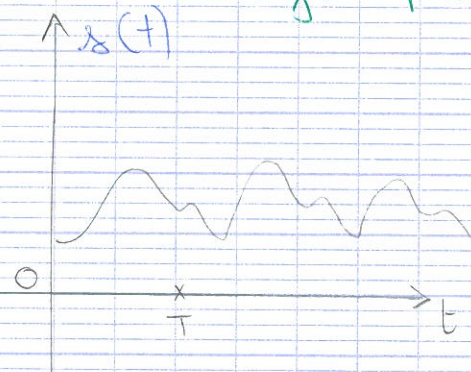


Elements de traitement de signal

I Action d'un filtre linéaire sur un signal périodique

① Spectre d'un signal périodique

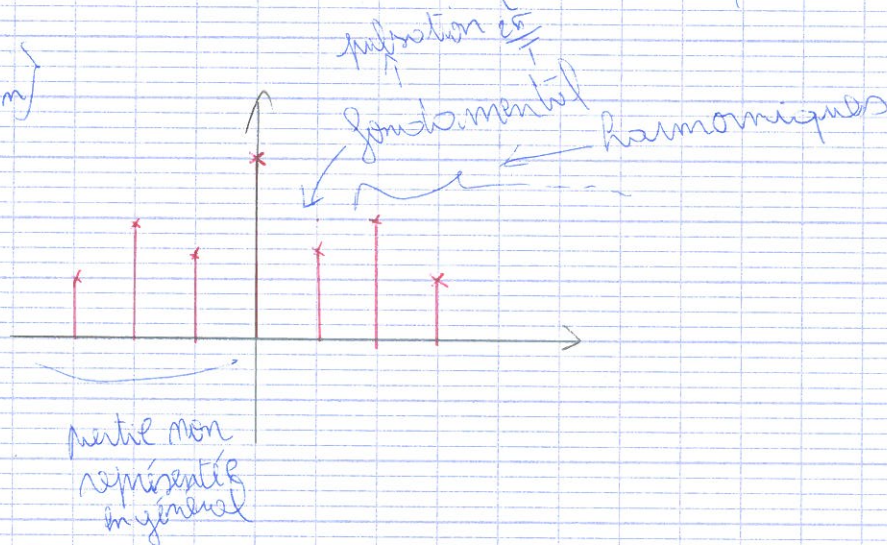


$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i 2\pi n t / T} = a_0 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\dots) + b_n \sin(\dots)$$

↳ expression utilisée pour la suite

signal réel $\forall t, s(t) \in \mathbb{R} \quad C_{-n} = \overline{C_n}$ (ou $|C_n|$ ou $|C_n|^2$)

spectre = $\{C_n\}$



signal périodique $\Leftrightarrow$ spectre discret.

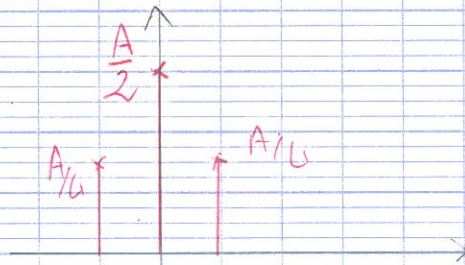
$$C_0 = \frac{1}{T} \int_T s(t) dt : \text{valeur moyenne}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T s(t) e^{-i 2\pi n t / T} dt$$

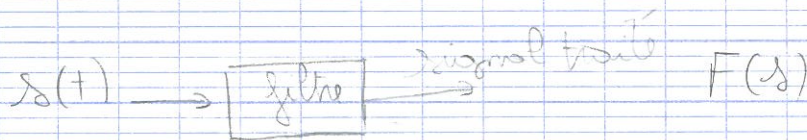
exemple : $s(t) = A \cos^2 \omega t$, périodique $\omega T = \pi$, $T = \frac{\pi}{\omega}$

$$s(t) = \frac{A}{2} (1 + \cos(2\omega t))$$

$$= \frac{A}{2} \left(1 + \frac{1}{2} e^{\frac{2i\omega t}{T}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2i\omega t}{T}} \right)$$



2) Action d'un filtre linéaire sur un signal périodique



$$F(s_1 + \lambda s_2) = F(s_1) + \lambda F(s_2)$$

pour un filtre linéaire : si le signal d'entrée est un signal purement harmonique de pulsation ω :

$$s(t) = s_0 e^{i\omega t} \quad s_0 \in \mathbb{C} : \quad \frac{F(s(t))}{s(t)} \text{ est indépendant de } s_0$$

$$H(\omega) = \frac{\text{sortie}}{\text{entrée}} : \text{fonction de transfert}$$

↳ m'a de sens que pour un signal harmonique.

