Électrostatique → pas de variation au cours du temps

I Champ électrostatique:

1- Charge électrique : description.

a- Notion de charge électrique:

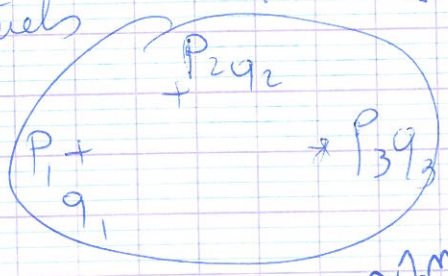
des forces peuvent apparaître entre les objets

→ on attribue à tout objet une caractéristique: la charge ER

propriétés:
* Charge indépendante du référentiel
* additive par réunion disjointe (grandeur extensive)
* $Q_{A\cup B} = Q_A + Q_B$
* la charge est une grandeur conservative, la charge globale d'un système fermé ne peut varier

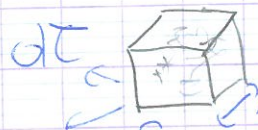
b- Description discrète ou continue de la charge d'un objet:

* Echelle microscopique : objets élémentaires ponctuels



$\Sigma q_i = q$ ♥

* échelle mésoscopique, macroscopique ~1m



$d\tau$: volume élémentaire

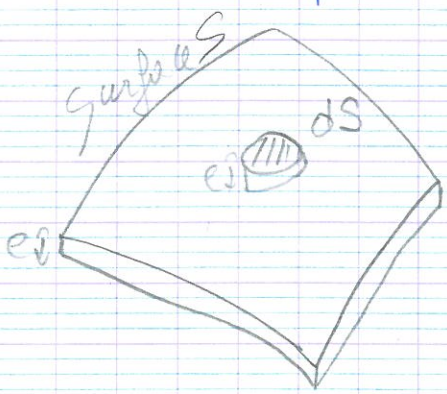
très petit / intermédiaire ~1µm / très grand / infini

toute somme $\sum q_i = q$ peut être remplacée par $\int$ 1, 2, 3

$dq = d\tau \times \rho(M)$ ♥ 1
densité volumique de charge
champ scalaire

c - Variante de description continue
* description superficielle et filiforme

charges confinées tout près d'une surface — confinées tout près d'une courbe



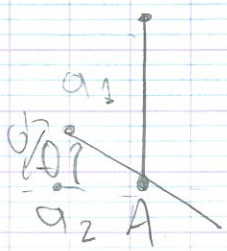
$dq = \rho(M) \times e\,dS$
$\rho e = \sigma$
$dq = \sigma(M)\,dS$ ♥ 2 $(\sigma = \rho \times e)$
densité surfacique de charge



$dq = \rho(M) \times s\,dl$
$dq = \lambda\,dl$ ♥ $(\lambda = \rho(M) \times s)$ 3
densité linéique de charge

2 - Notion de Force et champ électrostatique

a - Coulomb : loi de force de coulomb 1785
balance de coulomb.



$\vec{F}_{1/2} = \vec{T}(M) \cdot \vec{u}_{12} = -\dots$

Loi de coulomb $\vec{F}_{q_1 \to q_2} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}$

charges: unité coulomb C

distance m

F: Newton ; $k \sim 9.10^9 \, N.m^2.C^{-2}$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, ε_0 permittivité diélectrique du vide

$\vec{F}_{1 \to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \frac{\vec{r}_{12}}{r^3_{12}}$

Lois des

Compatibilité avec la mécanique classique

loi des actions réciproques

$\vec{F}_{q_2 \to q_1} = -\vec{F}_{1 \to 2}$

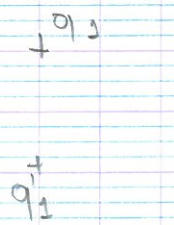
c- Notion de champ électrique:

d- Principe de superposition des forces et des champs électrostatique:



$\vec{F}_{(A\cup B)\to C} = \vec{F}_{A\to C} + \vec{F}_{B\to C}$

application en électrostatique:



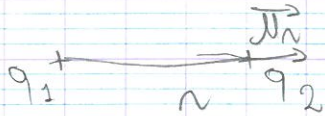
$\vec{F}_{(q_1,q'_1)\to q} = \vec{F}_{q_1\to q} + \vec{F}_{q'_1\to q}$

$= q\left(\underbrace{\vec{E}_1}_{\text{créé par } q_1} + \vec{E}'_1\right)$

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}'_1$

Principe de superposition: $\vec{E}_{A\cup B} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$ (réunion disjointe)

e- Analogie entre électrostatique et gravitation

Electrostatique	Gravitation
Coulomb $\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2}$	Newton $\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$
	
q, $\vec{F}$ électrostatique, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	m, $\vec{F}$ gravitationnelle, $-G$
$1/q \Rightarrow \vec{E}$, $\vec{F} = q\vec{E}$	$-4\pi G$ $\vec{g}$, $\vec{F} = m\vec{g}$

3- Champ ~~symétrique~~ électrostatique et symétrie

a- Principe de Curie: 1894

si il y a un lien de cause à effet entre deux phénomènes, alors les ~~symétries des causes~~ conséquences doivent présenter au moins les symétrie des causes

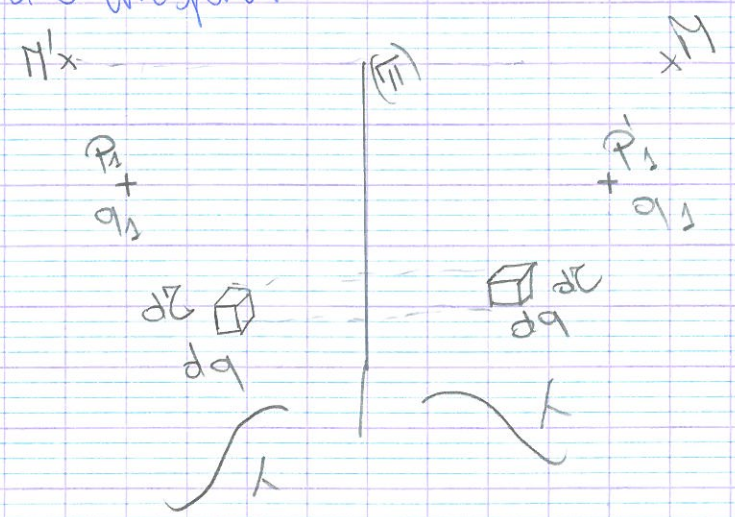
Causes ⇒ conséquences

↓ ↓

charges $\vec{E}(M)$

b- Symétrie plane:

(H) L'ensemble des charges admet une symétrie par rapport à un plan



Mquelconque $\vec{E}(M)$?

M' symétrique de M / (Π)

Le vecteur $\vec{E}(M') = Sym(\vec{E}(M))$

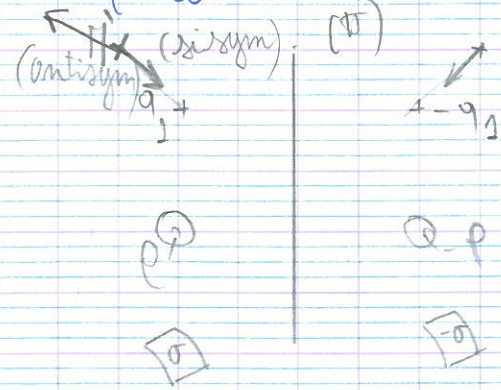
* $\vec{E}(Sym(M)) = Sym(\vec{E}(M))$

* $M \in (\Pi) \Rightarrow \vec{E}(M) // (\Pi)$

c- Antisymétrie plane:

Déf:

Une distrib de charge présente une antisymétrie si à toute charge correspond une charge opposée au point symétrique de celui où est placée la charge



$$\vec{E}(Sym(M)) = -\vec{E}(Sym(M))$$

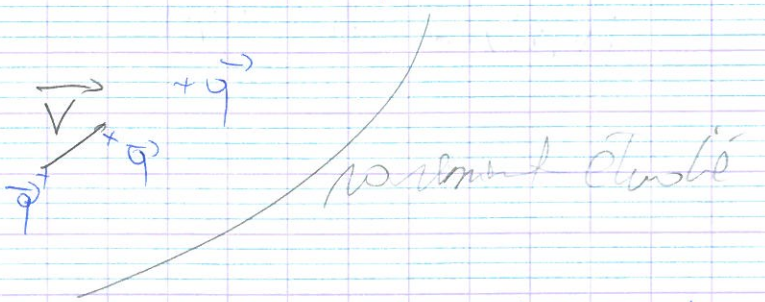
On dit alors que (Π) est un plan antisymétrie du champ $\vec{E}$

* si $M \in (\Pi)$ alors $\vec{E}(M)$ est orthogonal au plan (Π)

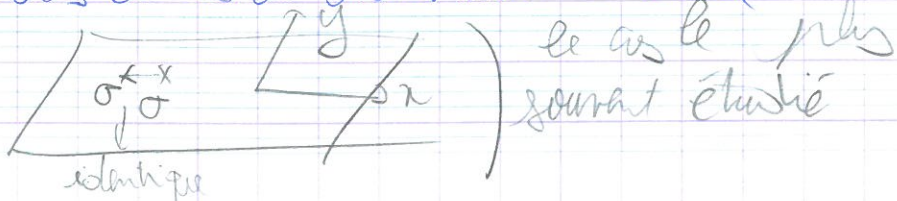
en un point d'un plan d'antisymétrie, $\vec{E}$ est normal au plan

d- Invariance par translation d'une distribution de charge

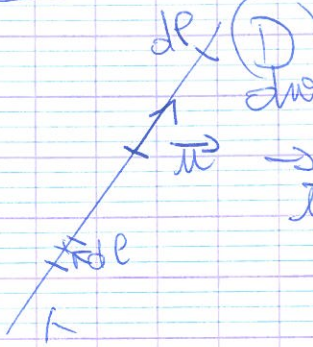
translation de vecteur $\vec{V}$



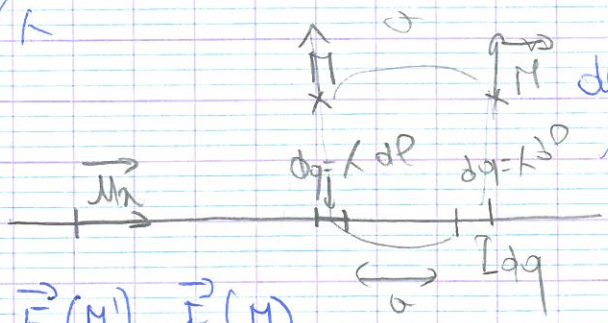
invariance par toute translation de direction $\vec{u_x}$ (dans le cas de distribution continue



autre exemple:



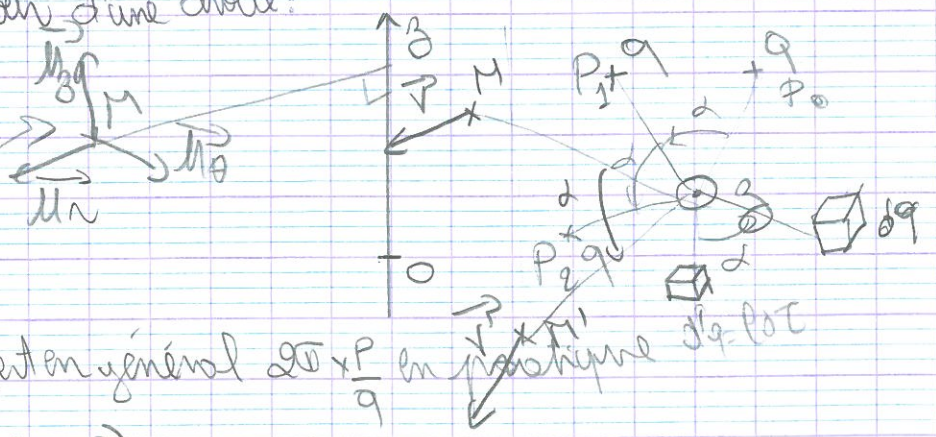
Droite chargée avec λ uniforme
invariant par translation selon $\vec{u}_z$



M' déduit selon $\vec{u}_z$ par rapport à M

$$\vec{E}(M') = \vec{E}(M)$$

c- Invariance par rotation d'un angle donné autour d'une droite:



Ex: en général $2\pi \times \frac{P}{q}$ en hélicoïde

$$(\vec{V}, \vec{V}') = \alpha \quad , \|\vec{V}\| = \|\vec{V}'\|$$

$$\vec{V} = Rot_\alpha(\vec{V}') \quad , \vec{E}(M) = Rot_\alpha \vec{E}(M')$$

("Champ invariant par rotation d'angle α")

→ en coord cylindriques d'axe Oz

E_r, E_θ, E_z sont invariantes quand θ

augmente de α

$E_r(r,\theta,z) = E_r(r,\theta+\alpha,z)$

cas particulier d'un point de l'axe de symétrie par rotation de l'angle α
$\vec{E}(M)$ doit être // à l'axe de symétrie

→ Remarque: $\alpha = \pi$ correspond à la symétrie par rapport une droite

β- symétrie de révolution: d'axe Oz
invariance par toute rotation d'axe Oz
par exp $\rho(r,\theta,z)$
le champ est invariant par toute rotation autour de O_z

→ $E_r(r,\theta,z)$ | sur l'axe $\vec{E}_{(M)} // \vec{O_z}$
→ $E_\theta(r,\theta,z)$ |
→ $t_z(r,\theta,z)$ |

γ- Symétries | complexe composé

* symétrie par translation et rotation = Sym cylindrique
↳ invariance par toute rotation autour de O_z et toute translation selon oz

$\rho(r,\theta,z)$ ⇒ rien ne dépend de θ ou z donc ρ?
$E \to E_r(r), E_z(r), E_\theta(r)$

f) Symétrie de révolution d'axe (Oz) :

déf : C'est l'invariance par toute rotation autour de (Oz)

par exemple : $\rho(r, \theta, z)$

· le champ est invariant par toute rotation autour de (Oz)

→ $\left.\begin{array}{l} E_r(r,\theta,z) \\ E_\theta(r,\theta,z) \\ E_z(r,\theta,z) \end{array}\right|$ sur l'axe (Oz), $\vec{E}(r) \parallel Oz$

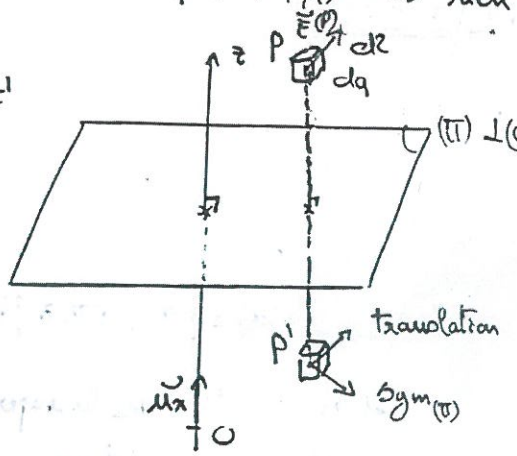
g) Symétries $\left\{\begin{array}{l} \text{complexes} \\ \text{composées} \end{array}\right.$

* **Symétrie cylindrique d'axe (Oz)**

↳ invariance par toute translation selon (Oz), et toute rotation autour de (Oz).

→ $\rho(r, \theta, z)$ → rien ne dépend de θ ou z | $\left.\begin{array}{l} E_r(r) \\ E_\theta(r) \\ E_z(r) \end{array}\right.$

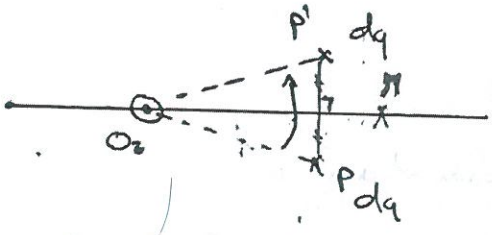
ex :



étant donné l'invariance par translation selon $\vec{u}_x$, et $\overrightarrow{PP'}$ étant $\perp$ à $\vec{u}_x$:

$\Rightarrow \boxed{E_z = 0}$

ex :



hyp : invariance par toute rot° d'axe (Oz)

→ Π est un plan de symétrie

$\Rightarrow \forall \pi \in (\Pi)$, E_θ est nulle

(π) étant qq : $E_\theta = 0 \ \forall \pi$.

Conclusion : pour une symétrie cylindrique : $\boxed{\vec{E} = E_r(r)\,\vec{u}_r}$

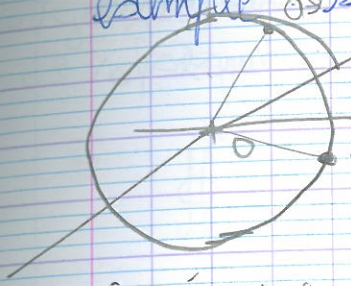
* Symétrie sphérique de centre O :

définition : invariance des charges par toute rotation d'un axe contenant O.

Scanned by CamScanner

* symétrie sphérique de centre O : (coord sphériques)
Déf : invariance de toute rotation d'axe contenant O

exemple : sphère chargée de façon uniforme



(rot par rapport à (OM) invariance)

conséquences : $\vec{E}_{(M)} = E_r(M)\,\vec{u}_r$ / sphériques

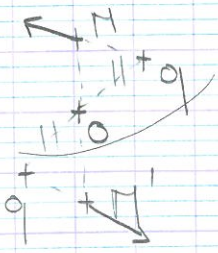
$E_r(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})$ pourquoi ? on prend 2 pts de la même sphère M, M' : rotation par rapport à la médiane de la bissectrice de $\widehat{MOM'}$ ⇒ invariance !

résultat $E_r(M) = E_r(M')$

$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{u}_r$ (en sphérique ! attention !)

g- symétrie centrale de centre O :

(H) distribution invariante par symétrie centrale



vecteurs symétriques par rapport à O ⇒ vecteurs opposés.

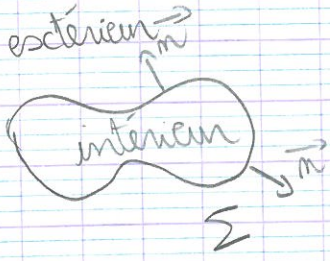
$\vec{E}(Sym(M)) = -\vec{E}(M)$

au point O le champ $\vec{E}$ est nul

4- Théorème de Gauss:

a- énoncé

Pour tout distribution de charge, le flux du champ électrique à travers toute surface fermée est égal à la charge intérieure à la surface divisé par ε_0

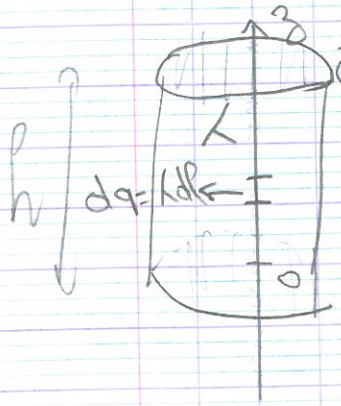


$$\oiint \vec{E}(M).d\vec{\Sigma} = \frac{Q \text{ intérieure}}{\varepsilon_0}$$

* cas où on ne peut pas appliquer le théorème:
- Charge sur la surface Σ
- Charge superficielle sur Σ
- Charge linéique sur des courbes contenues en partie sur Σ

→ conséquence admise de la loi de coulomb

b- Exemple 1: droite chargée uniformément.



étape 1: Exploitation de la symétrie
- symétrie de révolution $E_r(r,\theta,z)$ $E_\theta(r,\theta,z)$ $E_z(r,\theta,z)$
- invariance par translation selon Oz : $E_\theta(r,\theta,z)$, $E_r(r,\theta,z)$, $E_z(r,\theta,z)$
→ Symétrie cylindrique

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u_r}$$

étape 2: Calcul explicite de $\vec{E}$

Gauss : il nous faut une surface qui facilite le calcul

cylindre : $\vec{n}$ toujours selon $\vec{u_r}$

cylindre de rayon r limité à hauteur h fermé par 2 disques

$$\oint \vec{E}\, d\vec{\Sigma} = \iint_{\text{cylindre}} \vec{E}\, d\vec{\Sigma} + \iint_{\text{disques}} \vec{E}\, d\vec{\Sigma}$$

$\vec{O} : \vec{E} \perp \vec{n}$

$$= \iint_{\text{cylindre}} E_r(r)\, d\Sigma$$

$$= E_r \iint_{\text{cylindre}} d\Sigma = E_r(r) \times \text{Aire cylindre}$$

$$\text{Aire cylindre} = 2\pi r h$$

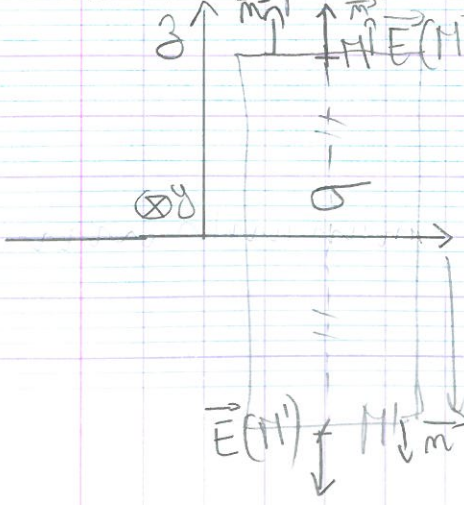
donc $E_r \times h\, 2\pi r = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0}$

donc $E_r = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

d'où $\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\, \vec{u_r}$

Rq: $\vec{E}$ est non défini sur Oz

c- exemple 2: Plan chargé uniformément (xOy)



zone illimitée du plan (xOy)

→ Exploitation des symétries:

- axe Mz : symétrie de révolution

$\vec{E}(M) = E_z(x,y,z)\, \vec{u_z}$ (Meuse)

