

Equation de Maxwell et Énergie électromagnétique

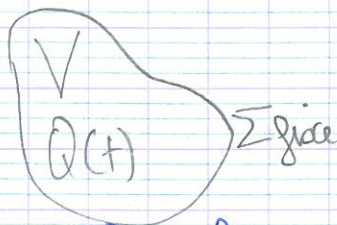
1. Equation de Maxwell:

1) Complément sur la conservation de la charge électrique:

2) Rappel: postulat: la charge est une grandeur conservative: On ne peut pas créer de charge.

3) Deux formulations:

→ globale

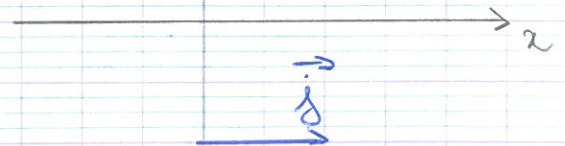
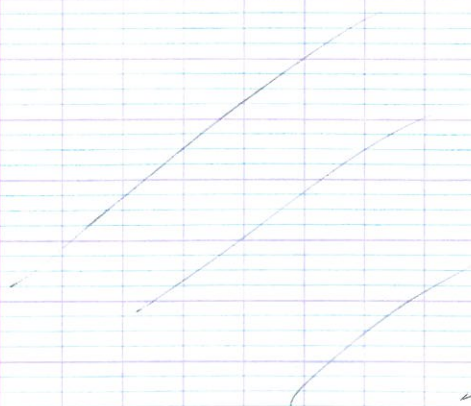


$$\frac{dQ_{int}}{dt} + I_{\Sigma} = 0$$

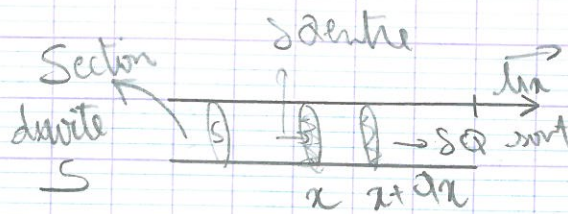
→ locale: $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

4) Démonstration officielle de l'équation locale dans un modèle unidimensionnel en coordonnées:

5) ρ dépend de x et t : $\rho(x, t)$
 $\vec{j} = j(x, t) \vec{u}_x$



$j = \text{cte, fixe}$
 ρ uniforme et j uniforme



$$\frac{dQ_{int}}{dt} = \underbrace{\frac{\delta Q_{entant}}{\delta t}}_{j(x) \times S} - \underbrace{\frac{\delta Q_{sortant}}{\delta t}}_{j(x+dx) \times S}$$

$$Q_{int} = \rho \times S dx$$

$$\frac{dQ_{int}}{dt} = S dx \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\text{donc } S dx \frac{\partial \rho}{\partial t} = -S \left(\frac{\partial j}{\partial x} dx \right)$$

$$\text{donc } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

$$\text{or dans le cas général } \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \text{div } \vec{j}$$

$$\text{dans le cas li: } \text{div } \vec{j} = \frac{\partial j}{\partial x}$$

$$\text{donc } \text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

2) Equations de Maxwell. 1865

Maxwell - Gauss	$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$	①
Maxwell - Faraday	$\vec{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$	②
Maxwell - Flux	$\text{div } \vec{B} = 0$	③
Maxwell - Ampère	$\vec{\text{rot}} \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$	④

loi de coulomb 1785 → electrostatique

invention: pile Volta 1800 → électricité

courants ont un effet magnétique 1820

(Gauss) (exp rien ce)

(Ampère) → Magnétostatique

Faraday 1821 effet mécanique

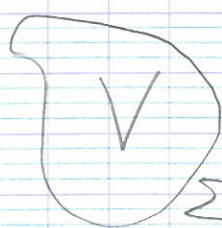
aimant à fil → moteur électrique

Magnétisme
Flux

1831 induction: $\vec{B}$ variable $\rightarrow$ crée courants

3) Equations globales associées aux équations de Maxwell

2) Théorème de Gauss:



$$\iiint_V d\tau \operatorname{div} \vec{E} \stackrel{①}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d\tau = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