Pour un signal périodique quelconque :

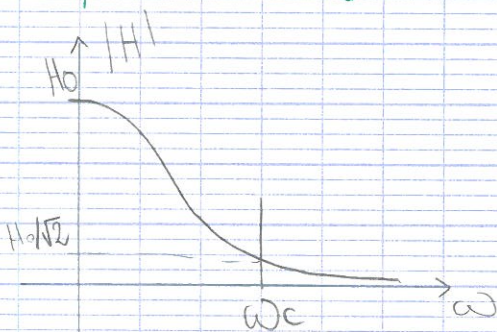
$$s(t) = \sum C_m e^{\frac{2i\pi t}{T} m} \rightarrow \omega_m = \frac{2\pi m}{T}$$

→ sortie du filtre

$$\sum_m C_m H\left(\frac{2\pi m}{T}\right) e^{\frac{2i\pi m t}{T}}$$

périodique → T donnée → $\omega_m = \frac{2\pi m}{T} \rightarrow H(\omega_m)$

③ Comportement moyen d'un filtre passe bas:



ω_c : pulsation de coupure à -3 dB

pulsation à partir de laquelle

$$|H(\omega)| \leq \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

Gain d'un filtre $G_{dB} = 20 \log_{10} |H|$

$$G_{dB} = 10 \log_{10} |H|^2$$

$$G_{dB} = \log_{10} |H|^2$$

$$= \log_{10} \frac{P_{sortie}}{P_{entrée}}$$

Puissance divisée par 2

$$G_{entrée} = \log_{10} \frac{1}{2} \approx -0,3$$

en décibels → -3 dB

④ Signal périodique tel que $\frac{2\pi}{T} \gg \omega_c$

pulsation fondamentale

$$\left| \frac{2\pi m}{T} \right| \gg \omega_c \quad m \neq 0$$

→ $H\left(\frac{2\pi m}{T}\right)$ négligeable → sortie $C_0 \times H_0 = H_0 \langle s \rangle$: moyenneur sur une période

④ Comportement intégrateur de certains filtres:

a) Les filtres concernés:

* Filtre passe bas de premier ordre: $H_{PB1} = \frac{H_0}{1 + i\omega\tau} = \frac{H_0}{1 + i\omega/\omega_c} \quad | \omega_c \tau = 1$

de gain en bande passante H_0 et de pulsation de coupure ω_c

* Filtre passe bande d'ordre 2: $H_{PB2} = A \frac{Q}{1 + iQ(x - \frac{1}{x})} \quad | \quad x = \omega/\omega_0$

on peut aussi écrire: $H = A \frac{Q}{1 + iQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$

ω_0 : pulsation de résonance: $|H| = \frac{|A|Q}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$ maximal en $\omega = \omega_0$

$|H(\omega_0)| = |H_{max}| = AQ$, Q facteur de qualité

→ Asymptotes ne dépendant pas de Q , mais maximum si

b) Comportement des deux filtres en haute fréquence:

En haute fréquence: $H_{PB1} \approx \frac{H_0}{\tau} \times \frac{1}{i\omega} \approx \underbrace{H_0 \omega_c}_{\rightarrow K} \frac{1}{i\omega}$

$H_{PB2} \approx \frac{AQ}{iQ\omega} \quad \omega_0 = \underbrace{\frac{A\omega_0}{\omega}}_{\rightarrow K}$
 $e^{i\omega t} \xrightarrow{\text{intégrer}} \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t}$

c) Action de pseudo intégrateur d'un filtre sur un signal périodique tel que $\frac{2\pi}{T} \gg$ pulsation caractéristique du filtre
 pulsation du fondamental (signal d'entrée de haute fréquence)
 $x(t) = \sum C_n e^{\frac{i2\pi n t}{T}}$

$$= C_0 + \sum_{n \neq 0} C_n e^{\frac{i2\pi n t}{T}} \rightarrow |\omega_n| \gg \omega_c \text{ selon les cas}$$

