Conduction thermique

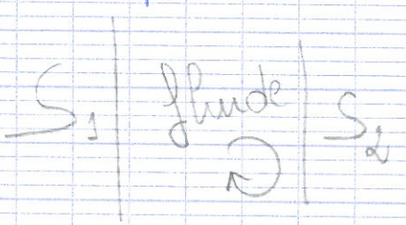
I Présentation

1) Modes de transferts thermiques d'énergie

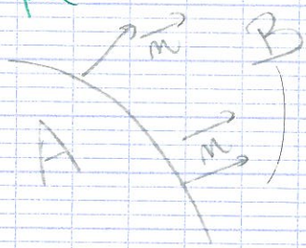
Tout transfert thermique d'énergie non interprétable par une force dont le point d'application se déplace à l'échelle macroscopique

modes de transfert thermique:

* Conduction: nécessite d'un support matériel en général immobile
* Rayonnement: pas besoin de support matériel
* Convection: présence d'un fluide en mouvement



2) Grandeurs physique fondamentales pour l'étude du transfert thermique



$\vec{n}$ oriente algébriquement le transfert thermique.

Puissance thermique à travers Σ = $\mathcal{D}$ énergie orienté $A \to B$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta Q \text{ à travers } \Sigma}{\delta t}$$

$$P_{th} = \iint_{\Sigma} \varphi \, d\Sigma$$

φ : puissance surfacique (instantanée) : $\varphi(P,t)$ (peut éventuellement dépendre du temps)

Vocabulaire: $P_{th} = \Phi$: flux thermique total

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \varphi \, d\Sigma$$

⚠ ne pas confondre flux thermique total et flux thermique surfacique.

II Lois générales régissant la conduction thermique

1) Vecteur densité de courant thermique :

champ vectoriel

À tout débit d'une grandeur extensive on peut associer un champ vectoriel $\vec{j}$ tel que pour toute surface Σ : $D_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}$

appliqué au transfert $P_{th,\Sigma} = \iint_\Sigma \vec{j}_{th} \cdot d\vec{\Sigma}$, $\vec{j}_{th}$ densité de courant th | de flux th

$P_{th} = \iint \vec{j}_{th} \cdot \vec{n}\, d\Sigma = \iint \varphi\, d\Sigma \rightarrow$ donc $\varphi = \vec{j}_{th} \cdot \vec{n}$

2) Equations bilan d'énergie :

a) Version globale

Les cas envisagés | solide immobile
fluide immobile



transfert pouvant être thermique à travers Σ

Surface fermée $\vec{n}$ pointe vers l'extérieur

puissance reçue par $d\tau$: $dP = p\, d\tau$ | pas de travail au niveau de Σ (pas de mouvement)

énergie reçue $\delta W = p\, d\tau\, dt$

$-P_{th \text{ à travers } \Sigma}$ par exemple $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}_{el} \cdot \vec{E} = p_{el}$

$\frac{dU}{dt} = \overbrace{P_{th \text{ reçue}}} + \iiint_V p\, d\tau$

donc $\frac{dU_V}{dt} + P_{th \text{ à travers } \Sigma} = \iiint p\, d\tau$

b) Version locale :

$P_{th} = \oiint_\Sigma \vec{j}_{th} \cdot d\vec{\Sigma} = \iiint \operatorname{div} \vec{j}_{th}\, d\tau$ | $\frac{dU}{dt} = ?$



$U = \iiint$ contribution de chaque volume

$dU = \iiint$ variations associées à chaque volume

variation de U $= C\,dT$

↓ capacité thermique du volume $d\tau$

$C = c_p\, d\tau$ → cp th massique

$dT = \frac{\partial T}{\partial t}\,dt$

$dU = \iiint \rho c\, d\tau \frac{\partial T}{\partial t}\,dt$

donc $\frac{dU}{dt} = \iiint_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\,d\tau$

on rassemble : $\iiint_V \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{th} - p\right) d\tau = 0$: valable pour tout volume V : en tout point en tout t et toujours

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{th} = p$$

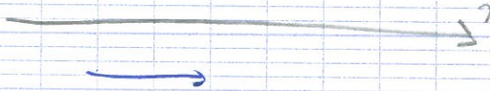
→ pas au programme mais il faut savoir la démontrer en dim 1 et en cylindrique

toujours vrai

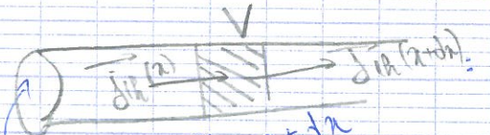
② Démonstration en régime unidimensionnel en cartésien

une seule coordonnée de l'espace joue un rôle

coordonnée x



$\vec{j}_{th} = j_{th}(x,t)\,\vec{u}_x$



1er principe :

$dU = \delta Q + \delta W$

$= \left(j_{th}(x)\,S - j_{th}(x+dx)\,S\right) dt + p\,S\,dx\,dt$

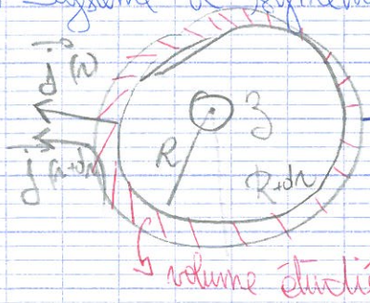
$dU = c\,dT = \rho c\, S\,dx \frac{\partial T}{\partial t}\,dt$

donc $\rho c\, S\,dx \frac{\partial T}{\partial t}\,dt = \left(j_{th}(x) - j_{th}(x+dx)\right) S\,dt + p\,S\,dx\,dt$

On simplifie : $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial r} + p$, c'est bien la formule voulue

d) Démonstration en régime unidimensionnel en coordonnées cylindriques

(H) Système à symétrie cylindrique



$\vec{j}_{th} = j_{th}(r,t,\cancel{\theta},\cancel{\varphi})\,\vec{u}_r$

$T(r,\cancel{\theta},\cancel{\varphi},t)$

1er principe couronne cylindrique de hauteur h comprise entre r et r+dr

$$dU = \delta W + \delta Q = \left(j_{th}(r) \times 2\pi r\, dh - j_{th}(r+dr) \times 2\pi (r+dr)\, h \right) dt + p \times 2\pi\, r\, dr\, h\, dt$$

$$= \underbrace{\mu c\, 2\pi r\, dr\, h}_{C} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{dT} dt$$

On simplifie : $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} r \cancel{dr} = r j_{th}(r) - (r+dr) j_{th}(r+dr) + p\, r\, dr$

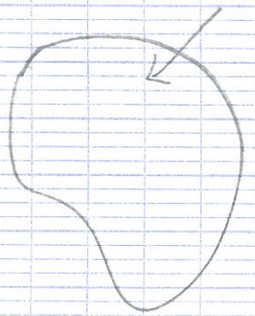
$$= -\cancel{dr} \frac{\partial}{\partial r}(r j_{th})$$

donc $\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r j_{th})}{\partial r} = p}$ solubilité en mode cylindrique

e) Cas unidimensionnel en sphérique :

résultat : $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 j_{th}\right) = p$.

f) Complément : expression de p en présence de réactions chimiques



fluide avec réaction chimique, immobile, évolution à pression constante
↳ $dH = \delta Q$

variation d'enthalpie en présence d'une réaction chimique et d'une variation de température
$H(\xi, P, T)$

↳ $dH = \frac{\partial H}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial H}{\partial T} dT + \frac{\partial H}{\partial P} dP$ ($\frac{\partial H}{\partial P} = 0$)

variation de H due à ξ $= \Delta_r H^\circ d\xi$; $\frac{\partial H}{\partial T}$: système sans réaction chimique

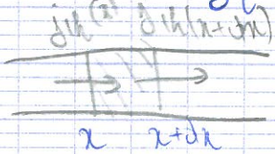
donc $\frac{dH}{dt} = \Delta_r H^\circ \frac{d\xi}{dt} + C_p \frac{\partial T}{\partial t}$

rappel de sup : vitesse de réaction $v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$ on divise par V pour que v ne dépende pas de la taille du système.

$A + B \rightarrow C \Rightarrow v = k [A]^\alpha [B]^\beta$

donc $\frac{dH}{dt} = \Delta_r H^\circ V v + V \mu C_p \frac{\partial T}{\partial t}$

modèle unidimensionnel



$\Delta_r H^\circ v S dx + S dx \mu C_p \frac{\partial T}{\partial t} = j_{th}(x) S - j_{th}(x+dx) S$

alors $\Delta_r H^\circ v + \mu C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx$

ce qui donne $\mu C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}}{\partial x} = -v \Delta_r H^\circ$

$\frac{\partial j_{th}}{\partial x}$: div $\vec{j}_{th}$; $-v \Delta_r H^\circ$: p

tout se passe comme si le milieu extérieur fournit une puissance volumique $p = -v \Delta_r H^\circ$

184

3) Loi de Fourier (1822)

a) Loi empirique :

En élec on est capable de calculer $\vec{j}_{el}\, d\tau = \sum_{i \text{ dans } d\tau} q_i \vec{v}_i$ ← loi fondamentale

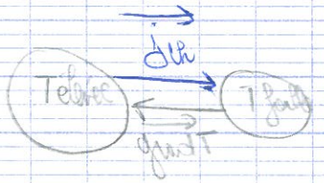
Pas de loi équivalente dans le cas thermique

loi empirique : $\vec{j}_{th} = -\lambda(T)\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$ dans la plupart des matériaux usuels et $\|\overrightarrow{\text{grad}}\, T\|$ pas trop élevé, $\lambda > 0$

($\lambda(T)$ ↪ conduc. thermique ; $\overrightarrow{\text{grad}}\, T$ → cohérence avec le second principe)

b) Commentaires :

Lien avec le second principe



sens de l'échange thermique chaud → froid

λ caractérise la nature chimique du milieu et son état thermodynamique

c) Ordres de grandeur :

unités :

$$P_{th} = \iint \vec{j}_{th}\, d\vec{\Sigma} \longrightarrow \left(j_{th} \longrightarrow W\, m^{-2}\right)$$

$\overrightarrow{\text{grad}}\, T \longrightarrow K\, m^{-2}$

$\lambda \longrightarrow W \cdot m^{-1} K^{-1}$

grands écarts suivant le matériau : métaux $\sim 100\ W m^{-1} K^{-1}$

solides autres que métaux, liquides $\sim 1\ W m^{-1} K^{-1}$

gaz $\sim 0{,}01 \to 0{,}1\ W m^{-1} K^{-1}$

Variation de $\lambda(T)$ existent, mais restent négligeables pour $\Delta T \sim 100\,K$