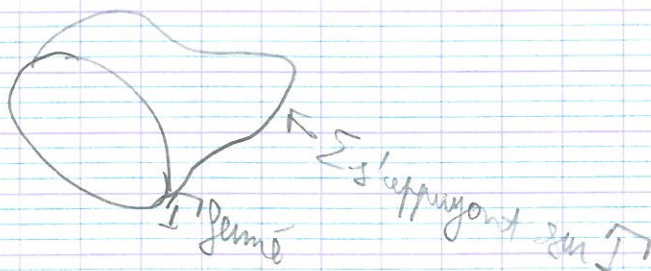
$$\oint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$\rightarrow$ Théorème de Gauss valable aussi en régime non permanent

6) Théorème d'Ampère:

① Régime permanent $\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

nécessaire
pour appliquer
le théorème



$$\oint_{\Sigma} \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} d\vec{\Sigma} = \oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{M}$$

$$\mu_0 \oint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{\Sigma}$$

$$\text{donc } \oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{M} = \mu_0 I_{\Sigma}$$

Théorème d'Ampère

réégime non permanent: $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}$

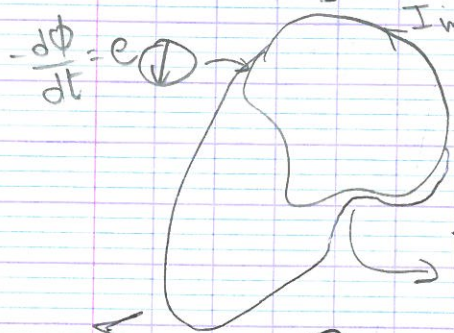
Thm de Maxwell Ampère

La circulation du champ magnétique sur un contour fermé est égale à μ_0 circulation de...

② Loi de Faraday:

* Rappel sur le phénomène d'induction:

$\frac{d\Phi}{dt} = e$ Induit si B ressentie est variable



circuit fermé

"comme si il y a un générateur de f.e.m $e = \frac{d\Phi}{dt}$ "

$\Phi = \text{flux de } \vec{B} \text{ à travers le circuit}$

$[V] = \frac{[\text{Energie}]}{[q]}$

$\sum \text{d'effort sur } l$

$e = \text{travail de la force exercée sur une charge divisée par la charge sur un tour}$

→ ① contour fixe

$$\iint_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = 0 \quad (2)$$

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} d\vec{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$\vec{F}_{ee} = q\vec{E}$

donc $\oint \frac{\vec{F}_{ee}}{q} d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$

donc $e = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$

→ Loi de Faraday démontrée pour un circuit fixe placé dans un champ magnétique variable au cours du temps

d. $\vec{B}$ et à flux conservatif

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

④ Lien entre équation de Maxwell et le postulat de conservation de la charge :

a. ~~Courant~~ des années 1830-1835

équation locale possible : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

on applique div à gauche et à droite : $\text{div } \text{rot } \vec{B} = \text{div } \mu_0 \vec{j}$

donc $\text{div } \vec{j} = 0 \rightarrow$ incompatible avec $\text{div } \vec{j} \neq 0$

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ si } \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

donc incompatible avec le postulat de conservation de la charge expérimental

b. Avec équation de Maxwell :

$$\text{div}(\text{Max-Amp}) \Rightarrow \underbrace{\text{div}(\text{rot } \vec{B})}_0 = \epsilon_0 \mu_0 \text{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{donc } -\epsilon_0 \mu_0 \text{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \text{div } \vec{j} = \mu_0 \text{div } \vec{j}$$

$$(\text{Max-Coul}) : \frac{-\partial \rho}{\partial t} = \text{div } \vec{j} \quad (\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0)$$

$$\text{donc } \underline{\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Compatible avec la conservation de la charge} \end{array} \right.$$

On a démontré la conservation de la charge à partir de la conservation de la charge.