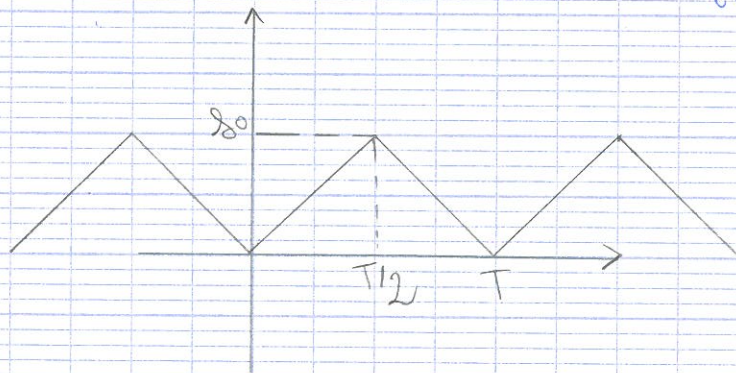
$\times H(\omega_n) \Leftrightarrow \text{intégrer et } \times K$

$$\text{Réponse du filtre} = \langle s \rangle \times H(\omega=0) + \int_0^t (s(t) - \langle s \rangle) dt \times K$$

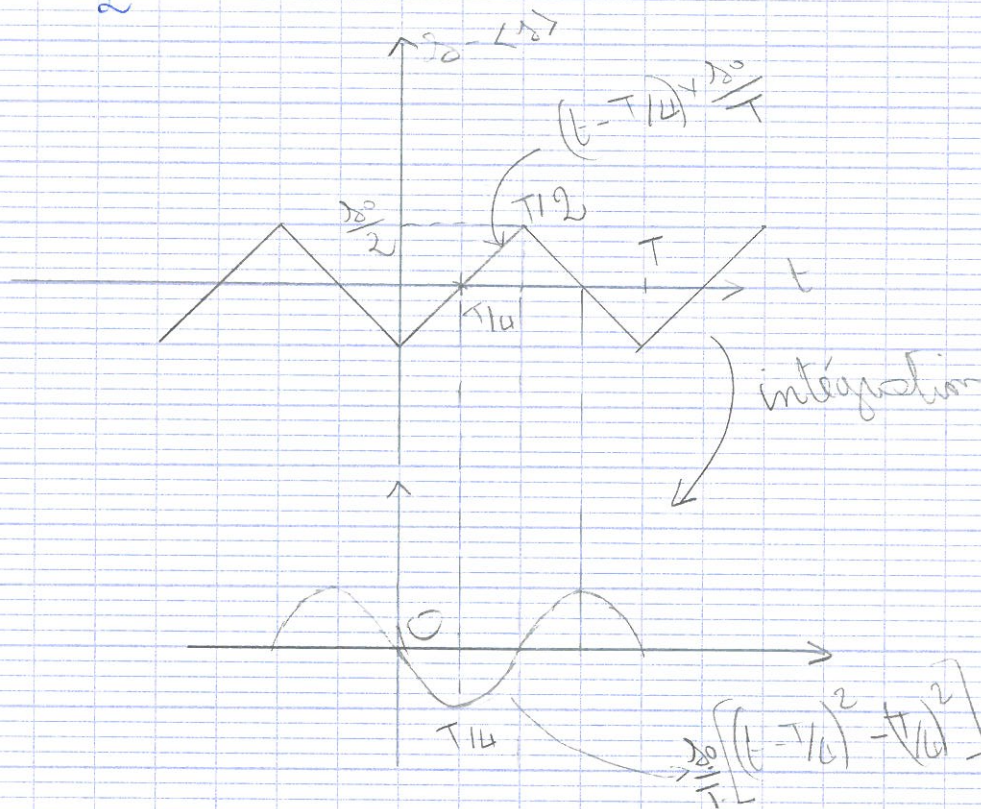
La primitive de $s(t)$ $\rightarrow \langle s \rangle$