4) Equation de diffusion thermique

a) Etablissement de l'équation :

$$\operatorname{div} \vec{j}_{th} + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = p$$

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$$

(H) λ uniforme pour un matériau homogène même si T n'est pas uniforme

$$\operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T) = \lambda \Delta T$$

on remplace : $\rightarrow$ valable que dans des zones homogènes
↳ si milieu hétérogène mais localement homogène ainsi tout est plus ou moins homogène

$$\boxed{-\lambda \Delta T + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = p}$$ → exemple : $-\nu \Delta \vec{v} + \dots$

équation de diffusion avec terme source

b) Variantes :

* Cas particulier où $p = 0$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T} \qquad D = \frac{\lambda}{\mu c}$$ coef de diffusion / diffusivité

équation de diffusion

Variante unidimensionnelle en coordonnées cartésiennes $T(x,t)$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$: equation de diffusion en dimension 1

Analyse dimensionnelle $[D] = \frac{L^2}{T}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D \Delta T = \frac{p}{\mu c}$$ → pas toujours linéaire car p peut éventuellement dépendre de la température
→ linéaire sinon

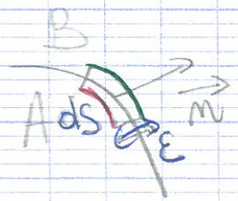
(H) $p(\not{x})$: équation linéaire avec second membre / avec terme source $\frac{p}{\mu c}$

(5) Conditions aux limites dans un problème de transfert thermique



conditions aux limites ?
- Contraintes imposées sur Σ (limites spatiales)
- Interfaces entre différentes zones (condition de passage)
- état initial du système (limite temporelle)

(A) Continuité de $\vec{j}_{th}$ à l'interface entre 2 zones homogènes



La composante normale de $\vec{j}_{th}$ est continue à l'interface entre A et B : $\vec{j}_{TH} \cdot \vec{n} = \varphi$: flux thermique surfacique à l'interface Σ_{AB}

Pourquoi ?

1er principe : $\frac{dU}{dt} = P_{reçue} = P_{reçue\ en\ surface} + P_{reçue\ en\ volume}$

$P_{reçue\ en\ volume} = p \times volume \longrightarrow 0$

limite $\varepsilon \to 0$: $dU = C\,dT$

C : cap thermique $\longrightarrow 0$ ($\varepsilon \to 0$)

$P_{reçue\ en\ surface} = (\varphi_A - \varphi_B)\,dS$

$\varphi_A - \varphi_B \to 0$ car $P_{reçue\ en\ volume} \to 0$

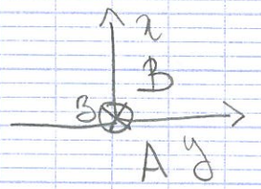
et $\frac{dU}{dt} \to 0$

Aucune contrainte sur la composante tangentielle de $\vec{j}_{th}$

ex : isolant



En pratique

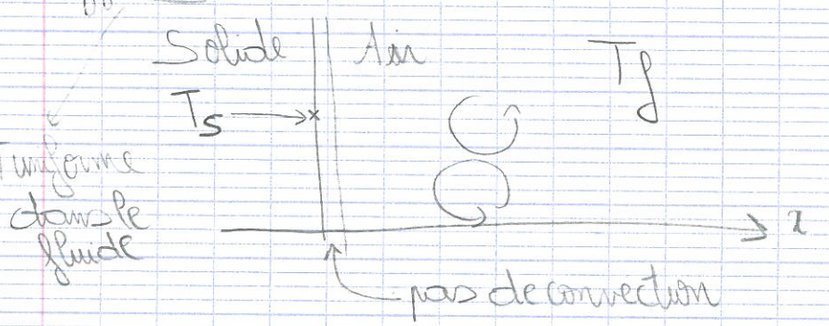


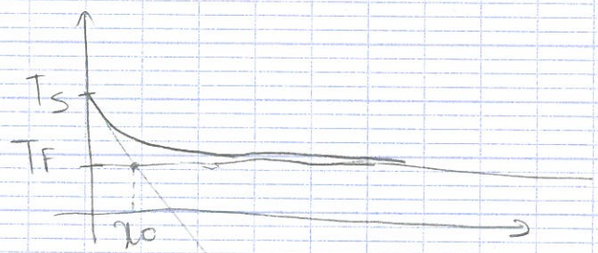
$\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$ condition à la limite entre 2 ~~conditions~~ conducteurs :

$$\boxed{\lambda_A \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0^-} = \lambda_B \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0^+}}$$

b) Continuité de la température (Contact thermique parfait)
→ B en contact "mécanique" → $\lim T_A$ ---

c) Frontière entre un solide et fluide dans lequel la convection est efficace





$z < z_0$ fluide reste immobile se comporte comme un conducteur thermique immobile de conductivité thermique λ_F

en $z=0$ continuité du flux thermique surfacique

$z > z_0$ convection efficace $T = T_F$ uniforme

$$\varphi(z=0^+) = -\lambda_F \frac{\partial T}{\partial z} = -\lambda_F \frac{T_F - T_S}{z_0}$$

$$= \frac{\lambda_F}{z_0}(T_S - T_F) = h(T_S - T_F)$$

→ Loi empirique de Newton à l'interface entre un solide et un fluide

$$\varphi_{\text{solide} \to \text{fluide}} = h(T_F - T_S)$$

avec h coefficient conducto convectif : dépend de la nature du fluide : plus la convection est favorisée plus h est grand

exc : Maison



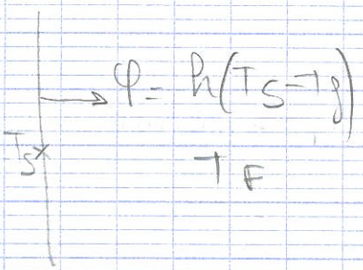
$h : (W m^{-2} K^{-1})$

air sans vent $h \sim 10$ SI

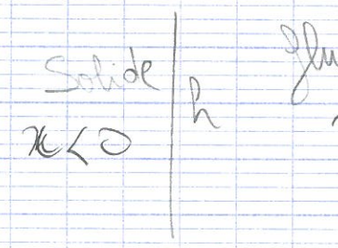
avec vent $h \sim 30$ SI

bien liquide $h \sim 100$ SI

On oublie la notion de distance :



L'équation utile :



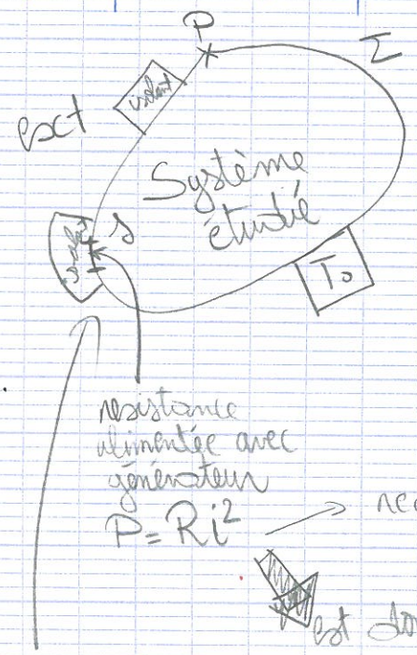
$$\boxed{-\lambda_S \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = h\left(T_{(x=0)} - T_F\right)}$$

→ c'est l'équation qu'on va écrire en pratique

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\partial T}{\partial x}$ $\quad \lim_{\substack{x=0 \\ x<0}} T(x)$

d) Frontière entre milieu étudié et l'extérieur

Que peut-on imposer à cette frontière ?



On peut imposer en tout point soit la température, soit le flux thermique surfacique

utilisation d'une source de chaleur

→ grosse hypothèse thermique et très bon conducteur

→ réchauffe la résistance : $dU = CdT = \delta t$

→ est lui-même système

petite résistance → $\varphi \sim \frac{Ri^2}{s}$

e) Conclusion : Un problème de transfert thermique bien posé équation avec

* Conditions aux limites du système étudié | en tout point P on impose $T(P)$ ou $\frac{\partial T}{\partial n}(P)$
* Connaissance en tout point intérieur de $T(M, t=0)$ admet une sol unique (existe : Arg physique
unicité : Arg mathématique)

II Diffusion thermique en régime permanent

(H) dans chaque milieu homogène $\lambda = cte$, $\lambda(x)$

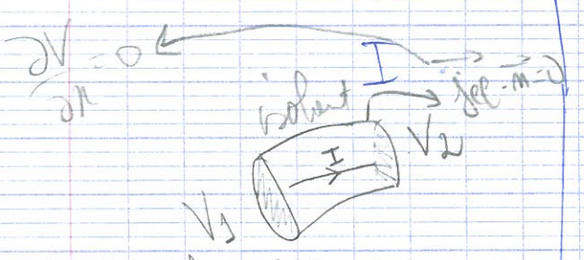
↳ $-\lambda \Delta T + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = p$

* avec terme source $p \neq 0$
* sans terme source $p = 0$

1) Equation de diffusion sans terme source
Notion de résistance thermique

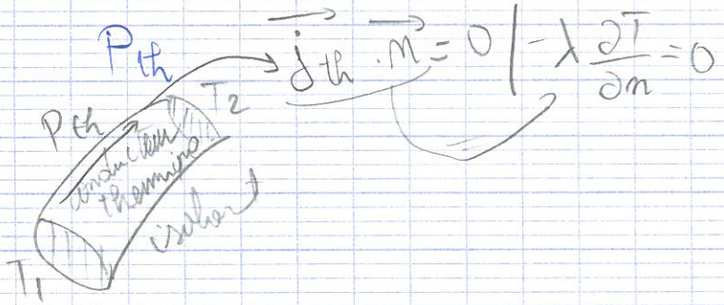
a) Analogie entre problèmes thermiques et électriques :

Conduction électrique	Conduction thermique
$\vec{j}_{el} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$	$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$
j_{el}	j_{th}
γ (conductivité)	λ (conductivité)
V	T
$\text{div}\, \vec{j}_{el} = 0$ conservation de la charge, régime permanent	1er principe $\text{div}\, \vec{j}_{th} = 0$
$\Delta V = 0$	$\Delta T = 0$
$I_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{j}_{el} \cdot d\vec{\Sigma}$	$P_{th} = \iint_\Sigma \vec{j}_{th} \cdot d\vec{\Sigma}$



loi d'Ohm $V_1 - V_2 = RI$

$\frac{V_1 - V_2}{I} = \text{cte}$ indép de V_1, V_2 / I



$\frac{T_1 - T_2}{P_{th}} = \text{cte}$ indépendante de T_1, T_2, P_{th}

b) Résistance thermique et loi d'Ohm thermique

* Pour un barreau conducteur aux extrémités duquel on impose la température $T_1 - T_2 = R_{th} P_{th}$ il existe une constante dépendant de la forme et de sa conductivité admise comme résistance thermique

