

Onde électromagnétique en présence de conducteurs

I Etudes préliminaires

① Conductivité en régime harmonique (dans un milieu conducteur)

② Description d'un milieu conducteur

Un conducteur est un milieu où toutes les charges sont libres $\Rightarrow$ se déplacent dans tout le volume étudié

charges: / électron : masse m
noyaux atomiques, ions (charges $+$) : $M \gg m$

milieu (plasma) / gazeux (métal)
mais avec vitesse
très faible
 $\vec{F} = M \cdot \vec{a}$

b) Modélisation des forces subies par les charges:
 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

① Comme dans le vide, pour une onde progressive plane : $B \approx E/c$

$$\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \leq \|\vec{B}\| \|\vec{v}\| \sim \frac{vE}{c}$$

electron non relativiste $\left| \frac{v}{c} \right| \ll 1$

$$F_{\text{électromagnétique}} \approx q\vec{E}$$

Modèle de Drude: les forces dues $\vec{F}$ subies sont modélisables
par une force de freinage $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$

$$\tau = \text{cte} : [\tau] = T$$

c) Conductivité en régime harmonique
Convention : $\cos(\omega t - \varphi) \rightarrow e^{-i\omega t + i\varphi}$

(H) $\vec{E}$ harmonique $m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m\vec{v}}{\tau} = q\vec{E}$
linéaire pour $\vec{v}$
réelle

on remplace l'éq réelle par l'éq complexe

$$m \frac{d\tilde{\vec{v}}}{dt} + \frac{m}{\tau} \tilde{\vec{v}} = q \tilde{\vec{E}} e^{-i\omega t}$$

solution particulière harmonique

$$m(-i\omega) \tilde{\vec{v}} + \frac{m}{\tau} \tilde{\vec{v}} = q \tilde{\vec{E}}$$

et donc $\tilde{\vec{v}} = \frac{q \tilde{\vec{E}}}{\frac{m}{\tau} - m i \omega} = \frac{q \tau}{m} \frac{\tilde{\vec{E}}}{1 - i\omega \tau}$

$\vec{j} = \vec{j}_{\text{electron}} + \vec{j}_{\text{ion}} \rightarrow$ négligeable car $v_{\text{ion}} \text{ négl}$

$\vec{j} d\tau = \sum_i q_i \vec{v}_i$ $\rightarrow$ identiques : $\vec{j} = nq\vec{v}$
densité portulatoire
nb d'électrons par
unité de volume

$$\tilde{\vec{j}} = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{\tilde{\vec{E}}}{1 - i\omega\tau}$$

$$\tilde{\vec{j}} = \tilde{\sigma} \tilde{\vec{E}}$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{ne^2\tau}{m(1 - i\omega\tau)}$$

conductivité complexe

d) Cas limites:

$\omega\tau \ll 1$: $\tilde{\sigma} = \frac{ne^2\tau}{m} \rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}$
 $\uparrow$
R

par exemple : conducteur tel que Cu $\sigma \approx 10^7 \sim 10^8 \text{ SI}$
 $m \sim 10^{-30} \text{ kg}$

($n=?$) : $n = \text{nb d'atomes par unité de volume}$

$$\rho = 10^4 \text{ kg/m}^3$$

$$M_{\text{molaire}} \sim 0,1 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$10^5 \text{ mol/m}^3$$

$$\downarrow$$

$$10^{23} \text{ atomes/m}^3$$

$$\tau \sim \frac{m\sigma}{ne^2} \sim \frac{10^{-30} \cdot 10^8}{10^{23} \cdot 10^{-38}} = \frac{10^{-22}}{10^{-15}} \sim 10^{-13} \text{ s}$$

ou 10^{-14} s (si σ plus faible)

$\rightarrow \omega \ll 10^{13} \text{ rad s}^{-1}$: domaine où $\tilde{\epsilon} = \frac{ne^2}{m}$ est valide
 et donc $\vec{j} = \tilde{\epsilon} \vec{E}$

* $\omega \gg 1$

$\hookrightarrow \tau$ grand $\rightarrow n$ faible

les plasmas peu denses,

par exemple l'ionosphère : $n \sim 10^{10} \text{ à } 10^{12} \text{ m}^{-3}$

$$\tilde{\epsilon} = \frac{ne^2 \tau}{m(1-i\omega\tau)} \sim \frac{ne^2 \tau}{-im\omega\tau} = i \frac{ne^2 \tau}{m\omega\tau} = \boxed{i \frac{ne^2}{m\omega} = \tilde{\epsilon}}$$

$\downarrow$
 Rq1 * $\tilde{\epsilon}$ est en retard de $\frac{\pi}{2}$ entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$

$\vec{j}$ est en retard de $\frac{\pi}{2}$ en rapport avec $\vec{E}$ en réel

Rq2 * dépendance en ω de $\tilde{\epsilon}$

2) Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu dissipatif

a) Milieu dispersif

↳ Vide sans charge ni courant $\rightarrow$ solutions aux eqs de M
 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$
 à condition que $k = \frac{\omega}{c}$

$$e^{i(kz - \omega t)} = e^{ik(z - \frac{\omega}{k}t)}$$

propagation à la vitesse de phase:

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} \stackrel{\text{Vide}}{=} c$$

↓
phase

$$f(\omega) = k$$

parfois avec des conditions moins restrictives (par ex. $\vec{f} \neq 0$)

$$\vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

sera solution de l'équation, à condition que $\omega = f(k)$ relation de dispersion

$\rightarrow$ Propagation possible pour une onde harmonique
 a) $V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{f(k)}{k}$
 milieu dispersif si $V_\phi \neq \text{constante}$ (en fait de k)

dépend des hypothèses faites sur le milieu, de la nature du milieu.