- $-z_m$ = invariance par translation selon Ox, Oy

- symétrie par rapport au plan xOy
$\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$

* Calcul par le thm de Gauss
Choix d'une surface de gauss

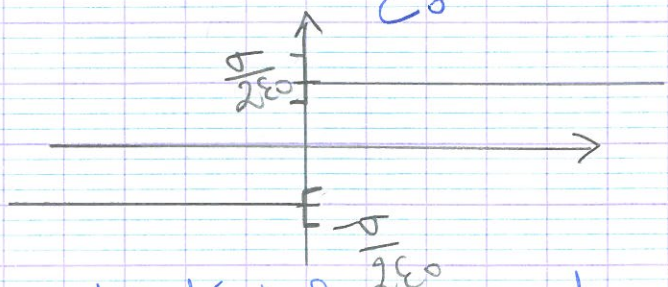
$$\oint \vec{E}\, d\vec{\Sigma} = \iint_{sup} E_z\, d\Sigma + \iint_{inf} -E_z\, dz$$

↓ immédiat

↳ inf = -sup

$$= 2E_z(M) \times S$$

$$= \frac{S\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



discontinuité de la composante normale à la surface chargée qui vaut $\frac{\sigma(P)}{\varepsilon_0}$

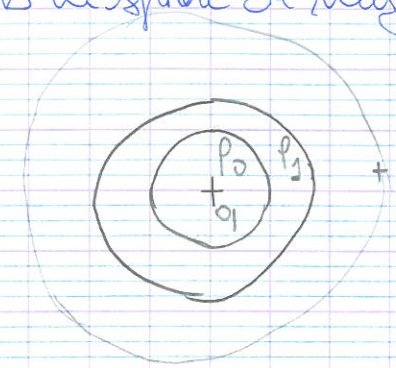
* $\vec{E}$ uniforme dans tout $z > 0$

Pourquoi ? 2 croit ⇒ la contribution selon $\vec{u}_z$ augmente et le module total diminue

d- Exemples : toute distribution de charge à symétrie sphérique

Théorème : Dans le cas distribution de charges à symétrie sphérique de centre O, le champ à la distance r de O est le même que celui créé par une charge ponctuelle placée en ↪

et dont la charge a pour valeur celle qui est contenue dans la sphère de rayon R



Q(r) : la charge contenue dans la sphère passant par M

$\Leftrightarrow$ ~~au point O~~ rien + M_1 en O
$+$
$Q(r)$

Dém : On a montré que pour la sym sphérique
$\Rightarrow \vec{E} = E_r(r)\,\vec{u_r}$

* Gauss : $\oiint \vec{E}\,d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

surface de Gauss :
Choix : sphère passant par M et de centre O :

$$\oiint \vec{E}\,d\vec{\Sigma} = \oiint_{sphère} E_r(M)\,d\Sigma = E_r \iint d\Sigma$$

$$= E_r\, 4\pi r^2$$

$$= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

donc $$E_r = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

d'où $$\vec{E} = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u_r}$$

c - Théorème de gauss gravitationnel :

$$\oiint \vec{g} \, d\vec{\Sigma} = M_{\text{interieure}} \times -4\pi G$$

5 - Conclusion :

Calculs pratiques de champs électriques

**

a - Application d'une formule générale :

- modélisation discrète de charge :

$P_1 q_1 + P_2 q_2 + M + P_3 q_3 + P_4 q_4$

principe de superposition :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_i M}}{(P_i M)^3}$$

à savoir

- Modélisation continue

zone chargée

(P)

$dq = \rho(P) \, d\tau$

$$E(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\text{zone chargée}} \rho(P) \, d\tau \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

ou $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \sigma(P) \, d\Sigma \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

HP mais prouvable que

b- utilisation du théorème de Gauss

* choisir de surface de gauss qui simplifie les calculs

$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$: facile à exprimer : zones où $\vec{E} \parallel d\vec{\Sigma}$ ou $\vec{E} \perp d\vec{\Sigma}$

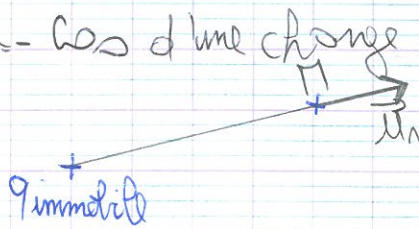
faisable dans des cas bien symétriques.

c- Calcul préliminaire de potentiel électrostatique puis $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$

II Potentiel électrostatique, énergie d'interaction électrostat

1- Potentiel électrostatique

a- Cas d'une charge ponctuelle



$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{f(r)}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f(r)) = \frac{df}{dr}\vec{u}_r$$

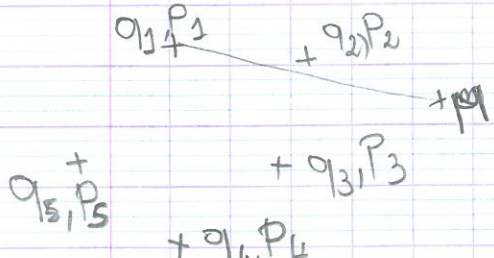
$\vec{E}$ créé par $q = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$

Donc $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} + cte$: potentiel électrostat

convention $V \to 0$

b- Ensemble quelconque de charges ponctuelles $\to \infty$.

* Principe de superposition pour les champs électrostatiques



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_{i \text{ créé par } q_i}$$

$$\vec{E}_i = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_i$$

$$V_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = -\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\text{grad}}(V_i)$$

* linéarité de grad $\quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \sum_{i=1}^{N} V_i$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V, \quad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{P_i M}$$

C - Distribution quelconque de charges

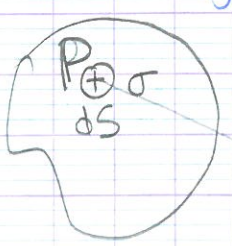
modélisation : volumique
surfacique
filiforme

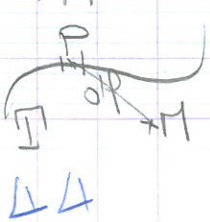
$\vec{E}$ vérifie toujours $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$

V champ scalaire existe quelque soit le modèle

relation hors programme

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)\, d\tau(P)}{PM}$$ compliqué à calculer



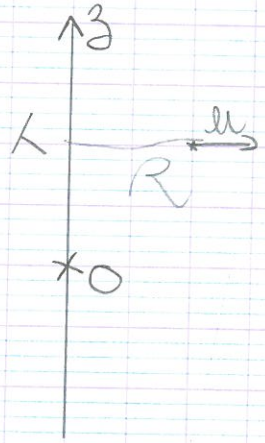


$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda(P)\, dP}{PM}$$ ☆

✗ inexploitable lorsque $M \in (\Gamma)$

2- Exemple :

a- Fil rectiligne illimité :



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{u}_r = -\overrightarrow{grad}\,V$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \;,\; \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

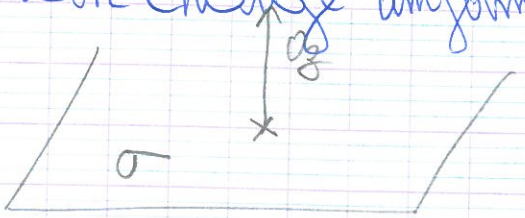
$$V = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + cte$$

convention : choix arbitraire d'une distance a

$V(r=a) = 0$

$$V(r) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r/a)$$

b- Plan chargé uniformément



$z > 0$: $E = \sigma/2\varepsilon_0\,\vec{u}_z$

$z < 0$: $E = -\sigma/2\varepsilon_0\,\vec{u}_z$

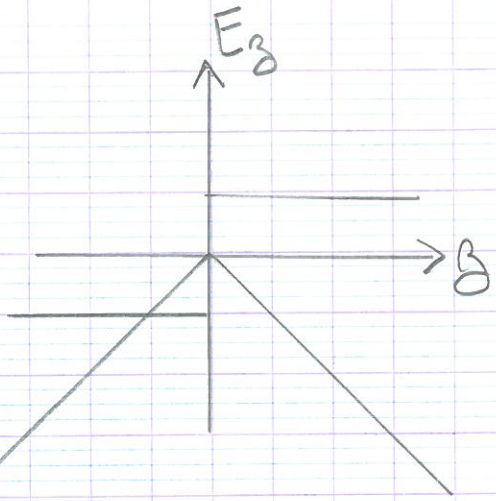
$z > 0$: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ $\quad E_{x=0} = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-\partial V}{\partial y}$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \;:\; V = \frac{-\sigma z}{2\varepsilon_0} + cte$$

choix $V \underset{z\to 0}{\to} 0$: $V = \frac{-\sigma z}{2\varepsilon_0}$

$z<0 \quad V = \frac{+\sigma z}{2\varepsilon_0}$

donc $V = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}|z|$

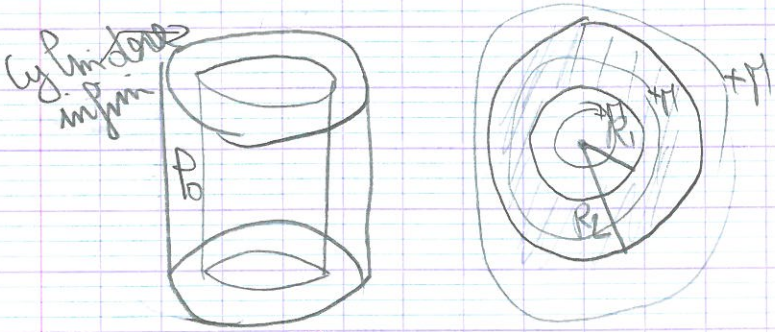


$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V \rightarrow$ pas de sens en $z=0$

$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

modélisation surfacique

c - Couche cylindrique chargée uniformément



calcul de $\vec{E}$:

{ Plan contenant O_z / plan $\perp O_z$ } Plans de symétrie

$\Rightarrow \vec{E} = E_r \vec{u_r}$

Symétrie cylindrique $E_r(r)$: $\vec{E} = E_r(r)\,\vec{u_r}$

Gauss : cylindre d'axe O_z fermé par deux disques

$\oint_{\text{cylindre}} \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} =$

* $r < R_1$: $Q_{int} = 0$

* $R_1 < r < R_2$ $Q_{int} = \rho_0 \times \pi (r^2 - R_1^2) H$

* $R_2 < r$ $Q_{int} = \rho_0 \times \pi (R_2^2 - R_1^2) H$

$$E_r = \rho_0 / 2\varepsilon_0 \times \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ r - \frac{R_1^2}{r} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{R_2^2 - R_1^2}{r} & R_2 \leq r \end{cases}$$

Convention $r = R_2 \Rightarrow V = 0$

$$V = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \begin{cases} -\frac{r^2}{2} + R_1^2 \ln(r) + \frac{R_2^2}{2} - R_1^2 \ln(R_2) \\ -(R_2^2 - R_1^2) \ln r / R_2 \end{cases}$$

3- Propriétés générales du potentiel électrostatique

a- principe de superposition pour le potentiel



$$\vec{E}_{A \cup B} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

$$\vec{E}_A = -\overrightarrow{grad}\, V_A$$

$$\vec{E}_B = -\overrightarrow{grad}\, V_B$$

$$\vec{E}_{A \cup B} = -\overrightarrow{grad}\, V_A - \overrightarrow{grad}\, V_B = -\overrightarrow{grad}\, V_A + V_B$$

choix possible : $V_{A \cup B} = V_A + V_B$

b- Formules portant sur la relation entre $\vec{E}$ et $\vec{V}$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

$$\int_{(\Gamma)} \vec{E}.\vec{dM} = -\int_{(\Gamma)} \overrightarrow{grad}\, V.\vec{dM}$$

$$= -\int_A^B \overrightarrow{grad}\, V.\vec{dM}$$

$$= V(A) - V(B)$$

tant que $\vec{E}$ est borné dans un domaine de l'espace ($\|\vec{E}\|$ majoré)

→ Vrai dans le domaine considéré

$\vec{E}$ est à circulation conservative

$$\oint_{\text{Contour fermé}} \vec{E}\,\vec{dM} = 0$$

c- Les symétries du potentiel électrostatique.