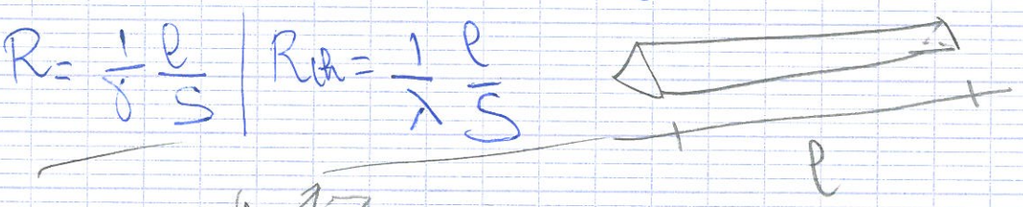
$$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \times \text{facteur géométrique}$$

identique dans le cas thermique et le cas électrique

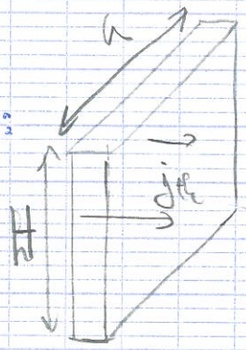
à géométrie identique $R_{th} \times \lambda = R_{el} \times \gamma$.

c) Exemple : Barreau | prismatique cylindrique de section quelconque uniforme

$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{S} \quad | \quad R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{\ell}{S}$$



mur :

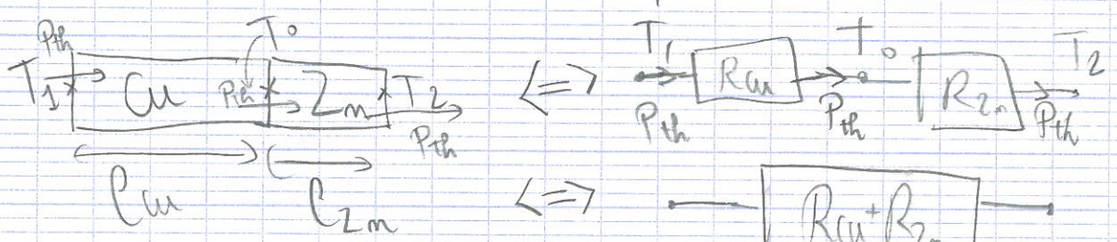


$$R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{e}{a \cdot l} \quad | \quad T_1 - T_2 = R_{th} \times P_{th}$$

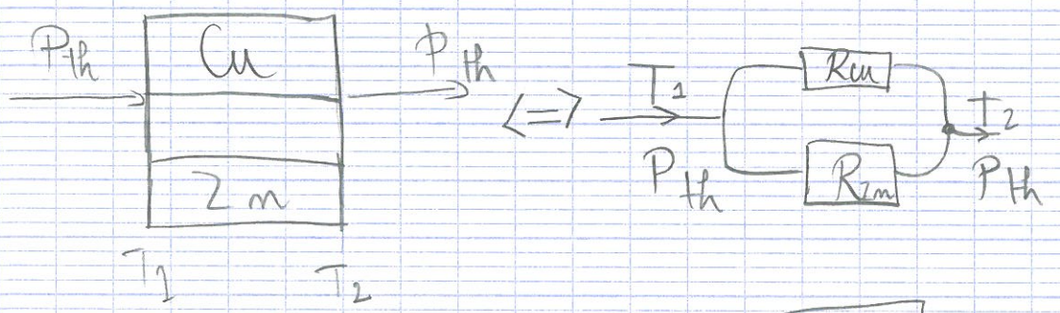
$$P_{th} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

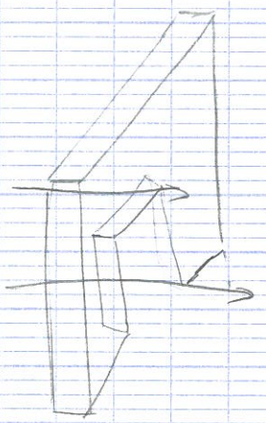
$\frac{1}{R_{th}} = G_{th}$ → conductance thermique

d) Association de résistances thermique :



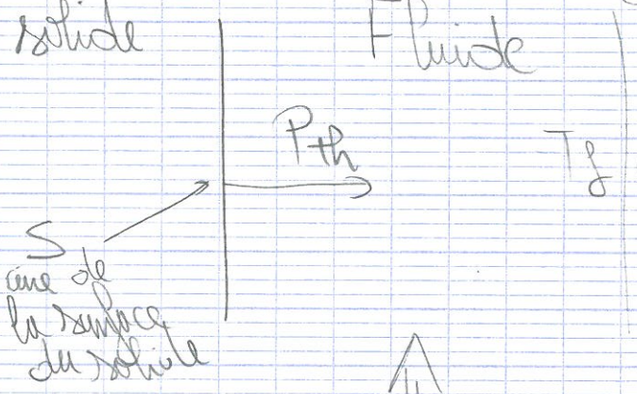
En série la résistance thermique s'ajoute





$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{mur}} + \frac{1}{R_{porte}}$$

② Intervention des transferts conducto - convectifs (loi de Newton)



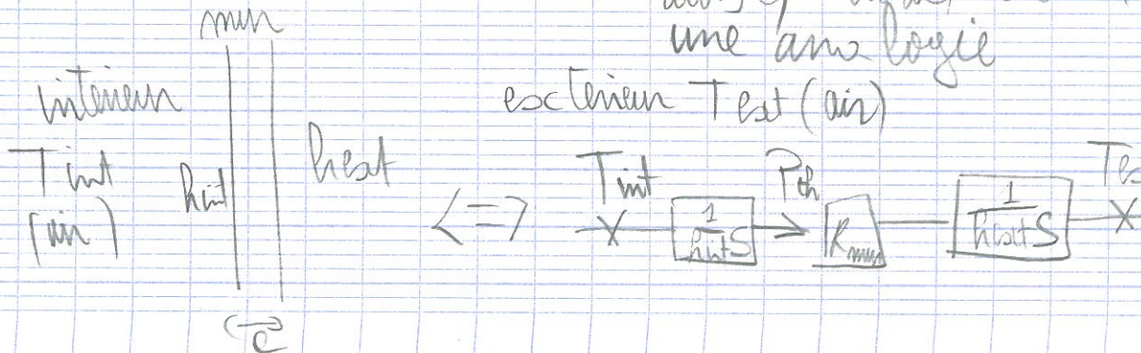
$$\varphi = h(T_S - T_F)$$

$$P_{th} = hS(T_S - T_F)$$

$$T_S - T_F = \frac{1}{hS} P_{th}$$

$$R_a = \frac{1}{hS}$$

résultant du calcul alors qu'avant c'était une analogie



on en déduit : $T_{int} - T_{ext} = \left(\frac{1}{h_{int} S} + R_{mur} + \frac{1}{h_{ext} S}\right) P_{th}$

3) Transferts thermiques en régime permanent

a) Analogies :

$$-\lambda \Delta T + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \mathcal{P}$$

$$\Delta T + \frac{\mathcal{P}}{\lambda} = 0$$ Equation de Poisson $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

analogie avec électrostatique ?

électrostatique	transfert thermique
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	1er principe $\operatorname{div} \vec{j}_{th} = \mathcal{P}$
$\vec{E}$	$\vec{j}_{th}$
ρ / ε_0	$\mathcal{P}$
$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = 0$	$\vec{\operatorname{rot}} \vec{j}_{th} = 0$? $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T$ (λ uniforme) $\vec{\operatorname{rot}} \vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) = 0$
Gauss $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$	Théorème de Gauss thermique $\oint_{\Sigma \text{ fermé}} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} = \mathcal{P}_{totale}$ reçue à l'intérieur du volume limité par Σ
vrai seulement en régime permanent	$\oint_{\text{surface fermée}} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{\Sigma} = \mathcal{P}_{int}$ le flux de $\vec{j}_{th}$ à travers toute surface fermée est égal à la puissance reçue à l'intérieur de la surface en régime permanent

En régime permanent

b) Exemple d'application :

Sphère radioactive plongée dans une piscine de grande taille



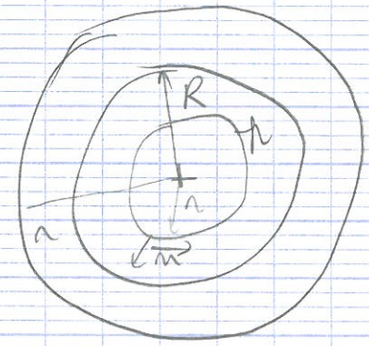
→ T en régime permanent ?

1er modèle : eau immobile et loin de la sphère $T = T_0$

2e modèle eau peut bouger → $T_F = T_0$ uniforme sauf tout près de la sphère

$\rho = cte$ | * indépendant de la position
* indépendant du temps.

(H) Symétrie sphérique : $T(r)$



$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad}\, T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$$

$$\oint_{\text{sphère de rayon } r} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{\Sigma} = P_{int}$$

$$-\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-\rho}{3\lambda} r$$

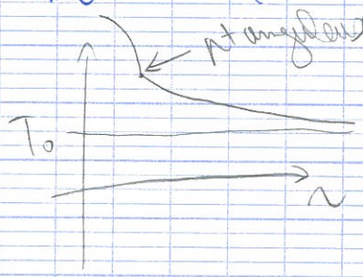
$$T = \frac{-\rho}{6\lambda} (r^2 - R^2) + T(R)$$

1er modèle : eau immobile λ_{eau}

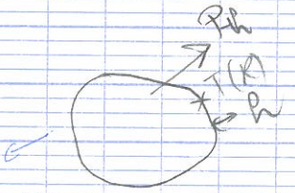
$$-\lambda_{eau} \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \rightarrow \boxed{T = \frac{R^3 \rho}{3\lambda_{eau}} \frac{1}{r} + T_0}$$

$$T(R) = T_0 + \frac{R^2 \mu}{3 \lambda_{eau}}$$

$$T_{max} = T(r=0) = T_0 + \frac{\mu R^2}{3\lambda_{eau}} + \frac{\mu R^2}{6\lambda}$$



modèle n°2 :



$$\varphi = h(T(R) - T_0) \quad , \quad P_{th} = h(T(R) - T_0) 4\pi R^2 = \frac{4\pi}{3} R^3 \mu$$

$$T(R) - T_0 = \frac{1}{3} \frac{R \mu}{h}$$

$$\boxed{T_{max} = T_0 + \frac{R\mu}{3h} + \frac{\mu}{6\lambda} R^2}$$

3) Solutions particulières de l'équation de Laplace

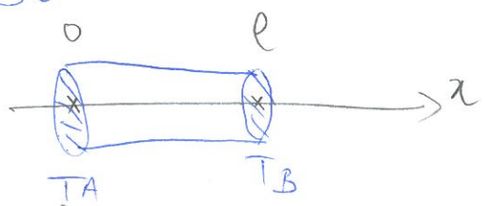
utiles pour des problèmes unidimentionnels