dont la valeur moyenne est nulle

d) Exemple : réponse du filtre passe-bas : $H = \frac{H_0}{i\omega\tau + 1}$

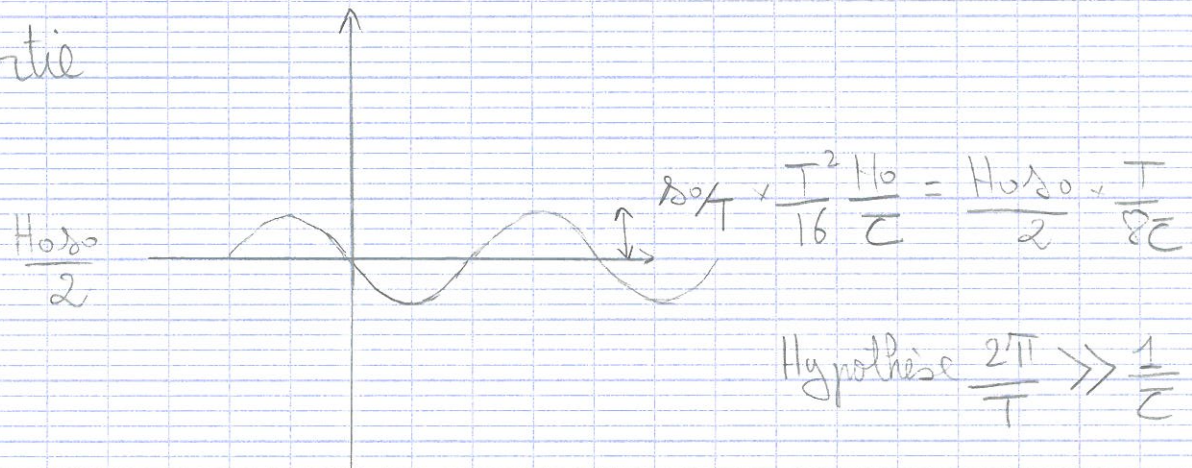


$$\langle s \rangle = \frac{s_0}{2} \quad H(\omega=0) = H_0$$



$$\begin{aligned} \text{Pour } t \in [0, T/2] : \text{sortie} &= H_0 \frac{s_0}{2} + \frac{s_0}{T\tau} \left[\frac{t^2}{2} - \frac{tT}{2} \right] H_0 \\ &= H_0 s_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{T\tau} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{tT}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Sortie



5) Comportement pseudo-dérivateur de certains filtres:

a) filtres concernés

Passer haut d'ordre 1 $H_{PH1} = H_0 \frac{i\omega C}{1 + i\omega C}$

Passer bande d'ordre 2 $H_{PBande2} = A \frac{Q}{\cancel{X} + iQ(\cancel{X}, \frac{\omega}{\omega_0})}$

Basse fréquence: $H_{PH1} \approx H_0 i\omega C$

$H_{PBande2} \approx \frac{A}{\omega_0} i\omega$

ou $\frac{d}{dt}(e^{i\omega t}) = i\omega e^{i\omega t}$

→ basse fréquence

b) Action sur un signal périodique tel que $\frac{2\pi}{T} \ll$ pulsation caractéristique (ω_c, ω_0)

$s(t) = \sum C_n e^{i \frac{2\pi n t}{T}} \rightarrow$ sortie $K \times \frac{d}{dt}(s)$: pseudo-dérivateur

Néanmoins prestés-pair: pour n grand $\frac{2\pi n}{T}$ n'est plus une basse fréquence: les termes pour lesquels $n \times \frac{2\pi}{T} \sim \left| \frac{\omega_c}{\omega_0} \right|$

Mais ça marche à peu près si $|C_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ assez vite.

assez vite: sortie = $\sum C_n H\left(\frac{2\pi n}{T}\right) e^{i \frac{2\pi n t}{T}}$

↓ filtre passe haut: c'est à haute fréq.

pour PH, Cm doit tendre vers 0 très vite

" P_{Bande 2}: ça marche plutôt mieux sauf si Q élevé

Bref: aspect intégrateur OK

" dérivateur, il faut faire attention aux termes à haute fréq.

6) Comportement d'un ^{non} filtre linéaire

* Le spectre en sortie peut contenir des fréquences non présentes en entrée

exemple

$$s \mapsto s^2$$

"mise de carré"

entrée: $s = A \cos \omega t \rightarrow$ spectre

$$\text{sortie} \rightarrow K A^2 \cos^2 \omega t = K \frac{A^2}{2} (1 + \cos 2\omega t) \rightarrow \text{spectre } 0, 2\omega t, 2\omega t$$

$$s(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t$$

$$\text{sortie } K s^2 = K (a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t)^2$$

$$2a_1 a_2 \cos \omega t \cos 2\omega t = a_1 a_2 (\cos 3\omega t + \cos \omega t)$$

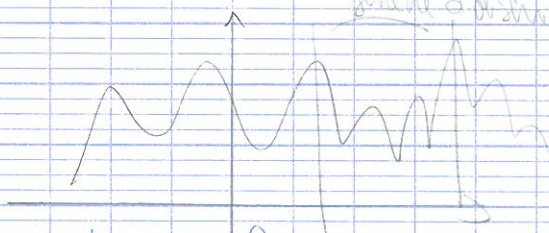
nouvelles fréquences / amplitudes

Conclusion: résultats cités auparavant non valables pour filtres non linéaires

II Analyse spectrale d'un signal connu sur une durée finie

1) Problème étudié:

Il existe un signal $s(t)$

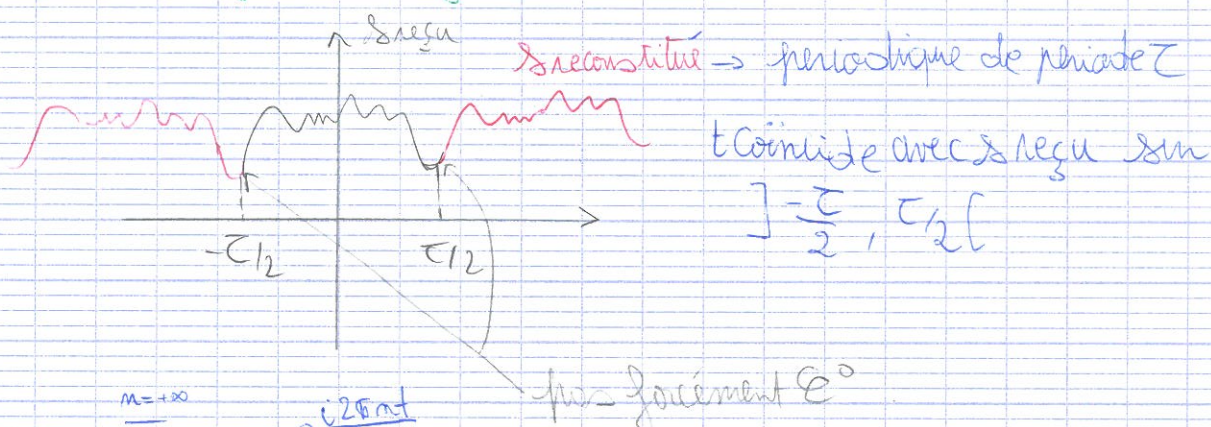


analyse: extraire l'information du signal

↳ interpréter un signal comme une superposition de sinusoïdes

→ il faut faire une analyse spectrale de sinusoides de Fourier

2) Méthode d'analyse envisageable.



$$s_{reconstitué} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i 2 \pi n t / T}$$

$$\forall t \in]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[\quad s_{regu} = \sum c_n e^{i 2 \pi n t / T}$$

$$c_n \text{ calculable pour } s_{reconstitué} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i 2 \pi n t / T} s_{regu} dt$$

3) Exemple

(H) $s = a e^{i 2 \pi f_0 t}$ sinusoïde parfaite de fréquence f_0 à priori inconnue

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i 2 \pi n t / T} e^{i 2 \pi f_0 t} dt$$

$$= \frac{a}{T} \left[\frac{e^{i 2 \pi (f_0 - \frac{n}{T}) t}}{i 2 \pi (f_0 - \frac{n}{T})} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{a}{T} \frac{\sin(\pi T (f_0 - \frac{n}{T}))}{\pi (f_0 - \frac{n}{T})}$$

$$= a \operatorname{sinc}(\pi T (f_0 - \frac{n}{T}))$$

* $\nu_n = \frac{n}{T}$ (fréquence de l'harmonique de rang n pour $\nu_n = f_0$)

(exemple 2^o) $c_n = a, n \neq 20, \operatorname{sinc}(\pi T (f_0 - \frac{n}{T}))$

nul pour $\pi T (f_0 - \frac{n}{T}) = k \pi \rightarrow f_0 T - n = k$

si $f_0 = 20$: T est un multiple de la période : signal identique

Donc ça que le terme correspondant à f_0 qui est non nul

→ pour $f_0 = 20,3$:

Rug $T_m = \frac{m}{C}$ valeur choisie g_d freq + freq positives

4) Conclusion:

* Le spectre calculé est assez proche du spectre réel à $\pm 0,5/C$ près

fréquence obtenue par la méthode fait apparaître une impulsion par rapport à la fréquence réelle de l'ordre de $1/C$

* Si plusieurs fréquences sont superposées (surtout)

→ Confusion après analyse si l'écart à la fréquence est inférieur à C .

