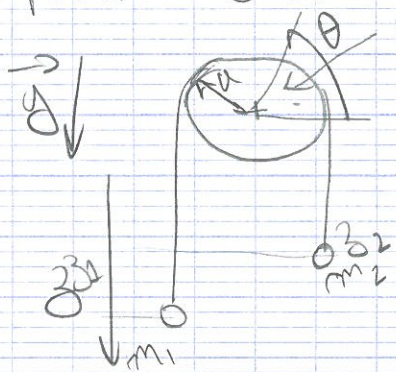
interprétation à partir des forces de contact:

$$\vec{I}(O) \vec{F}_1 = \underbrace{\vec{OO}_1}_{\perp \vec{OO}_1} \wedge \vec{F}_1 \quad \left| \quad \vec{I}(O) \cdot \vec{\Omega} = 0 \quad / \quad \vec{I}_\Delta = 0 \right.$$

mvmt de rotation autour d'un axe fixe $\Rightarrow$ quasi impossible sans support

présence de support $\Rightarrow$ forces $\Rightarrow$ travail.

3) Machine d'Atwood



roule en rotation autour d'un axe fixe horizontal

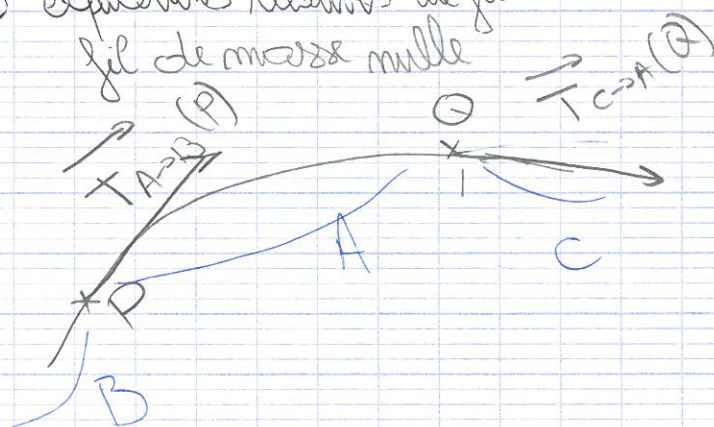
hyp: partie parfaite:

* liaison pivot parfaite

* centre d'inertie sur l'axe de rotation

fil inextensible, de masse négligeable, fil souple

a) équations relatives au fil fil de masse nulle



loi de la qdm $\rightarrow$ A

$$m \vec{a}(G) = \sum \vec{F}_{ext}$$

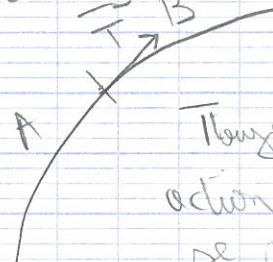
(H) pas d'autres forces autre que la tension et le poids.

$$\vec{T}(Q) - \vec{T}(P) = 0$$

$\vec{T}$ est le même partout
 $\rightarrow$ fil rectiligne



fil souple



Toujours attractive
action de B sur A
se réduit à une
force tangente au fil

appliquée en P

6. Mise en équation

Dans le cas où il n'y a pas de glissement du fil sur la poulie

$$\ast m_1 \ddot{z}_1 = m_2 g - T_1 \quad (1)$$

$$\rightarrow m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - T_2 \quad (9)$$

$$z_1 + z_2 = 6 \text{ste } (5)$$

* Pontilic + Pont de Jil

$$\frac{d}{dt}(L_A) = \frac{1}{\Delta t} \Delta \text{est}$$

tension

~~with~~

Liaison mist

posse per l'ole

Oxidationsprodukte

$$L_{\Delta \text{ partiel}} + L_{\Delta \text{ fil}}$$

$$\gamma \frac{d\Omega}{dt} = a (\overline{T_1 - T_2}) \quad (3)$$

+ non glissement fil roulant $\dot{z}_2 = a \Omega$ (4)

$$B_2 = -Z_2 \Rightarrow T_2 = m_1 g - m_1 B_1$$

$$-R = \ddot{z}_1/a \quad | \quad T_2 = m_2 g - m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g + m_2 \ddot{z}_1$$

$$\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{z}}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{z}}_1 - m_2 \mathbf{g} - m_2 \ddot{\mathbf{z}}_{\text{man}}$$

$$(m_1 + m_2 + \frac{M}{a_2}) \vec{z}_1 = (m_1 - m_2) \vec{g}$$

Manuscrit méthode: plutôt utiliser l'énergie.