↳ cartésiennes $T(x)$
cylindrique $T(r, \theta, z)$
sphériques $T(r, \theta, \varphi)$

* régime permanent
* dans une zone sans source $p=0$, $\Delta T=0$

a) Coordonnées cartésiennes

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0 \Rightarrow T=Ax+B$$



Paroi conductrice

$$T=T_1+\frac{x}{e}(T_2-T_1)$$

b) Coordonnées cylindriques

$A+B\ln r$: lien avec le théorème de Gauss thermique

$$\oint \vec{j}_{th}\cdot d\vec{\Sigma} = \text{Puissance à l'intérieur} = \iiint_V p\, d\tau$$



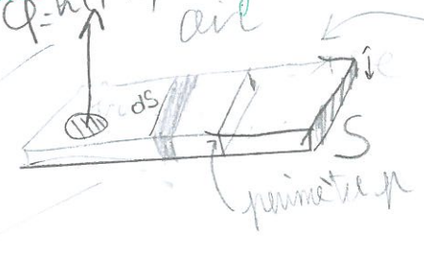
symétrie cylindrique
→ flux à $\vec{j}_{th}\times\vec{e}_r$ → $\vec{j}_{th}\times\vec{n}=$ cste
→ $j_{th}=\frac{A}{r^2}=-\lambda\frac{dT}{dr}$

$$T=-\frac{A}{\lambda}\ln r+B$$

$p=0$: zone sans termes sources : flux de $\vec{j}_{th}$ à travers les 2 cylindres Σ_1 et Σ_2

4) Un exemple de modélisation simplifiant l'étude de la diffusion thermique : ailette de refroidissement

a) Présentation

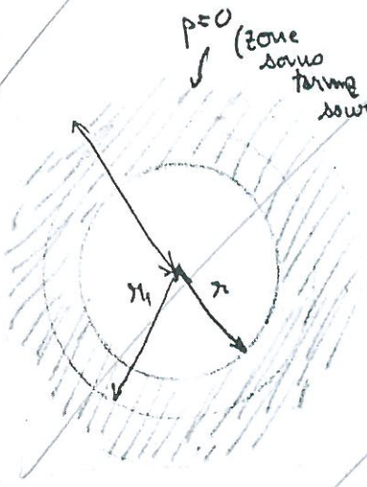


Paroi T
T_0 →

lien avec le flux de vecteur thermique :

$$\oiint \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} = P_{reçue \text{ à l'intérieur}}$$

$$= \iiint_{\text{intérieur}} p \, d\tau$$



(cylindres)

→ symétrie cylindrique

→ flux $\propto j_{th} \times 2\pi r$

→ $j_{th} \cdot r = cste$

→ $j_{th} = \frac{A}{r} = -\lambda \frac{dT}{dr}$

→ $T = -\frac{A}{\lambda} \ln(r) + B$

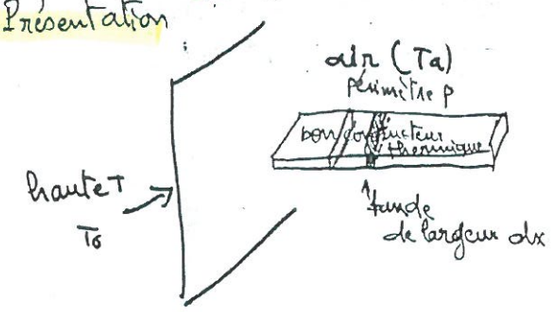
c) Coordonnées cylindriques

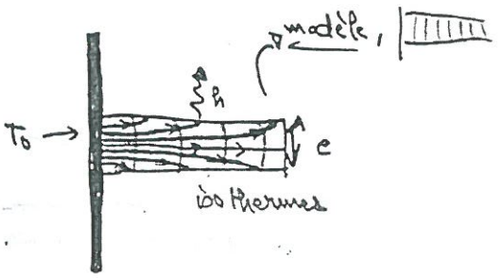
$T = A + \frac{B}{r}$; lien avec le flux de vecteur thermique :

(de même qu'avant) $j_{th} \cdot r^2 = cste$

4) Un exemple de modélisation simplifiant l'étude de la diffusion thermique : ailettes de refroidissement

a) Présentation





(Cartes de champ thermique
lignes de courant thermique
surfaces T=cste



flèche pointe vers T ↓

$\vec{j}_{th} = -\lambda \, \vec{grad} T$

T=cste

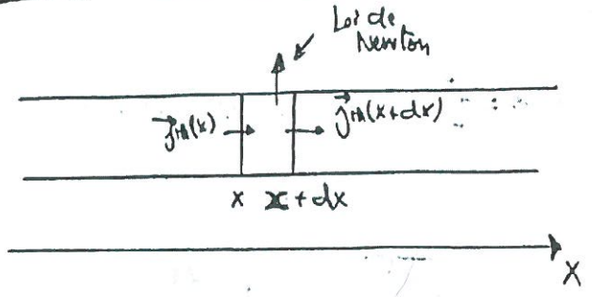
b) Mise en équation :

$$-\lambda \Delta T + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (H)$$

→ $\Delta T = 0$; inexploitable dans le cadre du modèle

Scanned by CamScanner

→ Utilisation du 1er principe :



Régime permanent :

$\frac{dU}{dt} = 0 \overset{1er\ principe}{\Rightarrow} P_{totale\ reçue} = 0$

① périmètre

$j_{th}(x)\,S - j_{th}(x+dx)\,S = h\,(T - T_a)\,p\,dx = 0$

$\rightarrow \left(\frac{j_{th}(x) - j_{th}(x+dx)}{dx}\right) S - h(T-T_a)p = 0$

$\rightarrow \left(\frac{j_{th}(x) - j_{th}(x+dx)}{dx}\right) S = hp(T-T_a)$

et $\frac{\partial j_{th}}{\partial x} \cdot S = +\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot S$

$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{hp}{S\lambda}(T-T_a)}$ équadiff à résoudre

c) Résolution de l'équation :

$K = \sqrt{\frac{ph}{S\lambda}} \rightarrow T - T_a = Ae^{-Kx} + Be^{Kx}$

et $T_0 - T_a = A + B$ (limite en $x = 0$, c)

+ Continuité de la puissance surfacique en $x = L$:

$-\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right)_{x=L^-} = h\,(T - T_a)$

$\rightarrow K\lambda\,(Ae^{-KL} - Be^{KL}) = h\,(Ae^{-KL} + Be^{KL})$

$\rightarrow Ae^{-KL}(K\lambda - h) = Be^{KL}(K\lambda + h)$

$\rightarrow Be^{KL} = \underbrace{\frac{K\lambda - h}{K\lambda + h}}_{\text{module} < 1} Ae^{-KL}$

$\rightarrow |B| < |A|e^{-2KL}$ et avec $KL > 2$ ou 3

$\Rightarrow |B| \ll |A|$

d) Commentaires, conclusion :

* pour x pas trop grand (pas trop proche de l'extrémité),

Scanned by CamScanner

$(T-T_a) \sim (T_0-T_a)\, e^{-kx}$

* puissance évacuée par unité de surface $= \left| j_{th}(x=0^+) \right| = \lambda k (T_0 - T_a)$

à comparer à $h(T_0 - T_a)$

Gain : $\dfrac{\lambda k (T_0-T_a)}{h(T_0-T_a)} = \dfrac{\lambda k}{h} = \sqrt{\dfrac{\lambda \rho}{h S}} = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{he}}$ $\left(\begin{matrix} \rho \simeq 2\rho \\ S = e.\rho \end{matrix} \right.$

AN : $\lambda \approx 100$ USI
$h \approx 10$ SI
$e \approx 1$ mm

$\Rightarrow$ **Gain = 140**

Il faut quand même vérifier que $kL \ll 2\pi$
ou $L = 10$ cm par ex
$\rightarrow kL = 1,4$: OK.

IV – Régimes non-permanents.

1) Commentaires à propos de l'équation de diffusion

$-\lambda \Delta T + \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \rho$ $\qquad D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$: coef de diffusion

$\left(\dfrac{\partial T}{\partial t} = \left(\dfrac{\rho}{\mu c} \right) + D \Delta T \right.$

a) Irréversibilité de la diffusion thermique

$\dfrac{\partial T}{\partial t}$: ordre 1 $\qquad T(r,t)$: solution

$T(r,-t)$ solution... non physique

contrairement à ce qu'on avait dans l'éq de d'Alembert

b) Tendance à homogénéiser la température

* le terme source serait la cause de l'augmentation de T, ainsi que ΔT ...

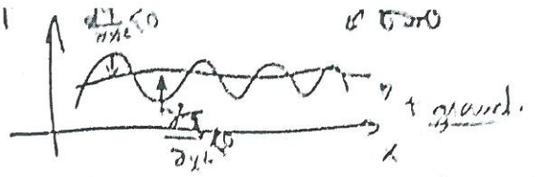
* $\rho > 0$ par ex.

* $\Delta T > 0$

$\rightarrow$ en clim 1, $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} > 0$, fonction ↗.

Scanned by CamScanner

pas ex, en supposant $\rho > 0$.



Tendance à l'homogénéisation...

c) Analyse dimensionnelle

Équation sans terme source : $\left|\begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T \\ \oplus \text{ conditions aux limites} \rightarrow \text{dimensions caractéristiques de l'objet (a)} \end{array}\right.$

longueur^2.temps^{-1}

ayant $[D] = L^2.T^{-1}$

On cherche souvent à calculer un temps caractéristique τ :

$\tau(D, a)$

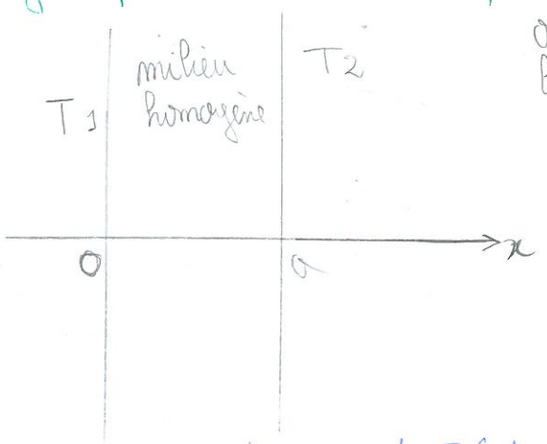
→ Théorème π : le produit $\frac{D\tau}{a^2} = \alpha$, reste sans unité

$\Rightarrow \boxed{\tau = \alpha \frac{a^2}{D}}$

2) Series de Fourier Voir poly

3) Etablissement du régime permanent dans une plaque

a) Représentation



On impose les conditions aux limites $T(x=a) = T_2$, $T(x=0) = T_1$

$t=0$ température connue en tout point $T(0,t) = T^\circ(x)$ pour $t=0$

→ pour $t>0$, $T(x,t)$??