c - Le courant de déplacement

$$(\text{Maxwell-Ampère}) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$: courant de déplacement

⇒ Quelques commentaires:

a - Les sources du champ magnétique sont les courants et les courants

$$\underbrace{(\rho, \vec{j})}_{\text{sources}} \longrightarrow \underbrace{(\vec{E}, \vec{B})}_{\text{effets}}$$

b - Couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ (on ne peut pas les étudier séparément)
Maxwell-Faraday, Maxwell-Ampère introduisent un couplage $(\vec{E}, \vec{B})$
sauf en régime permanent

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

sol
+
rajoute
des info
→ global

⇒ Les équations de Maxwell ne sont pas suffisantes pour trouver le champ:

il n'y a pas unicité: que des dérivées pour $\vec{E}, \vec{B}$
→ pas du tout unicité de la solution des équations
il faut ajouter des contraintes physiques:

* Si les charges et les courants ~~de~~ sont non nuls et
que
que dans un domaine borné alors $\vec{E}$ et $\vec{B}$

à l'infini ou à l'infini

$\vec{E}$ et $\vec{j}$
doivent être
compatibles

d- Linéarité des équations :

$$(\vec{C}_1, \vec{j}_1) \rightarrow (\vec{E}_1, \vec{B}_1)$$

$$(\vec{C}_2, \vec{j}_2) \rightarrow (\vec{E}_2, \vec{B}_2)$$

$$(\vec{C}_1 + \lambda \vec{C}_2, \vec{j}_1 + \lambda \vec{j}_2) \rightarrow (\vec{E}_1 + \lambda \vec{E}_2, \vec{B}_1 + \lambda \vec{B}_2)$$

II Ondes électromagnétiques:

1) Équations de propagation du champ électromagnétique dans un domaine de l'espace sans charge ni courant

Max-Amp : rot : $(\text{rot rot } \vec{B} = \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta(\vec{B})) \quad \vec{C} = \vec{0} \quad \vec{j} = \vec{0}$

$$\text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta(\vec{B}) - \epsilon_0 \mu_0 \text{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

Max-Flux : $= 0$

$$- \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}$$

Max-Farad : $+ \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

$$\text{donc } \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta(\vec{B}) = \vec{0} \quad \left| \text{on isole } \vec{B} \right. \quad (1)$$

MF
MC
MA $\Rightarrow \Delta(\vec{E}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

équation de propagation vectorielle en dimension 3

En coordonnées cartésiennes

Champ vect $\vec{E}$ coord selon x

$$[\Delta \vec{E}]_x = \Delta E_x$$

$$= \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

en projetant l'équation (1) sur $\vec{e}_x$ on a:

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

avec $\psi = E_x$ ou E_y ou E_z ou B_x ou B_y ou B_z

équation de propagation scalaire

⊕ Modèle unidimensionnel $\psi(x,t)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{équation de propagation en dimension 1}$$

$$\frac{[\psi]}{L^2} = [cte] \frac{[\psi]}{T^2}$$

$$\text{donc } [cte] = T^2 L^{-2} = \frac{1}{[v]^2} = \frac{1}{C^2}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 C^2 = 1 \quad \text{C'est une vitesse}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{équation de d'Alembert de propagation (1D)}$$

2) Résolution de l'équation de d'Alembert en dimension 1

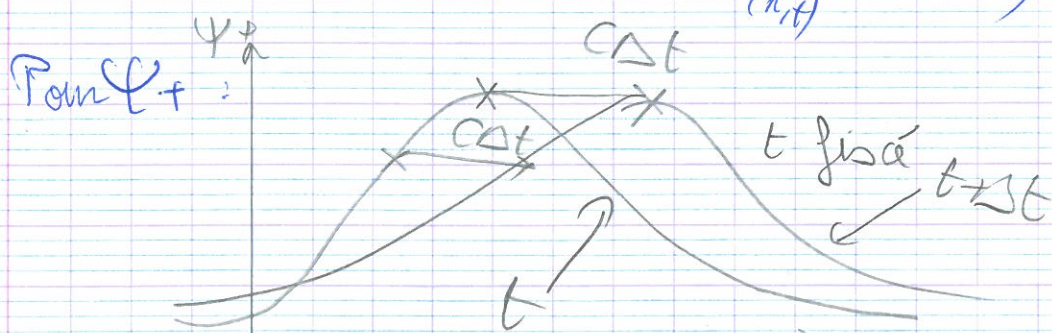
a- Théorème: $\psi(x, t)$

La solution générale de l'équation de d'Alembert en dimension 1 est $\psi(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$