→ Pouvoir de résolution de l'ordre de $1/C$
~~non~~ mesurable

* entente de précision relative

→ en est mesurable si $1/C \ll f_0 = \frac{1}{T_0}$ ← période présente dans

le signal : $C \gg T_0 \Rightarrow$ bonne précision

* La durée d'acquisition du signal doit comporter un grand nombre de périodes

* Ou bien par coïncidence $f_0 = \frac{\text{entier}}{C} = \frac{2}{T_0}$

→ mesure fiable sur une durée plus grande que la plus grande période

III Échantillonnage d'un signal

Conversion analogique numérique

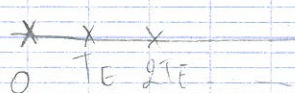
Calcul numérique :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-\frac{2i\pi n t}{T}} dt$$

1) Échantillonnage :

Fenêtre $[0, T[\rightarrow$ ensemble de dates infini

$\rightarrow$ mesure du signal à des dates : $t_k = k T_E$



T_E : période d'échantillonnage $\cdot \frac{1}{T_E} = f_E$

fréquence d'échantillonnage

N valeurs $T_E = \frac{T}{N}$

$\{t_k\} : t_k = k T_E, k \in [0, N-1]$

$\rightarrow$ N échantillonnages du signal
 $\rightarrow$ ensemble discret.

2) Exemple :

$$s(t) = a e^{i 2\pi f_0 t}$$

on échantillonne le signal : $s_k = s(t = t_k) = s(t = k T_E)$

$$s_k = a e^{i 2\pi f_0 k T_E}$$

3) Le phénomène de repliement du spectre

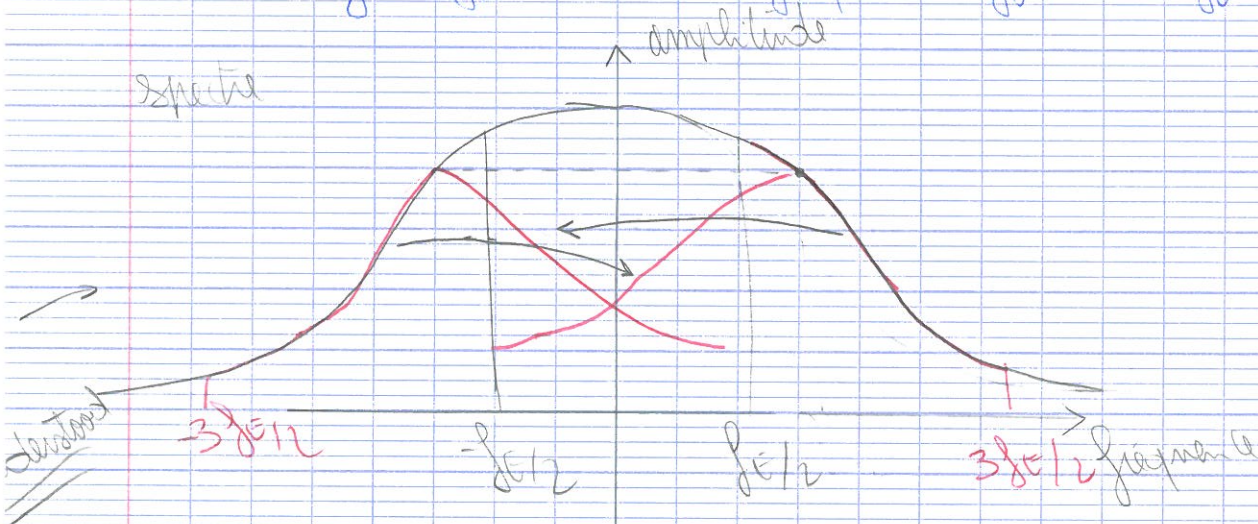
$\hookrightarrow$ ANV : aliasing

$$\{s_k f_0\} \quad \{s_k f_0 + f_E\} \quad (f_E = 1/T_E)$$

$$e^{i 2\pi (f_0 + f_E) k T_E}$$

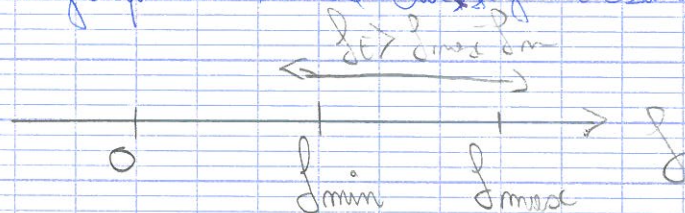
$$s_k f_0 + f_E = a e^{i 2\pi (f_0 + f_E) k T_E} = e^{i 2\pi f_0 k T_E} = s_k f_0, \forall k \in [0, N-1]$$

→ On connaît toutes les fréquences f_0 entre 0 et f_E



Le critère de Nyquist - Shannon:

Pour l'analyse du signal échantillonné on ne peut pas savoir la fréquence réelle du signal sauf module f_E



si on sait que $f_0 \in [f_{min}, f_{max}]$ de largeur inférieure à f_E en pratique