c) Bonne méthode :

$$E_m = c\bar{e} \quad | \quad 1 \text{ degré de liberté} \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = -\dot{z}_2 \\ \dot{z}_1 = a\Omega \end{cases}$$

système { poulie corde masses m_1, m_2 }

contact poulie - corde

- inélastique

- ~~non déformable~~ glissement

poulie - liaison pivot

parfait

$$E_m = c\bar{e} = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} J \Omega^2 + m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

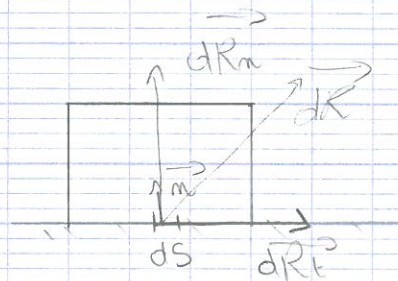
on remplace etc etc bon

+ $m_p g z_{\text{poulie}}$
etc

+) Contacts non ponctuels



→ modélisation
actions de contact

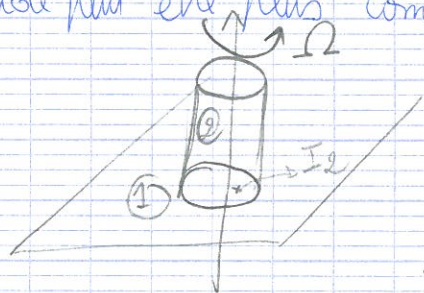


→ annule le v en
laissant q seul

→ sur ds : force appliquée dR vérifie les lois de Coulomb →

$$\begin{aligned} |dR_n| \text{ repulsive } dR_n \cdot \vec{n} &\geq 0 \\ |dR_t| \text{ vérifie } \rightarrow \text{non glissement } dR_t &\leq \mu |dR_n| \\ \rightarrow \text{glissement } dR_t &= - \int \frac{\vec{v} \cdot \vec{g}}{\|\vec{v}\|} dR_n \end{aligned}$$

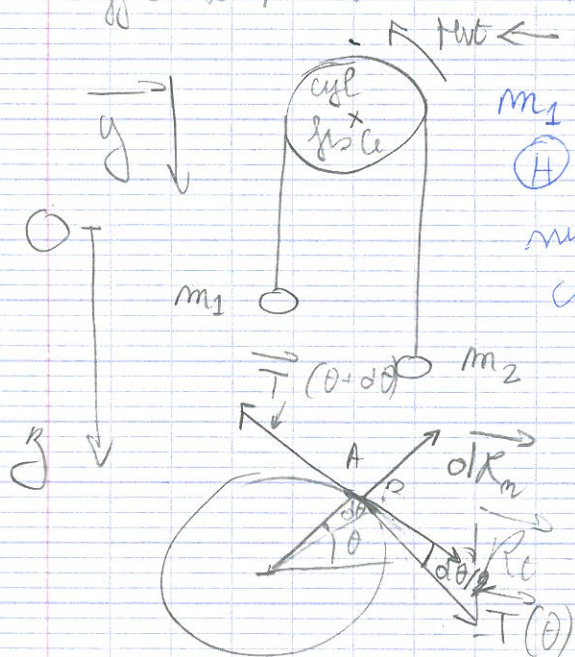
l'étude peut être plus compliquée:



on fait pas d'approx
le dév. radial
de dR_t

5) Exemples de contact non ponctuel : glissement d'une corde sur un cylindre fixe:

diff de la machine d'Atwood : Pas une particule



$m_1 > m_2 \rightarrow$ glissement de la corde?