avec F et G deux fonctions quelconques deux fois dérivables.

b- Interprétation physique:

ψ générale est la superposition de $\psi_+ = F(x - ct)$ et de $\psi_- = G(x + ct)$



onde progressive se propageant à la vitesse c dans le sens x croissant

$$\psi_+(x + \Delta x, t + \Delta t) = F(x + \Delta x - c(t + \Delta t)) + G(x + \Delta x + c(t + \Delta t))$$

$x \Delta x = c \Delta t \rightarrow \psi_+(x, t)$

ψ_- : onde progressive dans le sens des x décroissants.

c - Ondes électromagnétiques et la lumière

...

d - démonstration

Soit l'équation $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$

on cherche une fct inconnue $\psi(x, t)$

→ Méthode de changement de variable

$$\begin{aligned} u &= x - ct \\ v &= x + ct \end{aligned} \implies \begin{aligned} x &= x(u, v) \\ t &= t(u, v) \end{aligned}$$

$$\psi(x, t) = \psi(u, v)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= -c \frac{\partial \psi}{\partial u} + c \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right)$$

donc : $\Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0 \implies \frac{\partial \psi}{\partial v} = \text{cte}(v) = f(v)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \text{cte}(u) = g(u)$$

$$\text{Alors : } \psi = G(u) + F(v)$$

③ un sys d'eq couplé d'équation diff d'ordre 1
conduit à une équation d'Alembert

④ 2 champs inconnus $A(x, t)$, $B(x, t)$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} = \alpha \frac{\partial B}{\partial t} \right) \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x} = \beta \frac{\partial A}{\partial t} \right) \quad (2)$$

éliminons B

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (1): \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= \alpha \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} \\ &= \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) \\ &= \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\beta \frac{\partial A}{\partial t} \right) \\ &= \alpha \beta \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \end{aligned}$$

④ $\alpha \beta > 0$

on pose $\alpha \beta = \frac{1}{c^2}$: $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$

célérité: $c = \sqrt{\frac{1}{\alpha \beta}}$

le couplage entre E et B est ce qui fait que
les ondes électromagnétiques existent.

III Energie électromagnétique

1) Équation bilan locale d'une grandeur physique extensive A

2) Notations:

a : densité volumique de A

$$A \text{ dans le volume } V = \iiint_V a \, d\tau$$

échange de A à travers Σ
 débit de A : $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta A}{\delta t} = \iint_{\Sigma} \vec{j}_A \cdot d\vec{\Sigma}$

$\vec{j}_A$: densité de courant de A

3) Équation locale de bilan de A

$\stackrel{=0}{\Downarrow}$ conservation de A $\rightarrow \operatorname{div} \vec{j}_A + \frac{\partial a}{\partial t} = \alpha(M, t) \rightarrow \text{que représente } \alpha?$

$\rightarrow \Sigma$ fermée, Immobile: $\iiint_V \operatorname{div} \vec{j}_A \, d\tau + \iint_{\partial V} \frac{\partial a}{\partial t} \, d\tau = \iiint_V \alpha \, d\tau$

soit: $\oint \vec{j}_A \cdot d\vec{\Sigma} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V a \, d\tau = \iiint_V \alpha \, d\tau$

donc: $\cancel{D_A \vec{E}} + \frac{d}{dt} A_{\text{intérim}} = \iiint \alpha \, dV$

on met de l'autre côté $\rightarrow$ $+ D_A \text{ entre } d \text{ et } V$

$\rightarrow$ la vari de A est ce qui entre dans V + ce qui est lié à l'intérim

$\hookrightarrow \alpha =$ taux de réaction de A par unité de temps et de volume.