équation à résoudre (pas de terme source)

$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$ avec conditions aux limites

Scanned by CamScanner

(b) Etape 1 recherche du régime permanent

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T \text{ fonction affine}$$

$$T_p = T_1 + \frac{x}{a}(T_2 - T_1)$$

(c) Etape 2: equations vérifiées par l'écart au regime permanent

ecart au regime permanent $\theta = T - T_p$: $\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$

limites $\theta(x=0,t) \; \theta(x=a) = 0$, CI : $\theta(t=0,x) = \underbrace{T(x) - T_1 - \frac{x}{a}(T_2 - T_1)}_{\text{connue}}$

(d) Etape 3: recherche des solutions particulières de l'equation de diffusion par séparation de variables

$\theta(x,t) = f(x)\,g(t)$: solution particulière respectant les conditions aux limites spatiales

on remplace $f(x)\,g'(t) = D\,f''(x)\,g(t)$ → valable $\forall t \in]0, \infty[$ $t > 0$

(H) $g(t_0) \neq 0$ on fixe $t = t_0$: $f'' - \underbrace{\frac{g'(t_0)}{D\,g(t_0)}}_{\text{cste}} f = 0$

$f = A\,sh(\;) + B\,ch(\;)$ pose problème aux limites

$\rightarrow f(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}$: candidat acceptable vérifiant les conditions aux limites

$$-\frac{n^2\pi^2 D}{a^2}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) g(t) = \sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$g = A\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D}{a^2}t\right)$$

$$\theta_n = A_n \sin\frac{n\pi x}{a} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D t}{a^2}\right)$$

θ_n vérifie l'équation de diffusion et conditions aux limites spatiales

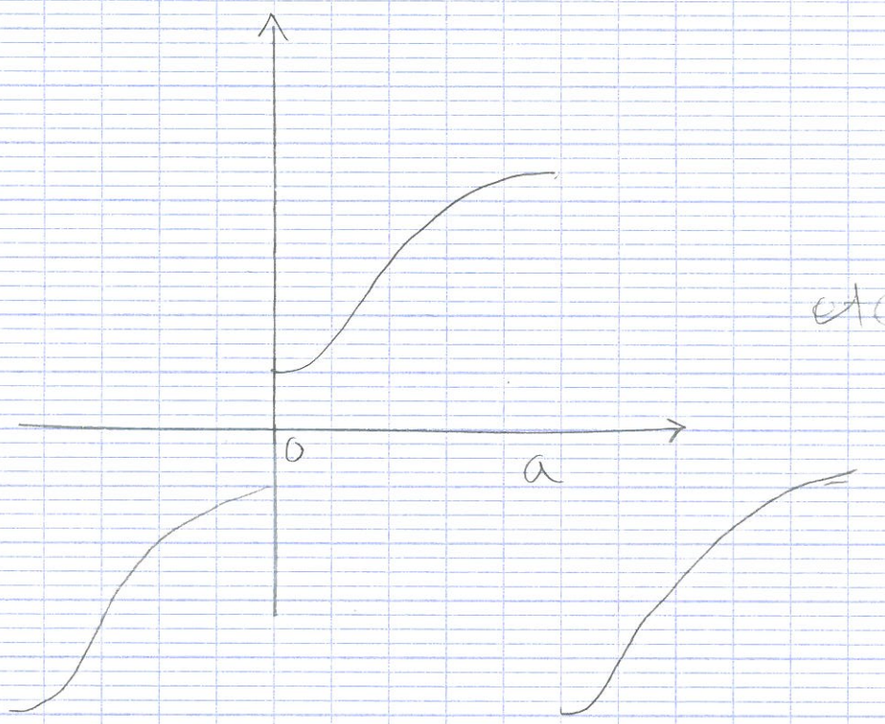
c) Solution respectant respectant les conditions aux limites spatiales et temporelles

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D t}{a^2}\right)$$

est-il possible de choisir (A_n) telque $\sum A_n \sin\frac{n\pi x}{a} = \theta(x, t=0)$

↓ série de Fourier

Fonction périodique de période $2a$ impaire $\tilde{\theta}$?



$\tilde{\theta}$ est décomposable en série de Fourier :

$$\tilde{\theta} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\frac{2\pi x}{2a}$$ en tout point où $\tilde{\theta}$ est continue

sur $]0, a[$ la série converge vers $\tilde{\theta}$ où θ donc vers $\theta(x, t=0)$

en 0 et a elle converge vers 0

~~donc $A_n = b_n = \frac{2}{2a} \int_{-a}^{a} \dots dx$~~ +

donc $\underbrace{A_n}_{\text{recherché}} = b_n = \frac{2}{2a} \int_{-a}^{a} \frac{\theta \sin\left(\frac{2\pi n x}{2a}\right) dx}{2a}$

~~b_n~~ $A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \theta(x,t=0) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$

alors $T(x,t) = T_1 + \frac{x}{a}(T_2 - T_1) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{2\pi n}{a} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D t}{a^2}\right)$

I) Conséquences physiques

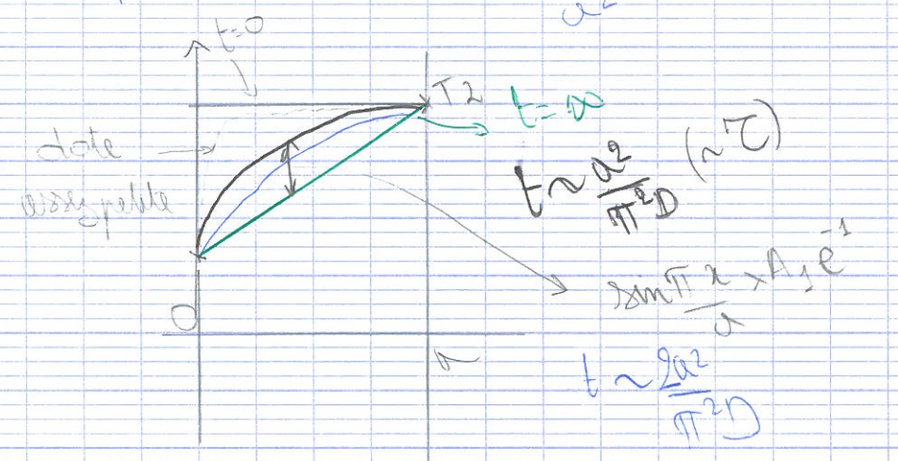
temps caractéristique de convergence vers le régime permanent

(H) $A_1 \neq 0$: pour t assez grand $T \sim T_p + A_1 \sin \frac{\pi x}{a} \exp\left(-\frac{\pi^2 D t}{a^2}\right)$

C'est un régime permanent

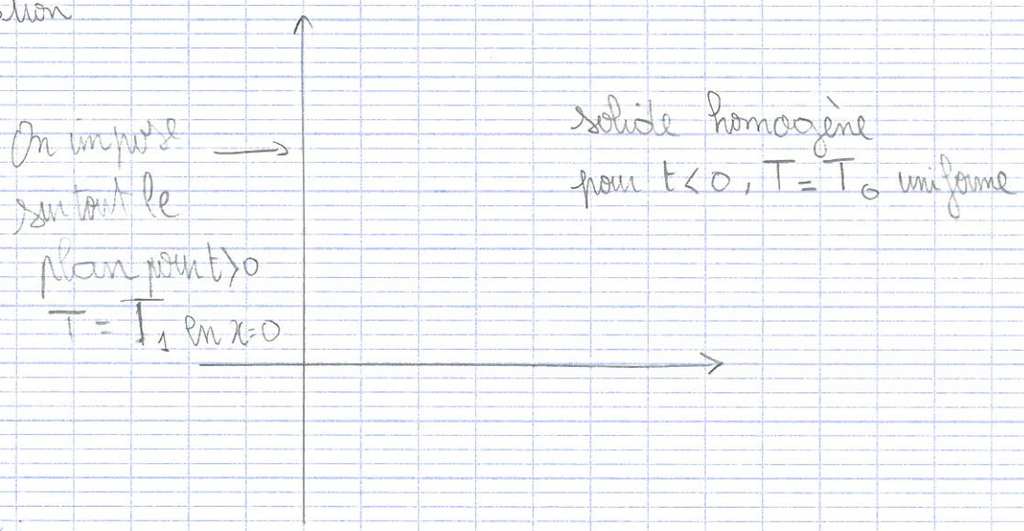
$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ $\tau = \frac{a^2}{\pi^2 D}$ temps caractéristique d'atteinte du régime permanent

τ dépend de D et a : $\frac{D\tau}{a^2} = 1 \rightarrow \tau = \frac{a^2}{D}$



4) Choc thermique sur un solide semi illimité

a) Présentation



équation
$\forall x,t>0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

condition limite $\forall t>0 \quad T(x=0,t) = T_1$
condition initiale $\forall x>0 \quad T(x,t=0) = T_0$

b) Analyse dimentionnelle

On cherche $T(x,t)$

lois liant $\underset{\Theta}{T}, x, t, D, \overbrace{T_1, T_0}^{\Theta}$ | $n=3$
$\qquad\qquad L \quad T \quad L^2 T^{-1}$

$n-p = 3$ produits sans dimension

$$\frac{T}{T_1}, \frac{T_0}{T_1}, \frac{x}{2\sqrt{Dt}} = u$$

$\frac{T}{T_1}$ est fonction de $\frac{T_0}{T_1}$ et de $\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$: $\frac{T}{T_1} = F\left(\frac{T_0}{T_1}, \frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$
$\qquad = f(u)$

c) Résolution de l'équation de diffusion

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{df}{du} \times \frac{\partial u}{\partial t} = f'(u) \times \frac{x}{2\sqrt{D}} \times -\frac{1}{2} t^{-3/2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{df}{du} \times \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} \times \frac{1}{2\sqrt{Dt}}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{Dt}}\right)^2 = \frac{d^2 f}{du^2} \frac{1}{4Dt}$$