Les symétries des charges se retrouvent dans le potentiel électrostatique

Il est possible de choisir V (champ potentiel électrostatique) présentant les mêmes symétries que les charges.

invariance par translation quelconque // Oz

$\Rightarrow V = (r, \theta, \varphi)$

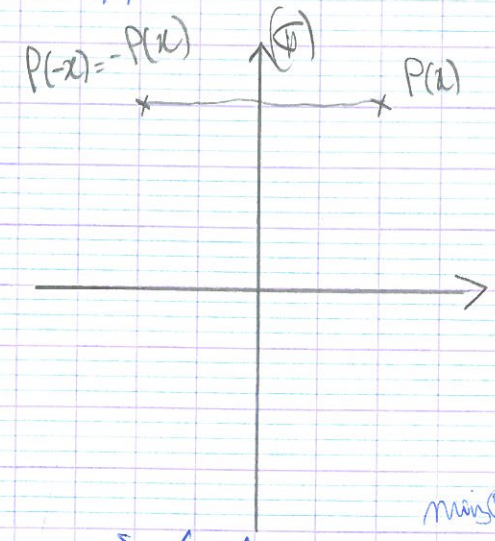
symétrie / plan $z=0$ → $V_{z>0}$

invariance de charges par rotation (Oz) $V(r, \theta, \varphi)$

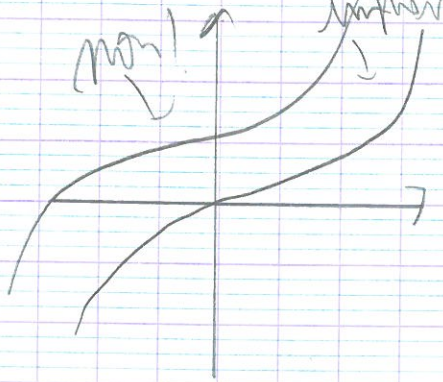
$x+y$



* anti symétrie / plan

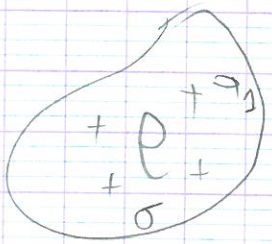


P(x) impaire ⇏ V(x) impaire à constante près



L - Energie d'interaction entre une distribution de charges fixes et un autre système chargé

(Spé) Col // NGA SSA ALSCHRAN



statique



← objet chargé

subit l'action de l'ensemble des autres charges extérieures

0 - L'objet chargé étudié est une charge ponctuelle.

$\vec{F} = q\vec{E}$ valable même si l'objet est immobile

* Travail de force $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} \Rightarrow W = \int_{\text{trajectoire}} \vec{F}\, d\vec{M}$

$= q \int_{\text{trajectoire}} \vec{E}\, \vec{dM} = q\left(V(M_i) - V(M_f)\right)$

indépendant du trajet : Force conservative

* expression de la force $\vec{F} = -q\ \overrightarrow{grad}(V)$

$= -\overrightarrow{grad}(qV) = -\overrightarrow{grad}(E_p)$

$\boxed{E_p = qV}$ énergie potentielle d'interaction entre la charge et le système statique

La force dérive de l'énergie potentielle qV

b- Ensemble quelconque de charges ponctuelles

$E_p = \sum_{i=1}^{N} q_i V(M_i)$ énergie ponctuelle globale d'interaction entre le corps chargé et le système statique

$W_{\text{statique} \to \text{charges}} = E_{pi} - E_{pf}$

c- Applications

* une seule charge ponctuelle
* théorème d'énergie ~~potentielle~~ cinétique

$\Delta E_c = W_{\text{elec/stat}} = q(V_i - V_f)$

* $\Delta E_c = -\Delta E_p \Leftrightarrow E_c + E_p = cte$

conservation énergie mécanique

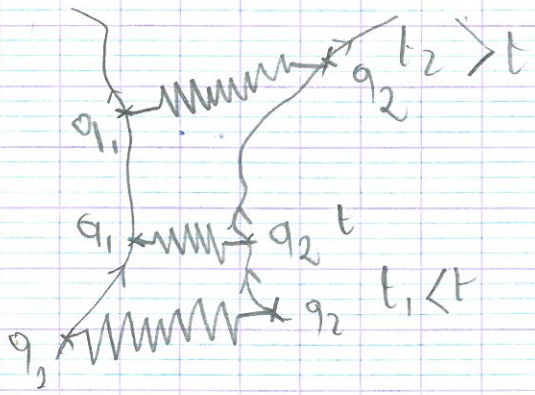
* Calcul de Force $\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p$
* Etude de position d'équilibre
* Calcul de force $\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p$

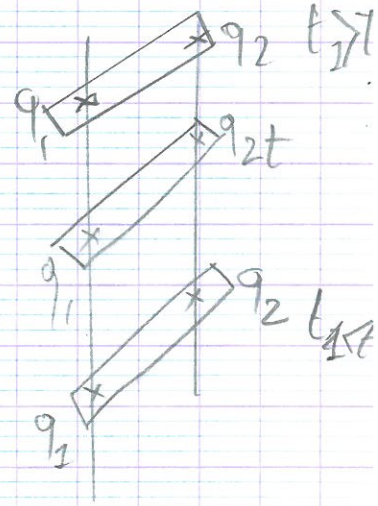
* étude de position d'équilibre
(extremum local? min ? max ?)
système chargé complexe

* Système complexe : Attention !! $\Delta E_c = W_{\text{toutes les forces}}$ y compris forces intérieures
$= W_{\text{électro}} + W_{\text{intérieures}}$

* E_p permet de calculer les forces subies par S : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$

On regarde 2 situations :



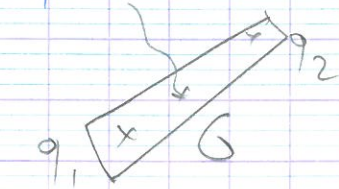


$\delta W_{ext} = -dE_p = -\frac{dE_p}{dz} dz$

$\vec{F_1} d\vec{P_1} + \vec{F_2} d\vec{P_2} = F_{1z} dz + F_{2z} dz = F_{\text{totale ext}} dz \quad \Sigma \vec{F}_{\text{totale}}$

donc $F_{\text{totale } z\,ext} = -\frac{dE_p}{dz}$

E_p dépend uniquement de la position.



(translation)

$E_p(x_G, y_G, z_G)$, $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$

$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ pour un mouvement où le système serait un solide rigide en rotation



rotation d'un solide autour de l'axe fixe O_3

situation 2 : $\delta W_{ext} = \overline{\Gamma}_{ext/3} \, d\theta$

$= -dE_p = \frac{-dE_p}{d\theta} d\theta$

donc $\overline{\Gamma}_{ext/3} = \frac{-dE_p}{d\theta}$

situation 1 : $\overline{\Gamma}_{ext/3} = \overline{\Gamma}(0) \, \vec{u}_3$

$\overline{\Gamma}_{ext/3} = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$

II Equations et propriétés de l'électrostatique

1. Version locale du théorème de Gauss (équation de Maxwell-Gauss)

V (Σ fermé) $\iint_{(\Sigma)} \vec{E} \, d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

n mouvement sur le ... rotation

② rotation d' ... autour de



① $t = \vec{\Gamma}_{oz}\, d\theta$

$= -dt_p = \frac{-dE_p}{d\theta}$

$= -\frac{dE_p}{d\theta}$

$\vec{\Gamma}_{oz} = \vec{\Gamma}(o)\,\vec{u}_z$

$\Gamma_z = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$

priétés de l'électrost... (théorème de ... Gauss)

$\oiint \vec{E}\, d\vec{\Sigma} = \frac{\text{①}_{int}}{\varepsilon_0}$

52

Modèle continu (densité volumique de charge)

$\text{①}_{int} = \iiint_V \rho(P)\, d\tau$

Green-Ostro $\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}\, d\vec{\Sigma} = \iiint_V \text{div}\,\vec{E}\, d\tau$

$\iiint_V \left(\text{div}\,\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) d\tau = 0$

valable quelque soit le volume V

$\Rightarrow$ en tout point où la fonction est continue : $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

et donc $\text{div}\,\vec{E}(P) = \frac{\rho(P)}{\varepsilon_0}$

- Equations locales traduisent le fait que $\vec{E}$ est à circulation conservative :

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M)$

$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{E}) = \vec{0}$

- Equation de Poisson et de Laplace

- Equation de poisson

et ② : $\text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}\, V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

donc $-\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

c'est à dire $\Delta V + \rho/\varepsilon_0 = 0$

53

donnée en général

poser : en cartésiennes $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0} = 0$

équation différentielle aux dérivées partielles d'ordre 2

b- Equation de laplace :

Si dans un domaine V il n'y a pas de charges ($\rho = 0$)

$$\Delta V = 0$$

c- Exemple de solution de l'équation de laplace dans le cas unidimentionnel (V ne dépend que d'une variable d'espace)