2) Puissance des forces électromagnétiques

$\vec{E}(M)$
 $\vec{B}(M)$
 e^1

description continue
des charges et courants
(équations volumiques)

$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
 $\text{div } \vec{B} = 0$
 $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$
 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

@ Densité volumique des forces:

modèle discret: $\vec{F}_i = q_i (\vec{E}(M_i) + \vec{v}_i \wedge \vec{B}(M_i)) \rightarrow$ Lorentz

distribution continue à
base de charge volumique:



$$\sum q_i = \rho \, dV$$

$$\sum q_i \vec{v}_i = \vec{j} \, dV$$

$$d\vec{F} = \rho \, dV \vec{E} + \vec{j} \, dV \wedge \vec{B}$$

$$d\vec{F} = dV [\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}]$$

Forme de la description pour un modèle continu

$$\rightarrow \frac{d\vec{F}}{d\tau} = \underbrace{e\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}}_{\text{Laplace}} \text{ densité volumique de force}$$

B) Densité volumique de puissance des forces de champ :

Cas discret: $P_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = q_i \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \vec{v}_i$

Cas continu (description volumique) $dP = \sum P_i = \sum q_i \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \vec{v}_i$

$$= \vec{E}(\vec{r}) \sum q_i \vec{v}_i$$

$$= \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{j} d\tau$$

donc $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

densité volumique de puissance subie par le matériel de la part du champ électromag.

3) Énergie électromagnétique:

a) Mise en évidence qualitative:

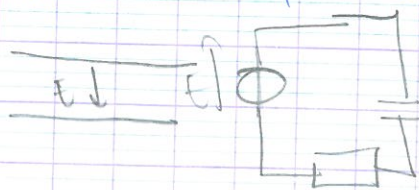
* $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$: les charges en présence de $(\vec{E}, \vec{B})$ absorbent de l'énergie.

* "lumière du soleil" (onde électromag) apporte de l'énergie

* Si $(\vec{E}, \vec{B})$ donne de l'énergie à la matière

$\rightarrow (\vec{E}, \vec{B})$ possède de l'énergie qu'il peut céder à la matière

* électrocinétique: création d'un champ électrique



$$EI = RI^2 + q \frac{d\varphi}{dt} = RI^2 + \frac{d(q\varphi)}{dt}$$

B) Equation locale de bilan energetique pour le champ
electromagnetique
systeme $(\vec{E}, \vec{B})$ a une energie (A)

qui peut être transportée $\vec{j}_A$

qui peut être créée par une densité volumique α (fonction de réaction par unité de volume et de temps)

densité d'énergie

$$\text{div } \vec{j}_A + \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \alpha$$

terme de réaction

Ce qui est gagné par la matière est perdu par le champ
magnétique

$$\frac{dP}{dt} \text{ recu par la matière} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

α : énergie gagnée par le champ par unité de temps et de volume = $-\vec{j} \cdot \vec{E}$

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right)$$

(MA)

→ formule: $\text{div}(\vec{A} \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}$
 $\hookrightarrow \text{div}(\vec{E} \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}$

$$\text{donc } -\vec{j} \cdot \vec{E} = \text{div} \frac{\vec{E} \vec{B}}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right)$$

(MF) $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\text{donc } -\vec{j} \cdot \vec{E} = \text{div} \frac{\vec{E} \vec{B}}{\mu_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} - \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

→ équation bilan local d'énergie électromagnétique

$$\vec{j} \text{ énergie électromagnétique} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} + \text{not (?)}$$

$$\text{densité volumique d'énergie électromagnétique} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

c) Densité volumique d'énergie électromagnétique
Exemple condensateur plan

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad / \quad \overset{\substack{\uparrow \\ \text{énergie}}}{W_{\text{condensateur}}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e}{\epsilon_0 S} \times S^2 \epsilon_0^2 E^2$$

$$= \frac{1}{2} e S \epsilon_0 E^2$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (eS)$$