$= D f''(x)$

On réécrit l'équation $f'(x)\frac{x}{2D} \times \frac{-1}{2\pi f} = D f''(x)\frac{1}{4\pi^2 f^2}$

donc $f''(x) = -2x f'(x)$

on pose $f' = g$: $g'(x) = -2x g(x)$

et alors $\frac{g'}{g} = -2x$

on intègre $\ln(|g(x)|) - \ln(g(x_0)) = -x^2 + x_0^2$

(à c) $\ln|g(x)| = -x^2 + cte$

alors $g = Ae^{-x^2}$

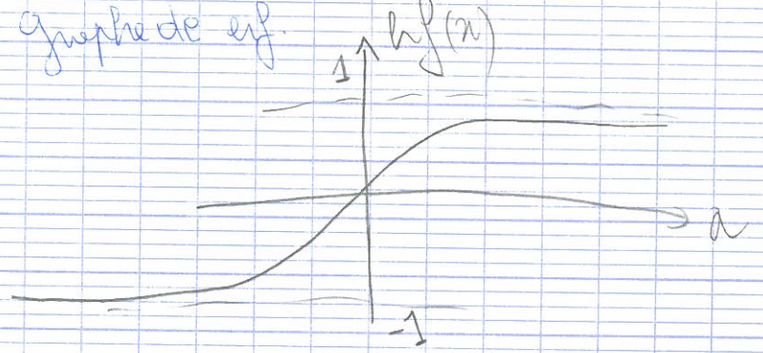
donc $\frac{df}{dx} = Ae^{-x^2}$

et alors $f(x) = A\int_0^x e^{-v^2} dv + cte$

↳ fonction "erreur"

$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-v^2} dv$

Graphe de erf.



donc $f(u) = cte + A\sqrt{\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{erf}(u)$

donc $T = A + B\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$

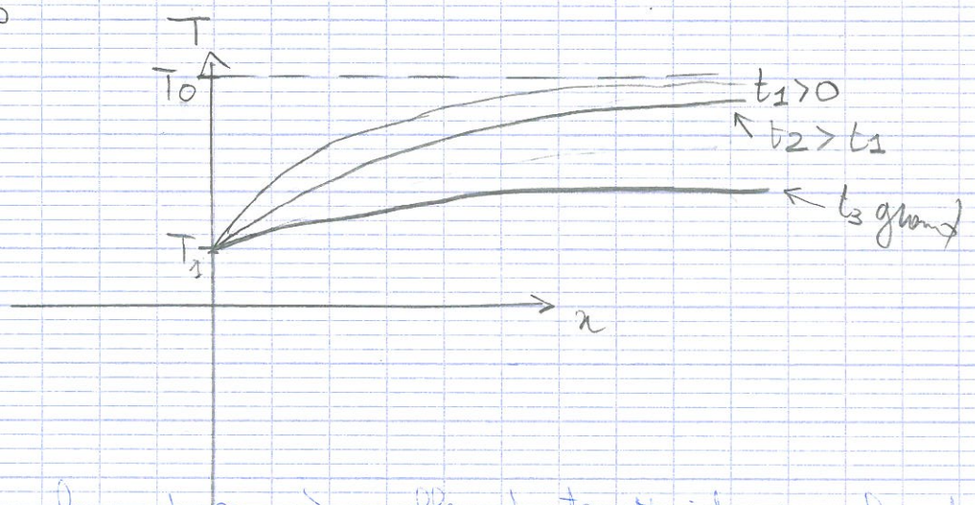
limite : $x = 0$, $T = T_1 \Rightarrow A = T_1$

↳ $t = 0$: $T = T_0$

↳ $T_0 = A + B \Rightarrow B = T_0 - T_1$

et donc $T = T_1 + (T_0 - T_1)\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-v^2}\,dv$

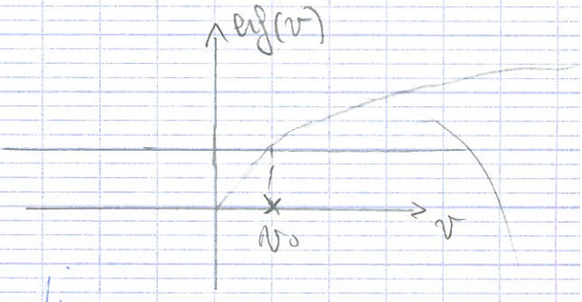
d) Commentaires



Pour une certaine valeur de x à quelle date atteint-on la température choisie ?

$T(x,t) = T_1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-v^2}\,dv\,(T_0 - T_1) = T$ intermédiaire

$\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) = \frac{T_{interm} - T_1}{T_0 - T_1}$



Réponse $\frac{x^2}{4Dt} = v_0^2$ → est sans dim dépend de l'int

donc $t = \frac{x^2}{4Dv_0^2}$

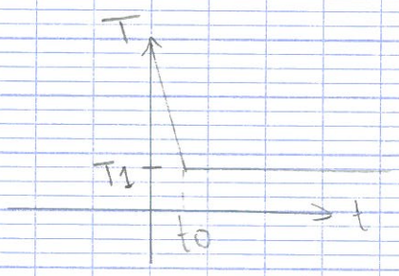
à la date t tel que $T = T_{int}$ varie en $\sqrt{t}$

Différence onde et transf thermique : propagation de T en $\sqrt{t}$, pas de front en t.

Montrer non valable : à toute date aussi petite ε : je peux trouver si je suis à une position $x > 0$ que T_1 a été posé : revient en cause des hyp : loi de Fourier non valable pour T infiniment grand

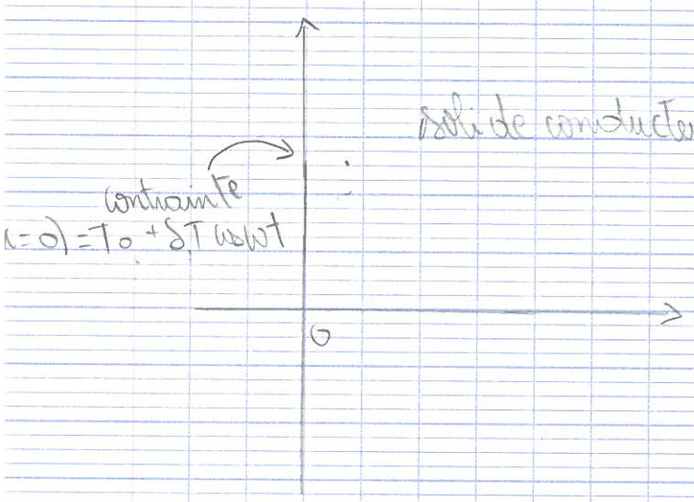
imposer instantanément T_1 : irréaliste

modèle plus réaliste



modèle choisi on a $t_0 \to 0$

5) Régime harmonique forcé : grandes dimensions



→ au bout d'un temps long, on s'attend à voir

$T(x,t) = T_0 + A(x)\cos(\omega t - \varphi)$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On va passer aux complexes

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2}$$

$\tilde{T}(x=0) = T_0 + \delta T\, e^{i\omega t}$, $\tilde{T}(x,t) = T_0 + \underbrace{\tilde{F}(x)\, e^{i\omega t}}$

↳ on vérifie si ce terme vérifie l'éq : on reporte

$$i\omega\tilde{F} = D\tilde{F}'' \to \tilde{F}'' = \frac{i\omega}{D}\tilde{F} \quad , \quad k^2 = \frac{i\omega}{D} \text{ (déf)}$$

$$\tilde{F}'' = k^2\tilde{F} \qquad = \frac{2i\omega}{2D} = \frac{(1+i)^2\omega}{2D}$$

$$\to k = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}$$

Ce qui donne $\underline{\tilde{F}} = A e^{kx} + B e^{-ikx}$

donc $\underline{\tilde{F}}(x) e^{i\omega t} = B\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}\, e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}\, e^{i\omega t}$ (on néglige que le terme en B par limitation)

$\rightarrow Re\left(\underline{\tilde{F}}(x) e^{i\omega t}\right) = \|B\|\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}x + \arg(B)\right)$.

solution réelle de l'équation
↳ onde thermique progressive sens x croissant atténuée dans le sens de propagation
terme en A : change x en -x

$e^{-\frac{x}{\delta}}$

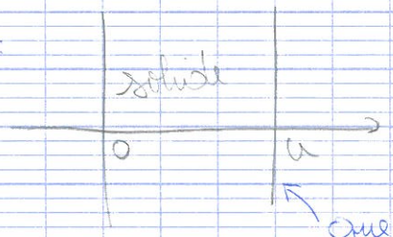
Ressemblance : effet de peau, $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ profondeur de pénétration de l'onde dans le solide : effet de peau thermique

* Ⓗ solide illimité ($x \to \infty$ dans le solide)

- On retient uniquement l'onde progressive vers la droite
conditions avec limites : $\|B\| = \delta T$, $\arg B = 0$

$$T(x,t) = T_0 + \delta T\, e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

* solide limité :



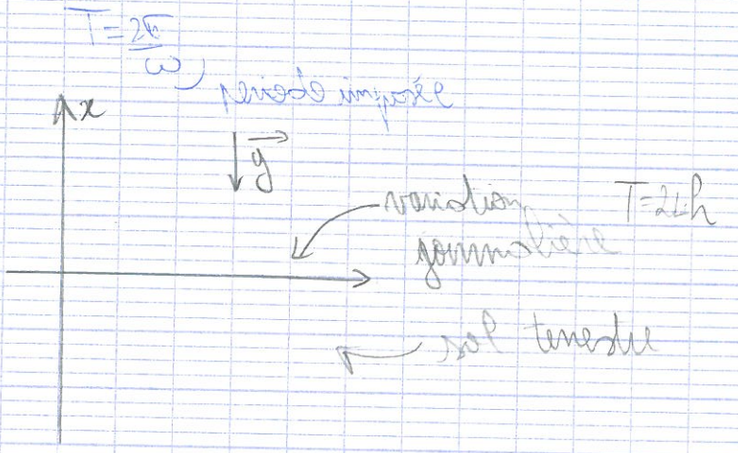
on ne peut pas abandonner le terme en A : possibilité d'onde réfléchie

↖ que se passe-t-il en $x = a$: $T = T_0$ pour la $\tilde{T} = T_0 + A e^{kx} e^{i\omega t} + B e^{-kx} e^{i\omega t}$
on trouve A et B avec les conditions avec limites.

exemples numériques : calcul de δ :

$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{DT}{\pi}}$$



application : sol tendre

On prend $\omega_{fondamental} = \frac{2\pi}{24h}$

Rappel théorie : $A_n \cos(n \dots)$ $n=1 \Rightarrow$ fondamental

sol : très humide : $\lambda \sim 1\ SI$

$D = \frac{\lambda}{\mu C} \longrightarrow C_{eau} = 4,185\ J\,g^{-1}\,K^{-1}$ | 1 calorie = 5 Cal à fournir pour augmenter la température de 1 g d'eau de 1°C = 4,185 J

$= 1\ cal\ g^{-1}\,K^{-1}$

$\approx 4000\ J\,kg^{-1}\,K^{-1}$

$\mu_{eau} = 1000\ kg\,m^{-3}$

$D_{eau} \simeq \frac{1}{10^3 \times 4 \times 10^3} \sim 2,5 \cdot 10^{-7}\ m^2\,s^{-1}$ (coef de diffusivité $\sim 10^{-7}$ méthode rapide pour trouver D)

$\delta \sim \sqrt{\frac{2,5\ 10^{-7} \times 10^5}{\pi}} \sim 10^{-1}\ m = 10\ cm$

au delà de 50 cm sous le sol : pas d'effet thermique

→ Variations annuelles : $T = 365$ jours ~ 400 jours

↳ $\delta \sim 2\ m \Rightarrow$ températures cave dans une grotte ↳ frais l'été et chaud l'hiver

→ il n'y a pas de méthode universelle pour trouver le sol : il faut s'adapter à chaque fois : il y a des techniques.