* cartésiennes $V(x,y,z) \rightarrow V(x) = Ax + B$

* en cylindrique $V(\alpha, \theta, z) \rightarrow V(\alpha) = A \ln \alpha + B$

sol : espace vectoriel de dim 2 (ln α, cte) → famille libre OK

* en sphérique : $V(r, \theta, \varphi)$

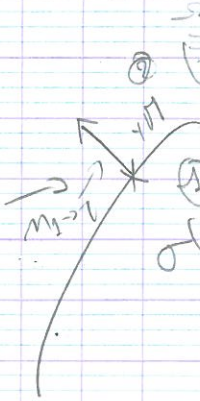
$V(r) = A/r + B$ ← même raisonnement

Solution de l'équation générale en symétrie sphérique

I- Régularité des champs (champ vectoriel $\vec{E}$ / champ scalaire V)

	distribution volumique	distribution surfacique	distribution filiforme	charges ponctuelles
Champ électrique $\vec{E}$	$\vec{E}$ défini partout et continu partout	$\vec{E}$ non défini sur une surface chargée ailleurs $\vec{E}$ est défini et continu	$\vec{E}$ non défini sur un contour portant des charges λ. Il est défini ailleurs et diverge si on approche du contour chargé	$\vec{E}$ non défini aux points où sont les charges et diverge en $\frac{1}{r^2}$ près des charges
Potentiel électrostatique V	V défini partout (décroît en $\frac{1}{r}$)	V défini partout, continu mais non différentiable sur les surfaces chargées	V non défini sur les courbes chargées et diverge quand on s'en approche en ln(distance)	V non défini aux points où sont les charges et diverge en $\frac{1}{r}$

distribution de passage à travers une surface chargée



$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1\to 2}$ (admis)

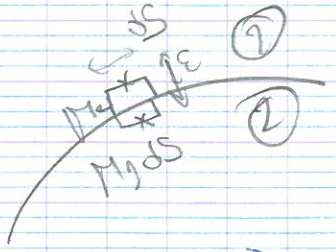
$\vec{E}_2 = \lim_{\substack{M\to P \\ M\in 2}} \vec{E}(M)$

$\vec{E}_1 = \lim_{\substack{M\to P \\ P\in 1}} \vec{E}(M)$

* sur $M_1 \to 2$ on $E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma(P)}{\varepsilon_0}$

* sur le plan tangent $\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t}$

justification par le théorème de gauss pour la composante normale



$$\oiint \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{\sigma(P)\,dS}{\varepsilon_0} = \vec{E}(M_2)\,\vec{n}_{1\to 2}\,dS - \vec{E}(M_1)\,\vec{n}_{1\to 2}\,dS$$

+ Q intérieur

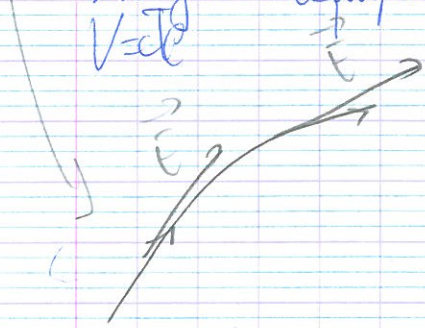
IV Carte de champ :

1 - Définitions

* ligne de champ : toute courbe tangente en chaque point au champ électrique

* tube de champ : ensemble de lignes de champ issues d'une courbe fermée

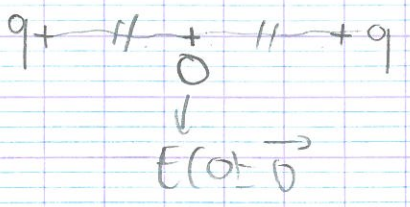
* surfaces équipotentielles : surfaces d'équation $V = cte$



Une carte de champ est un dessin comprenant d'une part l'ensemble de lignes de champ et d'autre part les équipotentielles

* Point singulier : point où soit $\vec{E}$ et mal défini (par exemple soit $\vec{E} = \vec{0}$ — charge ponctuelle)

exemple

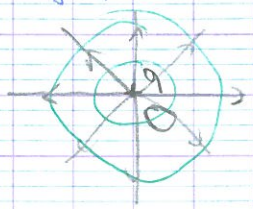


remarque : $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{grad}\, V = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$

point critique du champ scalaire

2_ Exemples simples :

Champ d'une charge ponctuelle



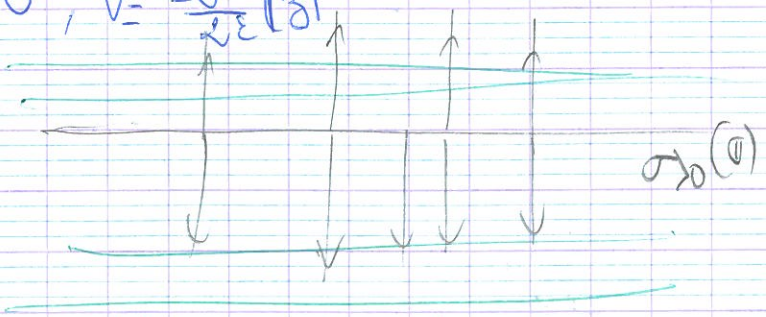
$q > 0$

ligne de champ $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$

équipotentielle $\vec{V}(M) \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

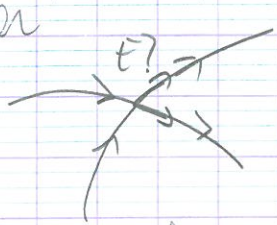
Champ créé par un plan uniformément chargé : $\vec{E} = \frac{\pm\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}$

$\sigma > 0$, $V = \frac{-\sigma}{2\varepsilon}|z|$



3_ Propriétés générales des cartes de champ électrostat

a- Deux lignes de champs ne peuvent pas se couper sauf en un point singulier



b_ Les lignes de champ sont perpendiculaire en tout point

avec équipotentielles (sauf aux points singuliers)



argument rapide : $dV = \overrightarrow{grad}\, V \cdot \overrightarrow{dM}$

si on se déplace sur une équipotentielle $dV = 0$ $\rightarrow$ $\vec{E} \perp$ plan tangent

M et équipotentielle

$V(M) - V(M_0) = dV(\overrightarrow{M_0M}) + \|\overrightarrow{M_0M}\| \cdot \varepsilon(\overrightarrow{M_0M})$

$dV(\overrightarrow{M_0M}) = \overrightarrow{grad}\, V(M_0) \cdot \overrightarrow{M_0M}$

or $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0H} + \overrightarrow{HM}$

donc $0 = -\vec{E}(M_0) \cdot \overrightarrow{M_0M} - \vec{E}(M_0) \cdot \overrightarrow{HM} + \|\overrightarrow{M_0M}\| \varepsilon(\overrightarrow{M_0M})$

$\vec{E}(M_0) \cdot \dfrac{\overrightarrow{M_0H}}{\|\overrightarrow{M_0H}\|} = -\dfrac{\vec{E}(M_0)\,\overrightarrow{HM}}{\|\overrightarrow{M_0H}\|} + \dfrac{\|\overrightarrow{M_0M}\|}{\|\overrightarrow{M_0H}\|}\varepsilon(\overrightarrow{M_0M})$ $\quad \varepsilon \to 0$

$M \to M_0$, $\vec{u}$ = cte : $\vec{E}(M_0) \cdot \vec{u} = 0$

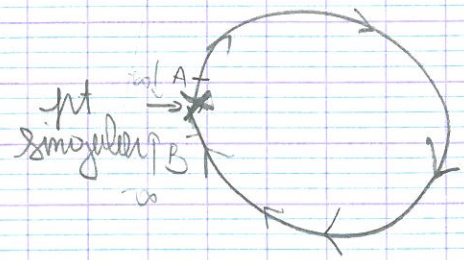
donc $\vec{E}(M_0) \perp \vec{u}$

c- Le potentiel décroît le long des lignes de champ orienté par $\vec{E}$



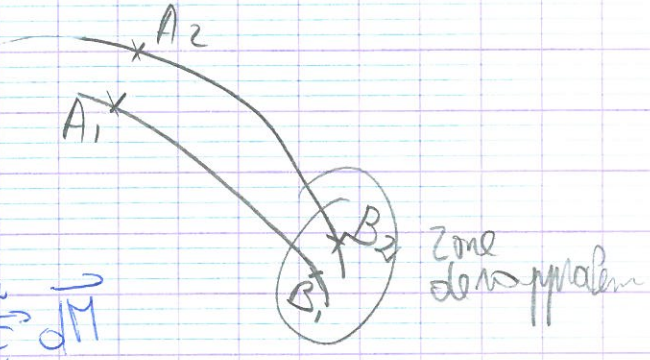
$$\int_A^B \vec{E}\,\vec{dM} = V_A - V_B > 0$$

il ne peut pas y avoir de ligne de champ fermée sauf en cas de présence de ligne de champ point singulier



d- Dans une zone où les équipotentielles sont proches le champ électrique est plus intense que dans les zones où les équipotentielles sont le plus rapprochées

$\rightarrow \|\vec{E}\|$ important



$$\underbrace{V_1 - V_2}_{>0} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E}\cdot\vec{dM} = \int_{B_1}^{B_2} \vec{E}\,\vec{dM}$$

$\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$

$\langle \|\vec{E}\| \rangle \ell_A \qquad \langle \|\vec{E}\| \rangle \ell_B$

$\leq \qquad\qquad \geq$

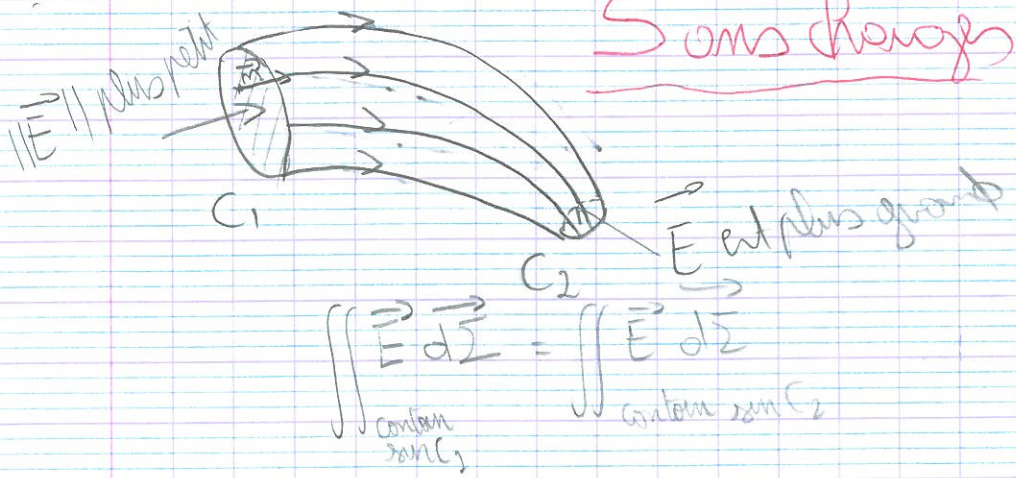
⚠ c- dans une zone sans charges où les tubes de champ se rétrécissent, le champ électrique est plus intense

équation locale : $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

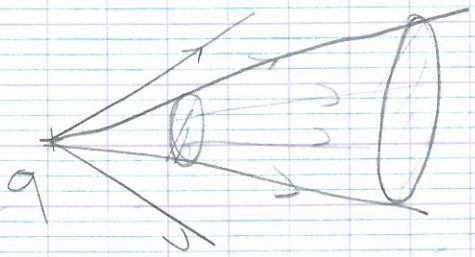
(H) $\rho = 0$ dans toute la zone étudiée.
$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E}$ est à flux conservatif

$\iint \vec{E}\, d\vec{\Sigma}$ se conserve sur un tube de champ

Sans charges !