↳ volume du
lequel naît le
champ électrique

Idee: là où $(\vec{E}, \vec{B}) \neq (0, 0)$, il existe de l'énergie
d'intégrer $w = \frac{dW}{d\tau} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$

d) Vecteur de Poynting:

définition: on pose $\vec{\Pi}_{\text{Poynting}} = \frac{\epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}_{\text{cmpt}}}{\mu_0}$ "vecteur de Poynting"
↳ c'est au fait que champ vect.
(noté parfois $\vec{R}$)

→ $\vec{\Pi}$ joue le rôle de la densité de courant d'énergie électromagnétique

$$D_{A\Sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{S}_A d\vec{\Sigma}$$

$$= \frac{\text{Energie traversant } \Sigma}{\delta t}$$

= Puissance traversant Σ dans le sens de l'orientation de Σ .

$$\iint_{\Sigma} \vec{T} d\vec{\Sigma} = D_{\text{Energie à travers } \Sigma}$$

C'est le théorème de Poynting: la puissance traversant une surface quelconque est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la surface

$$\text{donc } W_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

c) Le concept de localisation d'énergie

$$W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \text{ il y a de l'énergie là il y a un champ électromagnétique.}$$

Exemples d'utilisation pour l'effet Joule: conductivité du conducteur

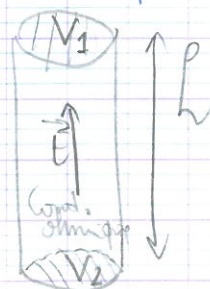
Loi d'Ohm:

on prend un conducteur ohmique: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ en régime permanent (mais aussi en régime variable)

Loi d'Ohm locale

expérience → la plupart des métaux sont des conducteurs ohmiques (ne marche pas à très haute température pour un supraconducteur)

exemple: cylindre plein conducteur maintenu sous différence de potentiel constante (régime permanent)



$\vec{E}$ est uniforme dans le conducteur :

$$\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{h} \vec{u}_z$$

$$\begin{cases} V(z) = V_2 + \frac{(V_1 - V_2)}{h} z \\ \Delta V = 0 \end{cases}$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \gamma (V_1 - V_2) \frac{1}{h} \vec{u}_z$$

$$I = \iint_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{\gamma (V_1 - V_2)}{h} S$$

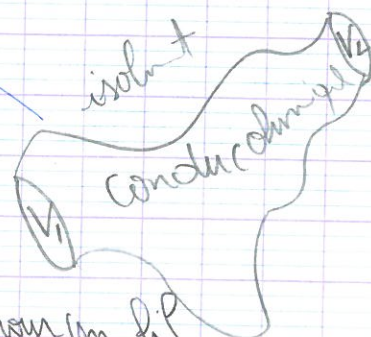
$$V_1 - V_2 = \frac{h}{\gamma S} \cdot I \rightarrow V_1 - V_2 = RI, \quad R = \frac{h}{\gamma S}$$

→ c'est la loi d'Ohm globale

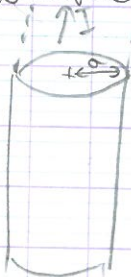
→ Résultat Admis: quel que soit la forme du conducteur ohmique maintenu entre 2 équipot et entouré par un isolant électrique en régime permanent: $V_1 - V_2 = RI$

$$R = \frac{1}{\gamma} \times \text{facteur géométrique}$$

= résistance



b. Vecteur de Poynting pour un fil conducteur cylindrique illimité (en pratique très long)

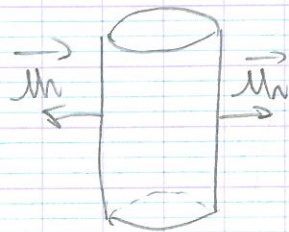


$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma S} \vec{u}_z, \quad \vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{B} \text{ à la limite du conducteur} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_\theta$$

$$\begin{aligned}\vec{\Pi}_{\text{ohmic}} &= \frac{1}{\delta S} \frac{I^2 \rho_0}{2\sigma \omega \rho_0} \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\phi \\ &= -\frac{\mu_0}{\delta} \frac{I^2}{2\sigma \omega S}\end{aligned}$$