(H) corde = fil sans raideur, de masse nulle, inextensible

contact avec cylindre: f (f^e polynôme)

(H) dans du glissement m_1 descend

système étudié: corde entre A et B

Forces: $\vec{T}$ action de gauche sur droite

2ème loi de Newton

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p} \frac{ds}{ds} + d\vec{R}_n + d\vec{R}_t + \vec{T}(\theta + d\theta) - \vec{T}(\theta)$$

fil sans masse

① On projette sur la normale: $dR_n = T(\theta + d\theta) \sin \frac{d\theta}{2} - T(\theta) \sin \frac{d\theta}{2} = 0$

② sur la tg

$$dR_t = T(\theta) \cos \frac{d\theta}{2} - T(\theta + d\theta) \cos \frac{d\theta}{2}$$

on peut écrire (ça fait un terme d'ordre 2)

$$\Rightarrow dR_n = (T(\theta + d\theta) - T(\theta)) \frac{d\theta}{2}$$

$$\frac{dR_t}{d\theta} = T(\theta) - T(\theta + d\theta) \sim -\frac{dT}{d\theta} d\theta$$

loi de Coul. $\int dR_t = \frac{dT}{d\theta} d\theta$

$$dR_m = T(\theta) d\theta \quad (\text{on fait } T(\theta+d\theta) d\theta = T(\theta) d\theta)$$

$$\text{donc } \int T(\theta) d\theta = \frac{dT}{d\theta} d\theta \rightarrow \int T(\theta) = \frac{dT}{d\theta}$$

équation différentielle

$$\text{on trouve } T(\theta) = T(0)e^{\theta}$$

loi de la qte de Mvt:

$$(m_1): m_1 \ddot{z} = m_1 g - T(0)e^{\theta}$$

$$(m_2): m_2 \ddot{z} = m_2 g - T(0)$$

2 inconnus: $\ddot{z}$, $T(0)$ et 2 équations - 2K

$$\text{On fini: } T(0) = m_2 \ddot{z} + m_2 g$$

$$\hookrightarrow m_1 \ddot{z} = m_1 g - (m_2 \ddot{z} + m_2 g) e^{\theta}$$

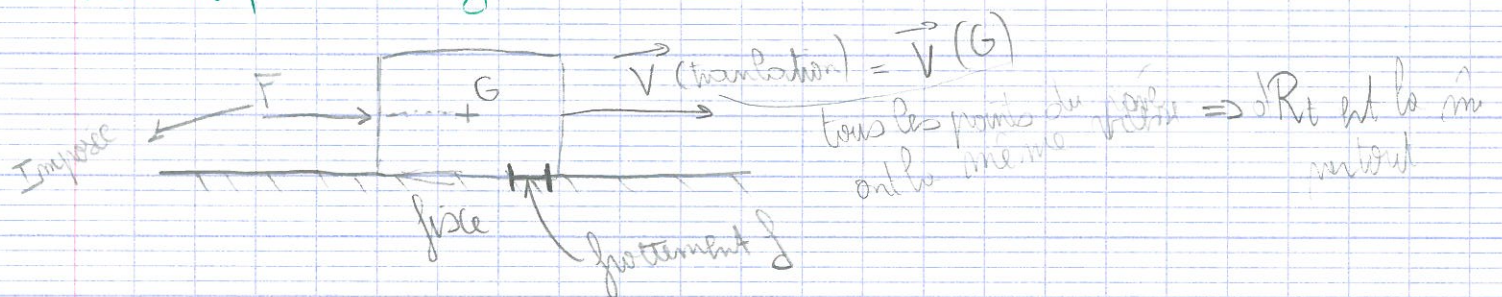
$$\text{donc } (m_1 + m_2 e^{\theta}) \ddot{z} = (m_1 - m_2 e^{\theta}) g$$

$$\text{donc } \ddot{z} = \frac{m_1 - m_2 e^{\theta}}{m_1 + m_2 e^{\theta}} g$$

discussion: à $t=0$, système immobile (glissement Peyer)

glissement ultérieur? oui si $\ddot{z} > 0$, donc si $\frac{m_1}{m_2} > e^{\theta}$

Exemple de contact non ponctuel: pure glissement en translation sur un plan horizontal



12/4

$$d\vec{R}_t = - \int \vec{u}_n dR_n$$

$$\int d\vec{R}_t = - \int \int \vec{u}_n dR_n = - \int u_n \int dR_n$$

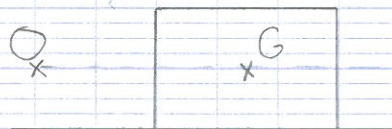
$$\boxed{\vec{R}_{t, tot} = - \int R_n \cdot \vec{u}_n}$$

$\{dR_n\}$ est équivalent à une force unique appliquée au long des points de contact affectés des coef dR_n
 $\{dR_t\} \longrightarrow dR_t$