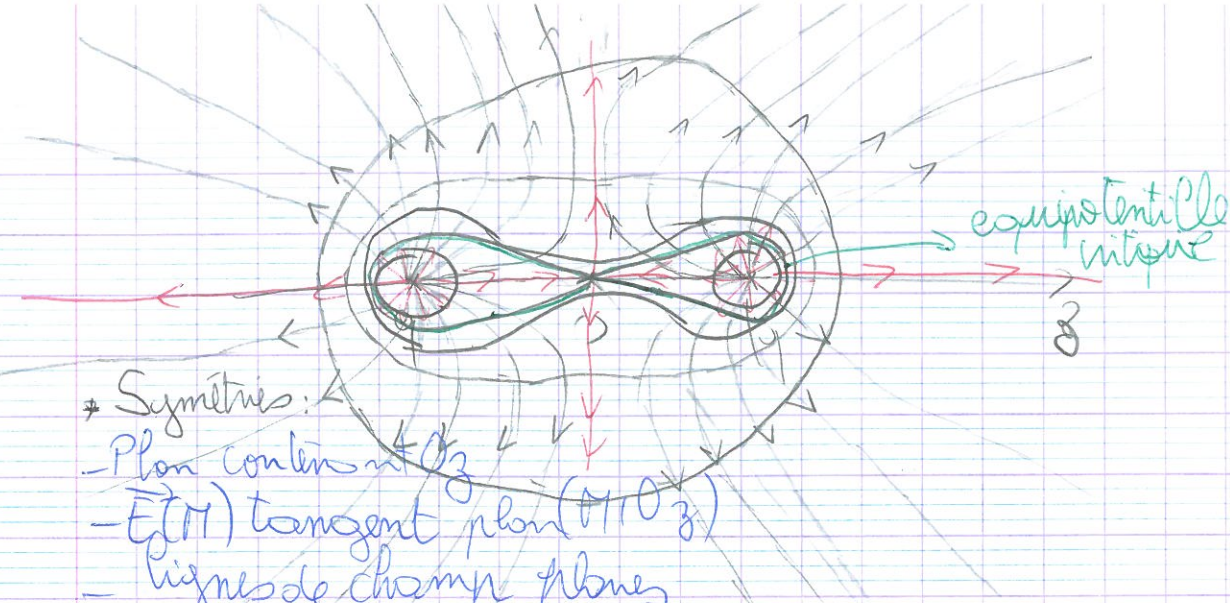
exemple :



sinc α r^2

$\|\vec{E}\| \propto \frac{1}{r^2}$

4- Carte de champ associée à deux charges ponctuelles identiques.



* Symétries :
- Plan contenant Oz
- $\vec{E}(M)$ tangent plan (Π / O_z)
- lignes de champ planes
- Invariance par rotation autour de Oz
→ tous les plans contenant Oz sont équivalents
- Invariance par symétrie par rapport à la droite Oz
* Comportement près de chaque charge
→ près d'une charge $\Rightarrow E \parallel \vec{u_r}$

V Modélisation d'un condensateur

1 - Modèle du condensateur

q | ↑ u Loi caractéristique
$-q$ |

$$q = \zeta u$$

ζ : constante dépend du condensateur

modèle : 2 plans // chargés de façon uniforme avec densité de charges opposées



épaisseur du condensateur

2 - Étude électrostatique du modèle principe de superposition

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{répar}} + \vec{E}_{\text{répar}-\sigma}$$

I III : $\vec{E} = \vec{0}$

II : $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

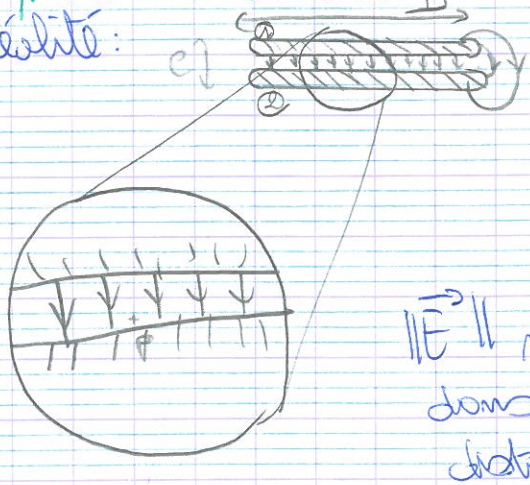
$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$V(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x + V(0)$$

$$U = V(e) - V(0) = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$$

3- Capacité d'un condensateur en réalité :



$e \ll D$

$$\int_{1 \to 2} \vec{E} \, d\vec{l} = V_1 - V_2$$

$\|\vec{E}\|$ négligeable sauf dans la partie plan // distants de e

$\|\vec{E}\|(P)$ juste à côté du conducteur $= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

on néglige les effets de bord

Or $Q = \sigma S$

donc $Q = \frac{\varepsilon_0 U S}{e}$

donc $Q = CU$ avec $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$

Conditions électrostatique
* en négligeant les effets de bord

4- Valeurs numérique

$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{e}$ ε_0 unité SI $F m^{-1}$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sim 9 \times 10^9$ SI

$\varepsilon_0 \sim 10^{-1} F m^{-1}$

$e \sim 1\mu m \quad S \sim 1 m^2 \quad C \sim 10 \mu F$

VI Dipôles électrostatiques :

1- Définitions :

a- Doublet :

Ensemble de 2 charges ponctuelles de valeurs opposées

$q > 0$ $\quad -q$ en N $\quad +q$ en P

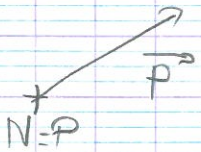
moment dipolaire électrique d'un doublet :

$$\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP}$$

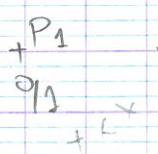
b- Dipôle électrique :

dipôle = limite d'un doublet lorsque $P \to N$, $q \to \infty$ de telle sorte que $\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP}$ reste constant

$\vec{p}$ est nommé moment dipolaire du dipôle



c- Moment dipolaire d'un ensemble de charges que l'on impose de valeur totale nulle :



$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \overrightarrow{OP_i}$$

indépendant du choix de O

$$\vec{p_{O'}} - \vec{p_{(O)}} = \sum_{i=1}^{N} q_i \overrightarrow{OO'} = 0$$

pour un doublet : $p = q\overrightarrow{OP} - q\overrightarrow{ON} = q\overrightarrow{NP}$

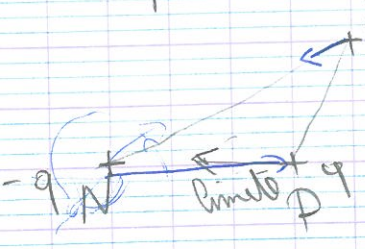
2- Le champ électrostatique dipolaire.

Théorie : Champ dipolaire = champ créé par un dipôle

↳ = limite du champ d'un doublet lorsque

$P \to N$ et $\vec{r} = q\overrightarrow{NP}$ cste constante

a- Le potentiel dipolaire



$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{MP} - \frac{1}{MN}\right)$$

$f : \begin{matrix} Q \to \mathbb{R}^* \\ E \to \mathbb{R} \end{matrix}$ $\quad M \mapsto \frac{1}{r}$

$f(P) - f(N) \sim \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{NP}$

$$V(M) \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{NP}$$

donc $V(M) \sim \frac{\vec{p}\,\overrightarrow{\text{grad}} f}{4\pi\varepsilon_0}$

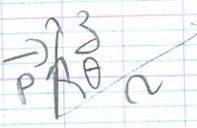
$-\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_{NM}}$

dirige de $M \to O$ symétrique $-\vec{u}_r$

$$V(M) \sim \frac{\vec{p}\cdot\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$ ♥ 1

b- Le champ électrostatique

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}$



* Coordonnées sphériques : $V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ ♥

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$\to 0$

Calcul à savoir refaire rapidement

alors $\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi}}$ ♡

* expression intrinsèque (sans privilégier de base).

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ \frac{1}{r^3}\vec{p}\cdot\vec{r} = \frac{1}{r^3}\overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right) + \vec{p}\cdot\vec{r}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \frac{1}{r^3}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{r} = p_x x + p_y y + p_z z$$

donc $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right) = p_x\vec{u_x} + p_y\vec{u_y} + p_z\vec{u_z} = \vec{p}$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^4}\vec{u_r} = \frac{-3}{r^5}\vec{r}$$

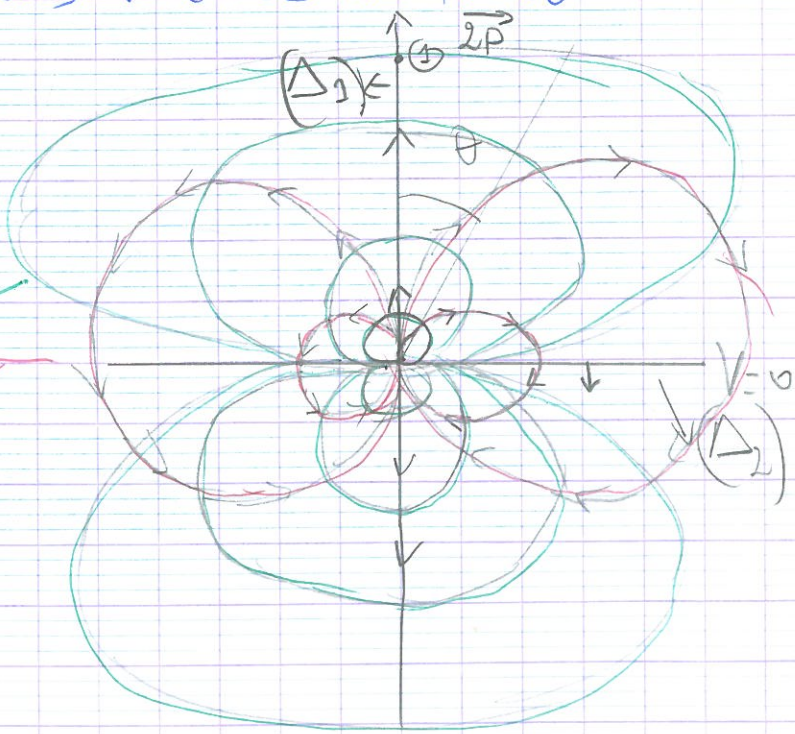
donc $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-\vec{p} + 3\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^2}\vec{r}\right]$ ♡

c- carte de champ:

$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

↳ équipotentielles $V = cte \Rightarrow r^2 = K\cos\theta$

sur (Δ_1) : $\vec{2p} = \vec{E}$

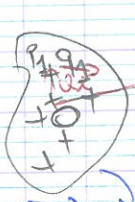


équipotentielle

ligne de champ

3 - L'approximation dipolaire

a - La situation étudiée



$\vec{r}$ → M : point où on veut étudier le champ

$\overrightarrow{OP_i} = \vec{a_i}$: domaine chargé borné de diamètre $2R$

et

que se passe-t-il lorsque $r \gg R$?