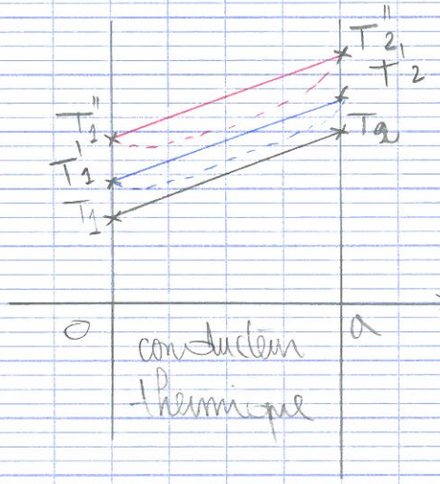
2 problèmes qui se superposent : | régime transitoire : si on nous donne les CI
| sinon : régime permanent ou régime forcé

technique qu'on a pas vu : traitement de régime quelconque en superposant des régimes harmoniques

I Compléments.

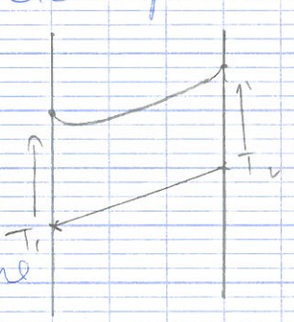
1) Régimes quasi-permanents

exemple :



Contrainte constante
après transitoire
→ régime permanent
$T = T_1 + \frac{x}{a}(T_2 - T_1)$
donnée $\tau_c = a^2/D$
↓
temps caractéristique de conduction

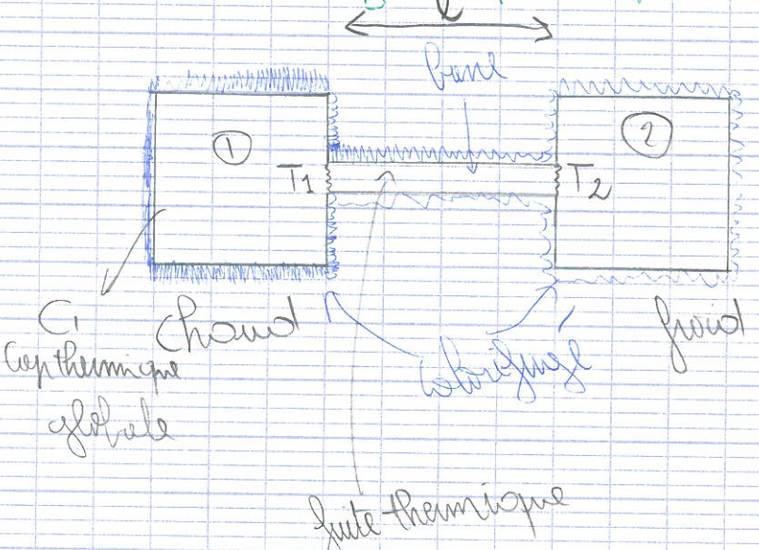
Que se passe-t-il si on fait varier T_1 et T_2 ?
si on fait varier assez lentement, la variation de temp entre 0 et a reste proche d'une fonction affine.



Si le temps caractéristique évolution des contraintes est grande devant τ_c
Profil de température est pratiquement le même qu'en régime permanent

→ $T(M) \sim T_p(M) \longrightarrow \Delta T_p = 0$
↓
permanent.

2) Exemple 1 de régime quasi-permanent



Fuite thermique "faible"
⟶ évolution lente
⟶ régime quasi-permanent

pour ① T_p est uniforme $T_1(M,t)$
pour ② T_p uniforme $T_2(M,t)$

Pour la barre
⟶ $T(x)$ affine (configuration résistance thermique)

$P_{th} * R_{th} = (T_1 - T_2)$ (valable en régime permanent)

Résolution du problème: ~~équation locale~~ / premier principe
(on a proposé une 2ème approche incompatible avec l'eq locale)

* 1er principe :

① $\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q_{reçue}}{\delta t}$ ② $C_2 \frac{dT_2}{dt} = P_{th}$

② $C_1 \frac{dT_1}{dt} = -P_{th}$

$$\cancel{1}\ \frac{dT_1}{dt} = -\frac{1}{R_{th}C_1}(T_1 - T_2)$$

$$\cancel{2}\ \frac{dT_2}{dt} = -\frac{1}{R_{th}C_2}(T_1 - T_2)$$

$$\frac{d}{dt}(T_1 - T_2) = \frac{1}{R_{th}}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right)(T_2 - T_1)$$

$$\boxed{T_1 - T_2 = (T_1 - T_2)_0\, e^{-t/\tau}}$$

durée d'évolution τ

il faut vérifier que $\tau \gg$ régimes transitoires

3 temps caract : homogénéisation ①, " ②, temps contact barre

① ② identiques de taille caractéristique a

$$\tau_{\text{conduction pour ① et ②}} = \frac{a^2}{D_1 (= D_2)} \ll \tau_{\text{calculé}}$$

barre : $\tau_{\text{conduction barre}} = \frac{\ell^2}{D_{\text{barre}}} \ll \tau_{\text{calculé}}$

pour $C_1 = C_2$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{R_{th}}\frac{2}{C_1}, \quad \tau = \frac{R_{th}C_1}{2} = \frac{1}{\lambda_{\text{barre}}}\frac{\ell}{S}\mu_1 C_1 a^3$$

$$\frac{a^2 \mu_1 c_1}{\lambda_1} \ll \frac{1}{\lambda_{\text{barre}}}\frac{\ell}{S}\mu_1 C_1 a^3$$

$$\boxed{\frac{\lambda_{\text{barre}}}{\lambda_1} \ll \frac{\ell a}{S}}$$ condition 1

→ marche si la barre est un mauvais conducteur thermique ou bien long ou S petit...

$$\frac{\ell^2}{\lambda_{\text{barre}}} C_{\text{barre}} \mu_{\text{barre}} \ll \frac{1}{\lambda_{\text{barre}}}\frac{\ell}{S}\mu_1 C_1 a^3$$

$$\boxed{C_{\text{barre}} \ll C_1}$$ cond 2.

et cohérentes.

conditions réalisables, OK

3) Analogies en régime quasi-permanent avec des circuits électriques :

$\boxed{C\frac{dT}{dt} = P_{th}}$ $\quad$ $R_{th} = T_1 - T_2$

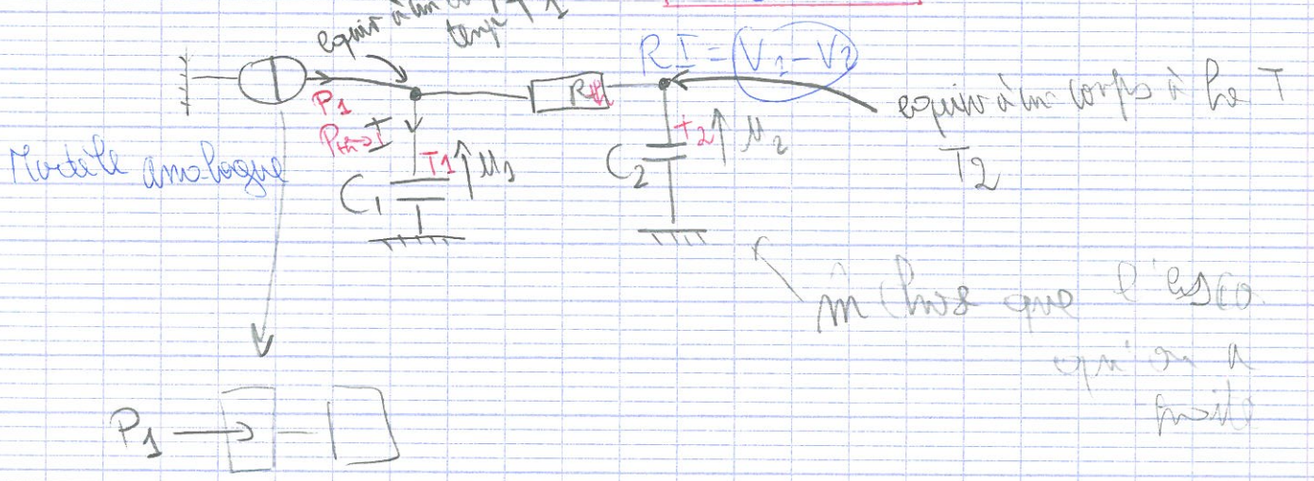


$q = CV$

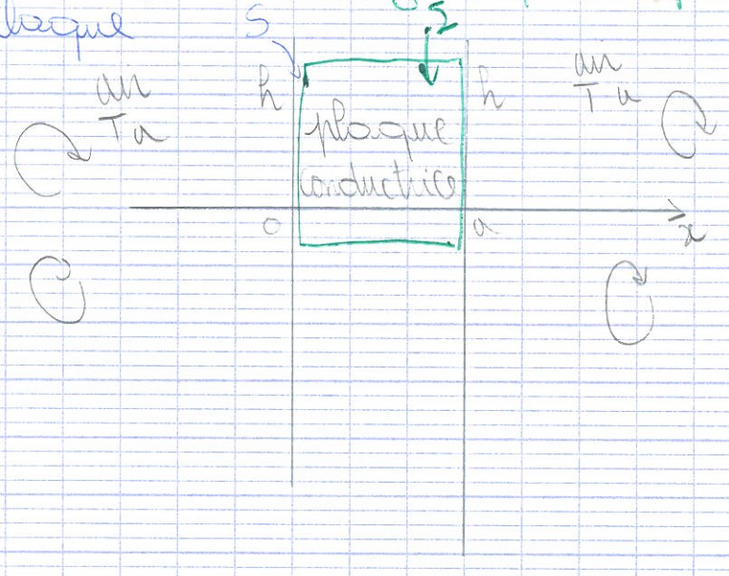
$I = \frac{dq}{dt}$

on combine $I = C\frac{dV}{dt}$

$\rightarrow \boxed{C\frac{dV}{dt} = I}$



4) Exemple 2 de régime quasi-permanent : Refroidissement d'une plaque



$t = 0$: $T_{plaque} \neq T_{air}$

si $T_{(x=0)}$, $x = 0$ étant constante après un régime transitoire T devient uniforme dans la plaque