étude du mouvement :
 $R_n = mg$

$$m \frac{dV}{dt} = F - R_t = F - \int mg$$

Soit O un point fixe $\frac{d\vec{L}(O)}{dt} = \vec{T}(O)$!!!



solide en translation
 qte de mv
 moment cinétique
 énergie cinétique

grandeurs cinétiques s'expriment de la même façon si le système était un simple point de masse $m_{solide} / m_{élémt}$

Reste vrai pour un mouvement plus complexe

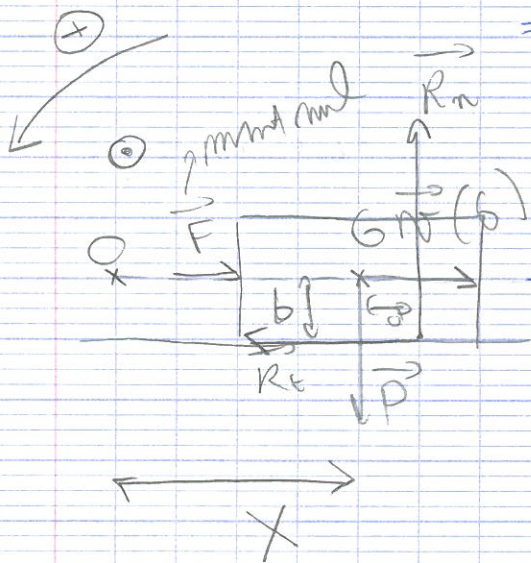
- ① $\vec{p} = m \vec{v}(G)$
- ② $\vec{L}(O) = \vec{OG} \wedge m \vec{v}(G)$
- ③ $E_c = \frac{1}{2} m v^2(G)$

dém du ② : $L(O) = \int \vec{OM} \wedge dm \vec{v}(M)$

$$= \int \vec{OM} dm \wedge \vec{v}(G) \quad (\text{car tous ont } \vec{v})$$

$$= m_{\text{tot}} \vec{OG} \wedge \vec{v}(G)$$

$$\vec{L}(O) = \vec{0}$$



$$-Xmg + (X+d)R_m - R_f b = 0$$

$$\text{donc } -Xmg + Xmg + dmg - fmg b = 0$$

alors $\boxed{d = f \cdot b}$

B = Pourcentage de points de contact avec
 corps $dR_m \geq 0$
 $d \leq a$, $\boxed{f b \leq a}$

nécessaire pour éviter le basculement

7. Anclage



Peut-on faire glisser le solide
 (à partir d'une vitesse nulle)
 en exerçant une force de direction
 choisie et de module assez grand

(H) Poids négligeable

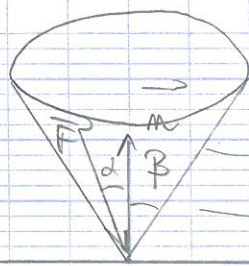
- Reste immobile tant que $|R_f| \leq f_0 R_m$

$$- \text{si } \vec{F} = \vec{0} \quad R_m = F \cos d$$

$$R_f = F \sin d$$

$$\hookrightarrow F \sin d \leq f_0 F \cos d$$

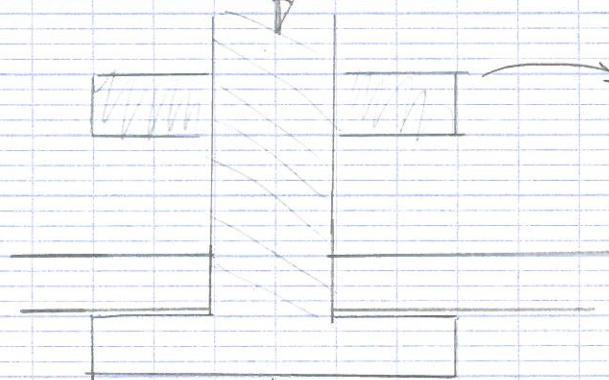
$$\hookrightarrow \tan d \leq f_0$$



$$\tan \beta_0 = f_0, \quad \alpha \leq \beta_0$$

→ cône de frottement statique

non glissement tant que F est autre que contact
→ est "dans le cône de frottement".



→ on doit respecter $\alpha \leq \alpha_{\text{crit}} = \beta_0$

pour que si on
tire sur le rebord ça ne se déplace pas