b - Calcul

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i / P_iM$$

$$\frac{1}{P_iM} = (P_iM^2)^{-1/2}$$

$$(\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{OP_i}^2 - 2\overrightarrow{OP_i}\cdot\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2$$

$$= \left(a_i^2 - 2\vec{a_i}\cdot\vec{r} + r^2\right)$$

$$\text{donc } \frac{1}{P_iM} = \left[r^2\left(1 - 2\frac{\vec{a_i}\cdot\vec{r}}{r^2} + \frac{a_i^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2}$$

$$\simeq \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\vec{a_i}\cdot\vec{r}}{r^2} - \frac{a_i^2}{2r^2} + \frac{3}{8}\frac{(\vec{a_i}\cdot\vec{r})^2}{r^4}\right]$$

$DL_2[1+\varepsilon]$

$$\text{donc } V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q_i(\vec{a_i}\cdot\vec{r})}{r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q_i}{2r^3}\left(\frac{3(\vec{a_i}\cdot\vec{r})^2}{r^2} - a_i^2\right)$$

c- Discussion :

* $\sum q_i \neq 0$:

$$V \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i + \underbrace{O\left(\frac{1}{r^2}\right)}_{\text{grand } O} \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sum (q_i \overrightarrow{OP_i}) \cdot \vec{r}}{r^3}}_{\text{1/r}^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

↳ si on prend comme point O le barycentre des P_i, q_i qui est B et vérifie $\sum_{P_i, q_i} q_i \overrightarrow{OP_i} = \vec{0}$

donc $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sum (q_i \overrightarrow{OP_i}) \cdot \vec{r}}{r^3} = 0$ pour $O = B$

↳ $O\left(\frac{1}{r^3}\right)$ pour $O = B$

↳ Conclusion : Avec une très bonne approximation $V(M) = V$ créé en M par une charge $\sum q_i$ placée en O = barycentre des P_i, q_i

(précision en $1/r^3$)

* $\sum q_i = 0$

$$V(M) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\left(\sum q_i \overrightarrow{OP_i}\right) \cdot \vec{r}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

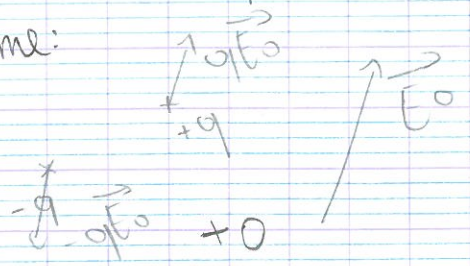
terme en $\frac{1}{r^3} = 0$

$$\boxed{\vec{p} = \sum q_i \overrightarrow{OP_i}}$$

Loin d'une attribution de charges telle que la somme des charges soit nulle le potentiel le potentiel est approximativement le potentiel dipolaire associé à un dipôle de moment $\vec{p} = \sum q_i \overrightarrow{OP_i}$

4- Actions mécaniques subies par un dipôle placé dans un extérieur statique

a- Action subies par un dipôle dans un champ extérieur uniforme:



$$\vec{F}_{totale} = q\vec{E}_0 - q\vec{E}_0 = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma}_{(O)\,total} = \vec{OP} \wedge q\vec{E}_0 - \vec{ON} \wedge q\vec{E}_0$$

$$= \vec{NP} \wedge q\vec{E}_0$$

$$= \vec{p} \wedge \vec{E}_0$$ indépendant du point où on calcule le moment

Donc par passage à la limite un dipôle placé dans un champ uniforme est soumis à un couple de moment $\vec{p} \wedge \vec{E_0}$

b- Actions subies par un dipôle soumis à un champ extérieur non uniforme:

* Evaluation $\vec{F}_{total}$ $\quad \vec{F} = q\vec{E}(P) - q\vec{E}(N)$

en cartésiennes: $F_x = q\left(E_x(P) - E_x(N)\right)$

$$\xrightarrow[P \to N]{} \simeq q\left(\overrightarrow{grad}\, E_x\right) \cdot \vec{NP}$$

$$\sim \vec{p} \cdot \left(grad\, E_x\right)_{(N)}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, E_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

donc $\vec{p} = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}$

de même $F_y = \vec{p}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, E_y$

$$F_z = \vec{p}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, E_z$$

* Evaluation du moment des forces subies par le dipôle

$$\vec{\Gamma}(O) = \overrightarrow{OP} \wedge q\vec{E}(P) - \overrightarrow{ON} \wedge q\vec{E}(N)$$
$$= \overrightarrow{ON} \wedge q\vec{E}(P) + \overrightarrow{NP} \wedge q\vec{E}(P) - \overrightarrow{ON} \wedge q\vec{E}(N)$$
$$= q\, \overrightarrow{ON} \wedge (\vec{E}(P) - \vec{E}(N)) + \vec{p} \wedge \vec{E}(P)$$

si on choisit $O = N$ on obtient : $\xrightarrow[P \to N]{} \vec{p} \wedge \vec{E}(N)$

$$\vec{\Gamma}(N) = \vec{p} \wedge \vec{E}(N)$$

$\Rightarrow$ Pour un dipôle placé en un point A :

$$\vec{\Gamma}(A) = \vec{p} \wedge \vec{E}(A)$$

rappel : $E_{P\,\text{interaction}} = \sum q_i V(P_i)$

cas d'un doublet

$$E_p = qV(P) - qV(N)$$

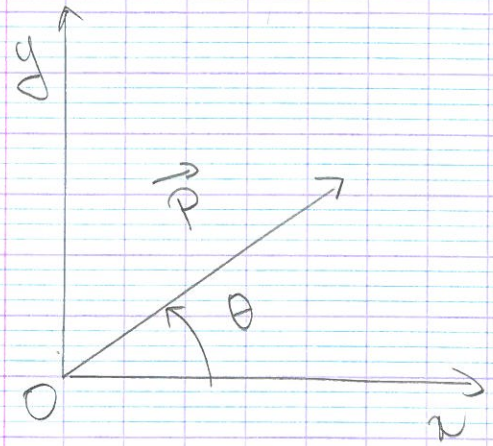
limite du dipôle $P \to N$, $E_p \sim q\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V \cdot \overrightarrow{NP}$

$$= \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,V$$

$$= -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \text{(point où est le dipôle)}$$

d- Application d'l'action subie par le dipôle

* Moment des actions subies



(H) $\vec{E}(0) // \overrightarrow{Ox}$

$$\Gamma(O_z) = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$$

$$= -pE\sin\theta$$

vérification $\vec{p} \wedge \vec{E}(0) = -pE\sin\theta\,\vec{u}_z$

* Valeur de la force totale : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p$

a condition qu'on étudie une translation des charges sur un support solide

$$\vec{F} = +\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{p} \cdot \vec{E}) \qquad \boxed{\vec{p} = \vec{cte}}$$

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

En cartésienne :

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) = \vec{p}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$$

$$= \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{pmatrix}$$

aussi valable avec $\vec{E}$ statique

$$= p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

comparaison avec l'autre expression de F_x

$$F_x = \vec{p}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\, E_x$$

$$= p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} E_x + p_z \frac{\partial}{\partial z} E_z$$

mais $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}$ en statique est nul $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$

$$\text{Sur } \vec{u}_z \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

e - Formulaire à retenir :

~~doublet~~

* si $\vec{E}$ est uniforme :

doublet et dipôle — Couple $\vec{p} \wedge \vec{E_0}$

* si $\vec{E}$ non uniforme

dipôle | $E_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}$ (point où est le dipôle A)

$\vec{\Gamma}_A = \vec{p} \wedge \vec{E}(A)$

$F_x = \vec{p}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, E_x\right)(A)$

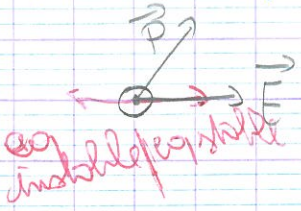
$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)$.

2- Résultats qualitatifs :

* Tendance d'un dipôle à s'aligner sur un champ extérieur

eq avec $\vec{p} \parallel \vec{E}$

$\vec{\Gamma}(O) = \vec{p} \wedge \vec{E}$



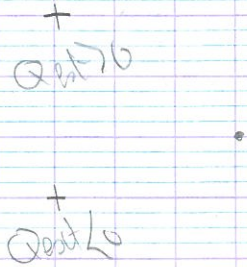
Pour un dipôle colinéaire et de même sens que $\vec{E}$, tendance à se diriger dans la direction où $\|\vec{E}\|$ augmente

Un dipôle extérieur est attiré par les zones de champ intense

$\vec{p} \parallel \vec{E}$, même sens

$E_p = -\|\vec{p}\| \|\vec{E}\|$ exemple

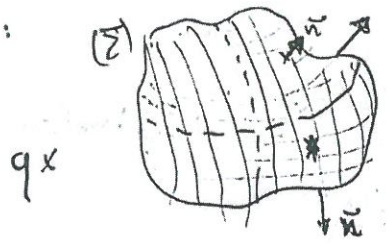




VII - Compléments :

* démonstration du théorème de Gauss à partir de la loi de Coulomb (ou plutôt du champ créé par des charges ponctuelles)

Rq :



$$\oiint \vec{E}.d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Rq : par principe de superposition, il suffit de le montrer pour une charge ponct.

- Montrons : $\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}_q.d\vec{\Sigma} = 0$, si q est à l'extérieur ?

On sait $\vec{E}(r) = \frac{q\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; $\vec{E} = E_r \vec{u}_r$

On calcule $div(\vec{E}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\underbrace{r^2 E_r}_{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}})$ (Cf. formulaire : opérateur divergence)

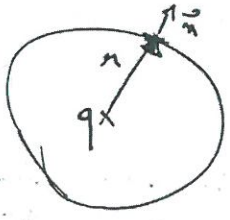
$$div(\vec{E}) = 0$$

Green-Ostrogradski :

$$\oiint \vec{E}.d\vec{\Sigma} = \iiint_{int(\Sigma)} div\vec{E}.d\tau = 0$$ ✓

- Montrons maintenant, si q ∈ int(Σ) : $\oiint \vec{E}.d\vec{\Sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0}$?