(H) Régime quasi-permanent

$T_{x=0}$ et $T_{x=a}$ varient lentement $\Rightarrow$ $T \sim$ uniforme dans la plaque
$\rightarrow$ mise en équation par le premier principe

$$\frac{dU_\Sigma}{dt} = P_{reçue} \longrightarrow \underbrace{C}_{\mu C S a} \frac{dT}{dt} = -h(T-T_a) 2S$$

donc $\mu C S a \dfrac{dT}{dt} = -h(T-T_a) \times 2S$

alors $\dfrac{dT}{dt} = -(T-T_a)\dfrac{2h}{\mu C a} \longrightarrow \tau = \dfrac{\mu C a}{2h}$

$$T - T_a = (T_{init} - T_a) e^{-t/\tau}$$

$T \xrightarrow[t \to +\infty]{} T_a$ avec la durée caractéristique τ

Dernière étape : Validation de l'hypothèse : $\tau \gg \dfrac{a^2}{D}$ temps caractéristique d'évolution de T dans la plaque

$$\frac{\mu C a}{2h} \gg \frac{a^2}{D} \quad \text{or} \quad \mu C = \frac{a^2 \mu C}{\lambda}$$

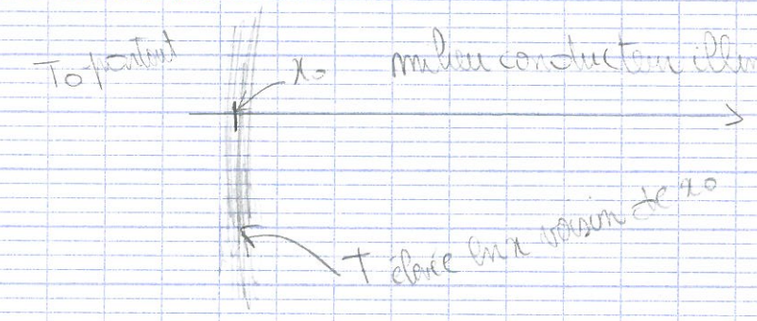
nombre de Biot (sans dim) $\rightarrow$ $\dfrac{ah}{\lambda} \ll 1$: plus λ est grand, plus le fait que $T \simeq$ cte est un bon modèle

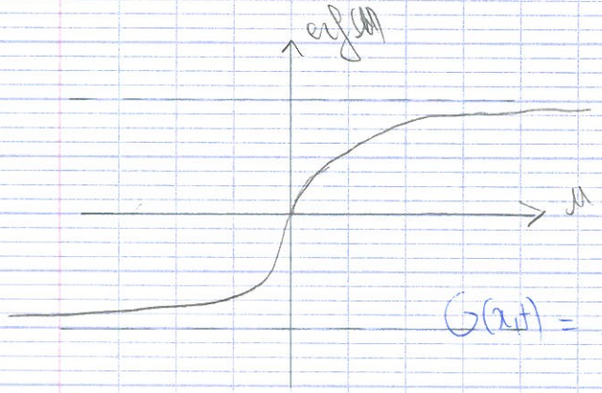
exprime le rapport entre l'efficacité des transferts conducto-convectifs et efficacité des transferts conductifs

$\rightarrow$ nb de Biot $\ll 1$: C aux limites $T = T_a$: voir problème précédent.

5) Diffusion d'un excès d'énergie en dimension 1 :

(A) Milieu conducteur illimité





On regarde la fonction erf :

$$g(u) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}(u) = \int_0^u e^{-v^2}\,dv \times \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4Dt}} e^{-v^2}\,dv = g\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

ceci est solution de $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)$$

$\frac{\partial G}{\partial x}$ est solution de l'équation :

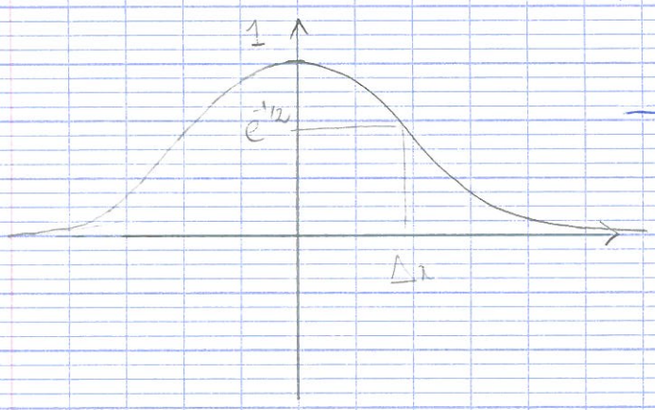
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) \overset{?}{=} D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) \overset{?}{=} D\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)$$

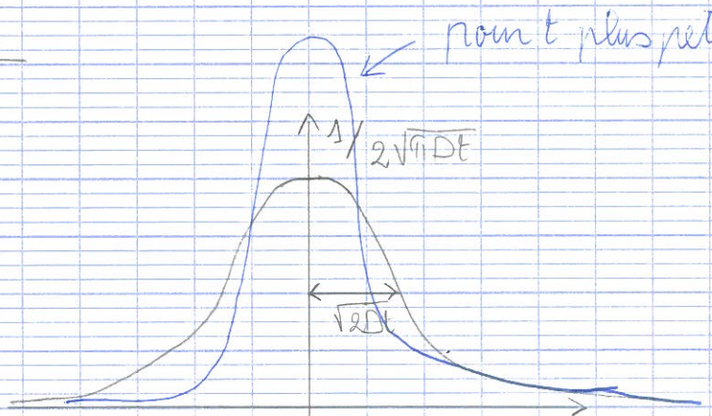
(ce qui est vrai car $\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \times D$)

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, g'(u)$$

etude de $\frac{\partial G}{\partial x}$: $\exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta x^2}\right)$ gaussienne de largeur Δx



→ courbe de la gaussienne



Courbe qui nous intéresse :

aire sous la courbe :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\partial G}{\partial x} = [G]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$+\infty \leftarrow +\infty$

Lorsque $t \to 0$: ——— aire sous la courbe = 1

→ distribution δ de Dirac

Aire sous la courbe : histoires d'énergie interne :

$S|T_2|$

$T(x) = T_0 + \delta T(x)$

Energie interne ? : variation de $\underbrace{\mu c}_{C} S dx \delta T$

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu C S dx \delta T + U(T_0)$$

Considérons $T(x) = T_0 + \frac{\partial G}{\partial x} \times A$ solution de l'équation de diffusion

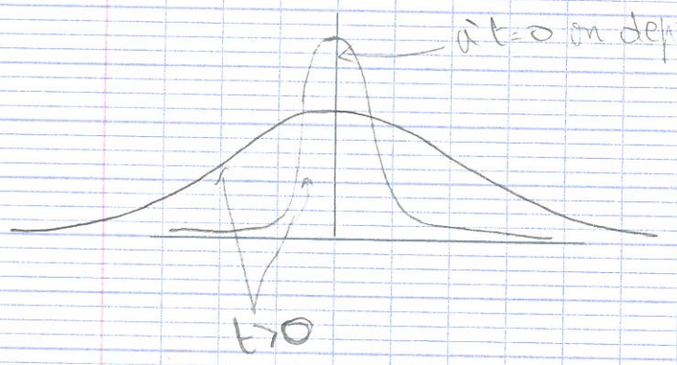
énergie interne associée $U_{tot} = U(T_0) + A \mu C S \underbrace{\int dx \frac{\partial G}{\partial x}}_{=1}$

donne $A = \frac{U_{tot} - U_{T_0}}{\mu C S}$

solution de l'équation de diffusion

$$T(x) = T_0 + \frac{\Delta U}{\rho C S} \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)$$

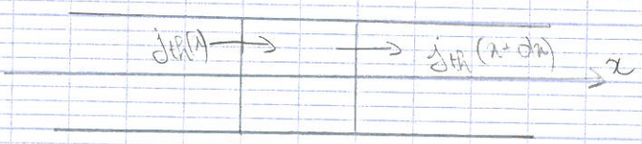
$t=0$: $T=T_0$ partout, sauf en $x=0$



⑥ Entropie créée dans un barreau en dimension 1 en régime permanent :

T ne dépend que de x, régime permanent $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$

$j_{th}(x) = cte$: démontrable



tranche $dU=0$ (permanent) $\Rightarrow P_{th\ reçue} = 0$ $\therefore j_{th}(x) = j_{th}(x+dx)$

Autre méthode $\rho c \cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} = 0 \Delta T = \cancel{\ldots}$ $\rightarrow \Delta T = 0 \Rightarrow$ T(x) affine

$\frac{dT}{dx} = cte$ OK

Why ?

tranche : 2nd principe $0 = dS = \sum_S \frac{\delta Q_{reçue}}{T_{frontière}} + \delta S_{créée}$

pendant δt : $\delta Q_{reçu\ en\ x} = j_{th} S\, dt$

$$0 = j_{th} S \delta t \left(\frac{1}{T(x)} - \frac{1}{T(x+dx)} \right) + \delta S_{créée}$$

$$\delta S_{créée} = j_{th} S \delta t \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\right) dx$$

donc $\boxed{\dfrac{\delta S_{créé}}{dt\, \delta t} = j_{th} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{T}\right)}$: entropie créée par conduction thermique par unité de volume et de temps

en dimension 3 : $\dfrac{\delta S_{créée}}{\delta t\, d\tau} = j_{th} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{T}\right)$ ← j_{th} ?

conclusion : compatibilité avec Fourier $\Rightarrow \dfrac{\delta S_{créée}}{\delta t\, d\tau}$ est toujours ≥ 0

une manière de voir cette positivité : on pourrait avoir :

$j_{th} = A \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{T}\right)$ avec $A(T) > 0$: manière la plus simple d'écrire

$= \left(\dfrac{-A}{T^2}\right) \dfrac{dT}{dx}$

$\hookrightarrow \lambda = \dfrac{+A}{T^2}$