2) Flux du vecteur de Poynting à travers le cylindre de hauteur h et rayon a orienté par $\vec{u}_z$



$$\int \vec{\Pi} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{-I^2}{\delta 2\sigma a S} \times h \times 2\pi a = \frac{-I^2 h}{\delta S}$$

= $P_{\text{travers } \Sigma}$ dans le sens de $\vec{u}_z$

$$P_{\text{travers } \Sigma} = RI^2$$

il y a de la puissance qui rentre à travers Σ

1^{er} principe de la thermodynamique pour résistances en régime permanent :

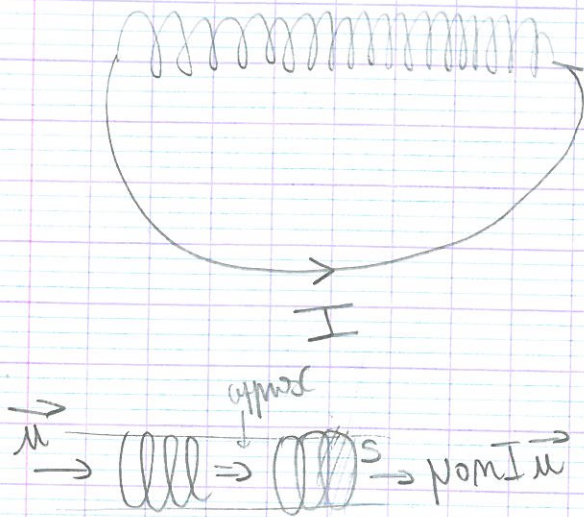
Régime permanent $\left(\frac{dU}{dt} = 0 = \underbrace{\frac{\delta W}{dt}}_{-RI^2} + \underbrace{\frac{\delta Q}{dt}}_{\text{chaleur évacuée vers l'extérieur } +RI^2} \right)$

travail électromagnétique fourni ($+RI^2$ res u).

Échange: la puissance vient à travers la surface du fil.

B) Énergie d'un solénoïde (très long)

a) Inductance propre d'un solénoïde:



Pour un circuit fermé

$$\Phi_{B, \text{ propre, circuit}} = L I$$

$\downarrow$ constante
 $\downarrow$ surface s'appuyant sur le contour
 indép de I

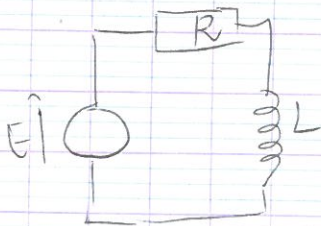
$$\Phi_{\text{propre}} = \mu_0 n I S$$

1 spire

$$\Phi_{\text{total}} = \mu_0 n I S n l$$

donc $L = \mu_0 n^2 S l$

b) Bilan énergétique lors de l'établissement du courant dans une bobine



$$\phi(t) = L i(t)$$

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(L i(t))}{dt}$$

bobine indéformable: $L = \text{cte}$

$$\text{donc } e_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt}$$

Pouillet (Mailles):

$$Ri = E - L \frac{di}{dt}, \quad E = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$W_m = \frac{1}{2} L i^2$

$\overbrace{E_i = Ri^2 + iL \frac{di}{dt}}$, donc $\overbrace{E_i = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)}$
 puissance du générateur puissance du gén.

c) Lien avec la densité volumique d'énergie électromagnétique
 Exemple: Solénoïde très long

$\overbrace{\left(\frac{B}{\mu_0} \right)}$ $W_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 n^2 l S i^2}{\mu_0}$
 $= \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) (lS) \rightarrow \text{Volume}$
 densité volumique d'énergie associée à l'énergie magnétique

$$\rightarrow w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$