- pour une sphère centrée sur q :



$\vec{n} = \vec{u}_r$,

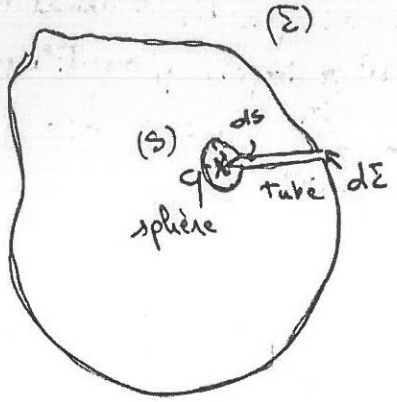
$$\vec{E}.d\vec{\Sigma} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} d\Sigma$$

$$\rightarrow \oiint \vec{E}.d\vec{\Sigma} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2$$

$$\boxed{\oiint \vec{E}.d\vec{\Sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Scanned by CamScanner

• pour une surface Σ :



Σ, S, tube $\}$ Δ

Σ privé de $d\Sigma$; S privé de ds

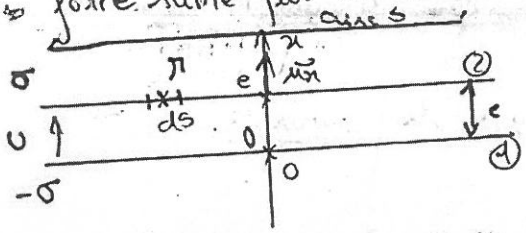
fermé avec q à l'extérieur

$$\Rightarrow \oint\!\!\oint_{\Delta} \vec{E}.\vec{d\Sigma} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Phi_{\Sigma} + \Phi_{\text{sphère}} + \Phi_{\text{tube}} = 0$$

Φ_Σ ✓ ; $\Phi_{\text{sphère}} = -\frac{q}{\varepsilon_0}$; $\Phi_{\text{tube}} \to 0$ quand la largeur du tube tend vers 0

• force subie par une armature de condensateur plan :



On s'intéresse à la force électrique subie par 2 : $\vec{F}_{e,ext\to 2}$? $= F_{e2}$

On calcule $\vec{E}_1$ en un point $M \in (2)$:

$$\vec{E}_1(M) = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_n \quad \text{(plan infini)}$$

en notant que M est de charge $dq = \sigma\, ds$:

$$\vec{F}_{e2} = \frac{-\sigma^2}{2\varepsilon_0} ds\, \vec{u}_n$$

et On a $\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S\, \vec{u}_x$ et $\sigma = \frac{q}{S}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{1\to 2} = \frac{-q^2}{2\varepsilon_0 S}\vec{u}_n$$

$$\Rightarrow \|\vec{F}_{1\to 2}\| = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} \quad \text{or} \quad q = CU = \frac{\varepsilon_0 S}{e}U \Rightarrow \|\vec{F}_{1\to 2}\| = \frac{\varepsilon_0 S^2}{e^2}U^2 \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0 S}$$

$$\boxed{\|\vec{F}_{1\to 2}\| = \frac{\varepsilon_0 S}{2e^2}U^2}$$

Scanned by CamScanner

c) Formulaire à retenir.

- Si $\vec{E}$ est uniforme, pour doublet & dipôle, on a un couple

$$\vec{p} \wedge \vec{E}_0 \quad (+ \sum \vec{F} = \vec{0})$$

- Si $\vec{E}$: non-uniforme :

pour un dipôle : $\begin{cases} E_{p\,\text{interaction}} = -\vec{p}\cdot\vec{E}_{(\text{point où est le dipôle \& mettons A})} \\ \vec{T}_{(A)} = \vec{p} \wedge \vec{E}(A) \end{cases}$

- $F_x = \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,(E_x)_{(A)}$

$\vec{F} = \text{grad}\,(\vec{p}\cdot\vec{E})_{\vec{p}=\text{cte}}$

d) résultats qualitatifs :

- tendance d'un dipôle à s'aligner sur le champ ext.

(tendance à minimiser E_p)

→ pour minimiser $E_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}$, on aimerait avoir $\vec{p} \wedge \vec{E}$.

On aurait $\begin{cases} \text{un équilibre stable pour } \vec{p} = \alpha\vec{E},\ \alpha > 0 \\ \text{un équilibre instable pour } \vec{p} = -\alpha\vec{E},\ \alpha > 0 \end{cases}$

→ en principe, le dipôle va se mettre à osciller autour de son équilibre stable. Il ne va pas y être directement.

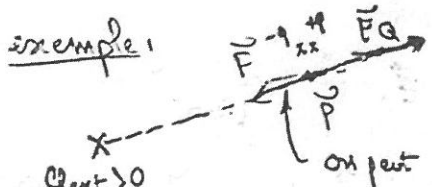
- pour un dipôle colinéaire & de même sens que $\vec{E}$, on a une tendance à se diriger dans la dir. où $\|\vec{E}\|$ augmente.

→ un dipôle est attiré par les zones de champ intense.

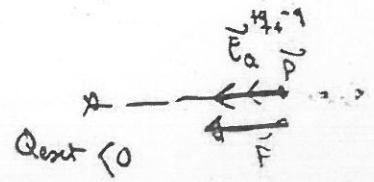
. si $\vec{p} \parallel \vec{E}$ de même sens :

$$E_p = -\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{E}\|.$$

exemple :



on peut le dire sans calculs, par la direction qualitative donnée par $\vec{p}$



Scanned by CamScanner

c) Formulaire à retenir.

- Si $\vec{E}_{ext}$ est uniforme, pour doublet & dipôle, on a un couple

$$\vec{p} \wedge \vec{E}_0 \quad (+\sum \vec{F} = \vec{0})$$

- Si $\vec{E}$: non-uniforme :

pour un dipôle : $\begin{cases} E_{p\,interaction} = -\vec{p}\cdot\vec{E} \text{ (point où est le dipôle \& mettons A)} \\ \vec{\Gamma}_{(A)} = \vec{p} \wedge \vec{E}(A) \end{cases}$

- $F_x = \vec{p}\cdot \overrightarrow{grad}(E_{ext})_{(A)}$

$\vec{F} = \overrightarrow{grad}(\vec{p}\cdot\vec{E})_{\vec{p}=cte}$

f) résultats qualitatifs :

- tendance d'un dipôle à s'aligner sur le champ ext.

(Tendance à minimiser E_p)

→ pour minimiser $E_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}$, on aimerait avoir $\vec{p} \parallel \vec{E}$.

On aurait : un équilibre stable pour $\vec{p} = \alpha\vec{E}$, $\alpha > 0$

un équilibre instable pour $\vec{p} = -\alpha\vec{E}$, $\alpha > 0$

→ en principe, le dipôle va se mettre à osciller autour de son équilibre stable. Il ne va pas y être directement.

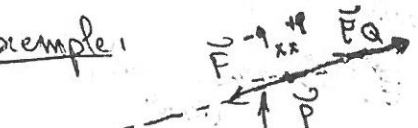
- pour un dipôle colinéaire & de même sens que $\vec{E}$, on a une tendance à se diriger dans la dir. où $\|\vec{E}\|$ augmente.

→ un dipôle est attiré par les zones de champ intense.

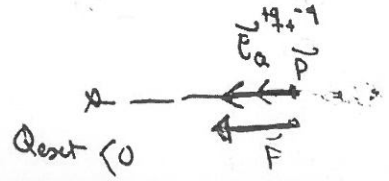
. si $\vec{p} \parallel \vec{E}$ de même sens :

$$E_p = -\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{E}\|.$$

exemple :



on peut le dire sans calculs, par la direction qualitative donnée par $\vec{p}$



Scanned by CamScanner

4- Conducteur en équilibre électrostatique

* Conducteur: ~~en équili~~
possède des charges mobiles susceptibles de se déplacer dans tout le conducteur
dès que $\vec{E} \neq 0$: il y a du courant



$\Rightarrow$ $\forall M$ dans le conducteur $\vec{E} = 0$

ex :



$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

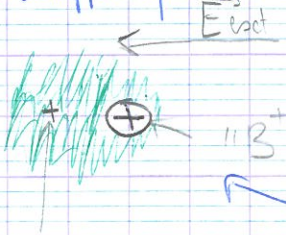
devient chargé en surface $\sigma(P)$ est dû à la présence de q

5- Polarisation de la matière :

Atomes $\longrightarrow$  nuage électronique

$dq_1 = d\tau \cdot \rho$

Si on applique un champ ext.



Barycentre $\bar{e}$

atome neutre se comporte comme un dipôle $\rightarrow$ dq/ le inclut

$\vec{p} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_{ext}$

$[\vec{p}] = [\alpha][\varepsilon_0][\vec{E}]$

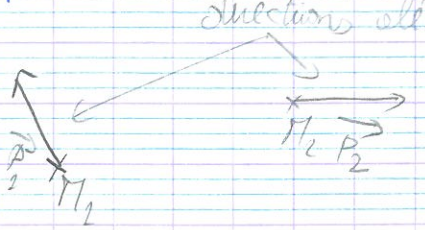
or $\vec{E}_{dip} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $[\alpha] = L^3$

↓ en ordre de grandeur du volume de l'atome

mais il y a aussi des atomes qui possèdent un moment dipolaire sans champ extérieur (surtout molécules)
→ dipôles permanents

des objet physiques neutres ont néanmoin des effets électriques

(A) Molécules possédant des moments dipolaires permanents



→ En moyenne chaque dipôle plutôt aligné selon $\vec{E}$ créé par l'autre

→ forces attractives (chaque dipôle attiré vers la zone de charge → vers l'autre dipôle.

→ forces de Van de Waals $\propto 1/r^7$

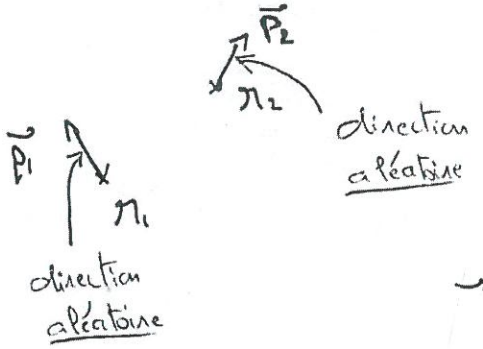
→ mais il y a aussi des atomes qui, même sans champ extérieur, possèdent un moment dipolaire.

→ On les appelle dipôles permanents

. Cela veut dire, que des objets neutres ont néanmoins des effets électriques.

Conséquences : actions mécaniques.

Ⓗ molécules possédant des moments dipolaires permanents.



→ en raisonnant en moyenne : chaque dipôle sera plutôt aligné sur le champ créé par l'autre.

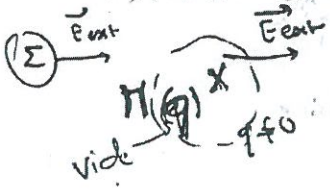
→ On a finalement une force attractive : chaque dipôle est attiré vers la zone de champ intense de l'autre dipôle, i.e vers l'autre dipôle

On parle de force de Van Der Waals F ;

$$F \propto \frac{1}{r^7}$$

* équilibre d'une charge ponctuelle dans un champ électrostatique extérieur :

a) Position d'équilibre (sous l'action du seul ch. Elec (sans ch. mag)) . $\vec{F} = q\vec{E}(r) \Leftrightarrow \vec{E}(r) = \vec{0}$. :



b) Stabilité de l'équilibre :

* Il n'existe pas de position d'équilibre stable dans une zone sans charges.

Energie potentielle ; $E_p = qV_{ext}$

→ stable ⇔ min local de E_p

$\Leftrightarrow \begin{cases} q>0 : \text{max local de } V_{ext} \\ q<0 : \text{min local de } V_{ext} \end{cases}$

Scanned by CamScanner