Si $f_{max} < f_E/2$ alors il n'y a plus de doute sur l'analyse spectrale

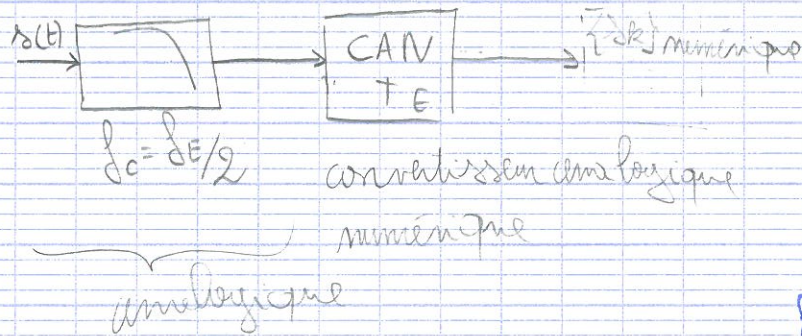
Le critère: Pour échantillonner un signal sans perte d'information il faut que la fréquence maximale présente dans le signal soit inférieure à $f_E/2$

$f_E/2$ fréquence de Shannon, $f_{max} < f_E/2 \rightarrow T_E < T/E$

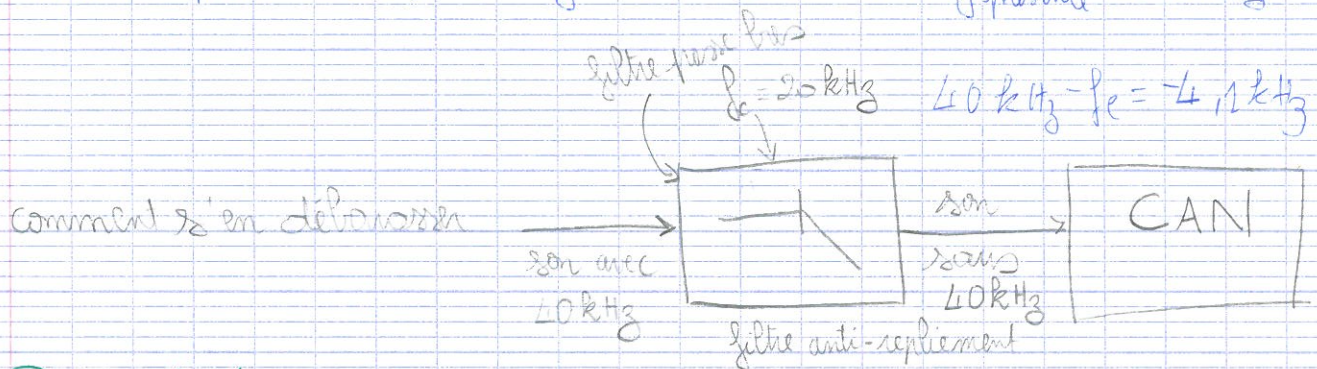
au moins 2 points échantillons par période.

5) Filtrage anti-repliement

filtre analogique passe bas de fréquence de coupure inférieure ou égale à $f_e/2$



exemple: musique onde sonore $f_{\text{utile}} < 20 \text{ kHz} \rightarrow f_e > 40 \text{ kHz}$
 même pour CD: enregistrement de son: $f_{\text{présente}} = 40 \text{ kHz}$



6) Conclusion

Obligations pratiques $\rightarrow$ conséquences sur la qualité / du signal

durée d'observation du signal $\rightarrow$

bornée Σ

Travail avec un nombre fini de

grandeurs mesurées (échantillonnage à f_e)

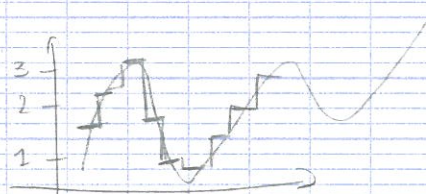
Valeurs numérique des $x[k]$

(mémoire de taille finie) on arrondit à la valeur mesurable la plus proche

imprécision sur les fréquences

de l'ordre de $1/\Sigma$

repliement du spectre: on doit se restreindre aux fréquences $< f_e/2$



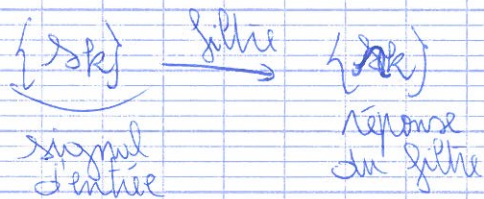
différence

bruit de fréquence $\sim f_e$

IV Traitement numérique du signal:

1) Filtrage numérique linéaire.

entrée $\{s_k\}$ $k \in [0, N-1]$



Filtre linéaire si l'application $\{s_k\} \mapsto \{r_k\}$ est linéaire

Filtre causal : ne prends en compte que ce qui se passe avant
 r_k ne dépend que de s_k avec $k' \leq k$

exemple : $r_k = s_k + \frac{1}{2} s_{k-1}$

$r_k = s_k + \frac{1}{2} r_{k-1}$

linéaire

forme générale : $\sum_{i=0}^{m-1} a_i r_{k-i} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j s_{k-j}$

ex : $r_k - \frac{1}{2} r_{k-1} = s_k + \frac{1}{3} s_{k-1}$

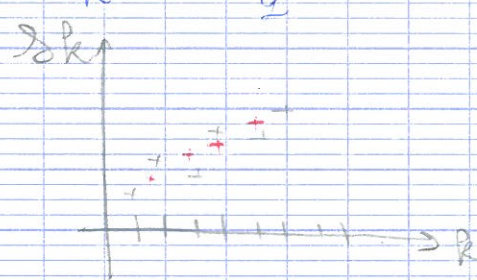
peut être représentée par une matrice

$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}$

2) Exemples:

a) Lissage d'un signal

moyenne de 2 valeurs successives $r_k = \frac{s_k + s_{k-1}}{2}$



→ Moyenne glissante sur N échantillons : $r_k = \frac{s_k + \dots + s_{k-N+1}}{n}$

1) filtre dérivateur:

$$A_k = s_k - s_{k-1}$$

↳ "dérivée de s_k " $\times T$

$s(t)$ analogique

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s(t+dt) - s(t)}{dt}$$

$$\sim \frac{s(t+T_E) - s(t)}{T_E}$$

si T_E est faible par rapport à une durée caractéristique du signal

2) filtre retardateur (décalage temporel de T_E)

$$A_k = s_{k-1}$$

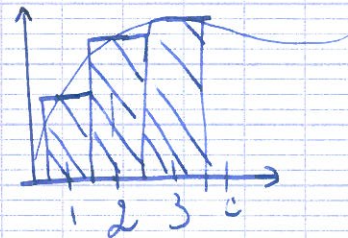
$$A_k = s_{k-3}$$

3) filtre intégrateur

$$A_k = s_k - A_{k-1}$$

$$(A_k = \sum_{i=0}^k s_i)$$

$$\{A_k\} = \int \{s_k\} \times \frac{1}{T_E}$$



3) Simulation numérique d'un filtre analogique passe bas d'ordre 1

▷ fonction de transfert $H = \frac{1}{1+i\omega\tau} = \frac{s}{c}$

$$s(1+i\omega\tau) = c$$

↳ comportement pour un entier

Régime harmonique quelconque

en notant la réponse

$$\tau \frac{ds}{dt} + r = s$$

$$\frac{dr}{dt} \longleftrightarrow \frac{r_k - r_{k-1}}{T_E}$$

analogique

$$\frac{\tau}{T_E} (r_k - r_{k-1}) + r_k = s_k$$

$$r_k (\tau + T_E) = T_E s_k + \tau r_{k-1}$$

Comportement fréquentiel du filtre?

def "fonction de transfert"?

(H) $s_k = s_0 e^{i\omega k T_E}$ | $s(t)$ harmonique de pulsation ω .

$$x_k = x_0 e^{i\omega T_E k} \quad | \quad x_{k-1} = x_0 e^{i\omega (k-1) T_E} = x_0 e^{i\omega k T_E} e^{-i\omega T_E}$$

$$x_0 (\tau + T_E) = T_E x_0 + \tau x_0 e^{-i\omega T_E}$$

$$\rightarrow \frac{x_0}{x_0} = \frac{T_E}{\tau + T_E - \tau e^{-i\omega T_E}} = \frac{x_k}{x_k} = H(\omega)$$

$$H = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T_E} (1 - e^{-i\omega T_E})}$$

$$\text{si } \omega T_E \ll 1: H \approx \frac{1}{1 + \tau i \omega} \quad (DL)$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \text{ de bande passante Shannon: } \frac{\omega}{2\pi} = f < \frac{8E}{2} = \frac{1}{2T_E}$$

$$\omega T_E < \pi$$

V Conclusion : Chaîne de traitement numérique