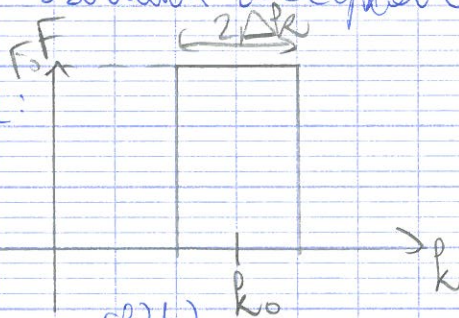
b) Exemple de propagation d'un paquet d'onde

(H) équations décrivent les milieux étudiés linéaires

$$\psi(z, t) = \int dk e^{i(kz - \omega(k)t)}$$

$F(k)$: solution acceptable des équations

on prend $F(k)$ simple:



$$\Delta k \ll k_0$$

$$\psi(z, t) = F_0 \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk e^{i(kz - \omega(k)t)}$$

on développe $\omega(k)$ au voisinage de k_0 : $\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk} \bigg|_{k_0} + \text{ordre 2}$

↑
paquet d'onde
↓
somme de ondes de fréq différentes

intégrale

$$kz - \omega(k)t = (k - k_0)z + k_0z - \omega_0t - (k - k_0) \frac{d\omega}{dk} t$$

$$\rightarrow \Psi(z, t) = F_0 e^{i(k_0z - \omega_0t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk e^{i(k - k_0)(z - \frac{d\omega}{dk} t)}$$

primitive

$$\left[\frac{e^{i(k - k_0)(z - \frac{d\omega}{dk} t)}}{i(z - \frac{d\omega}{dk} t)} \right]_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k}$$

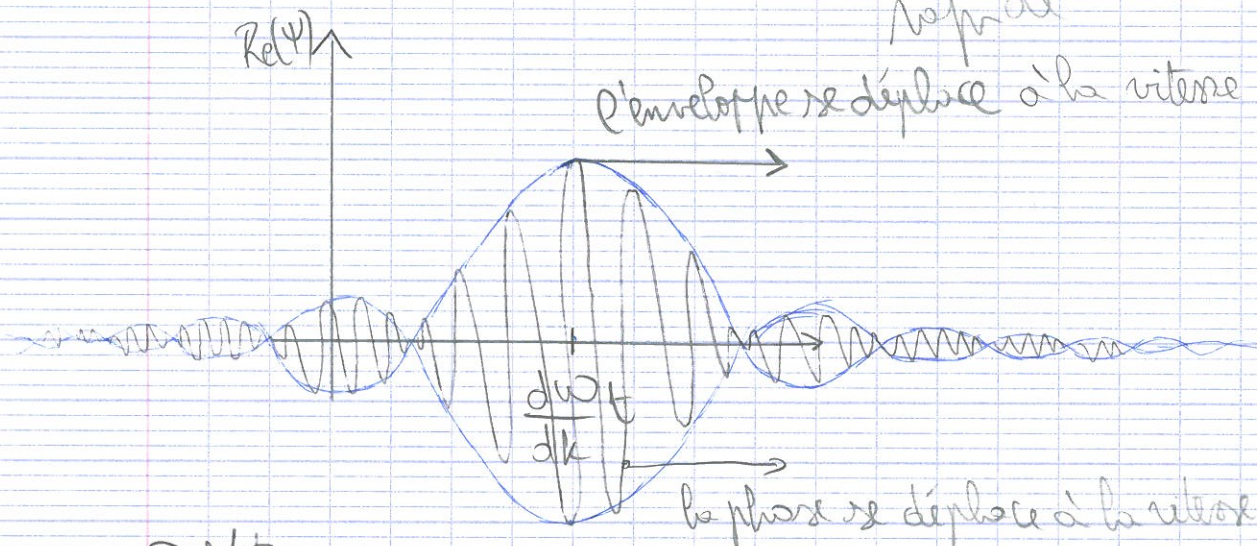
$$\Psi = F_0 e^{i(k_0z - \omega_0t)} \frac{2i \sin(\Delta k(z - \frac{d\omega}{dk} t))}{i(z - \frac{d\omega}{dk} t)} \times 2\Delta k$$

$$= F_0 e^{i(k_0z - \omega_0t)} 2\Delta k \operatorname{sinc}(\Delta k(z - \frac{d\omega}{dk} t))$$

$$\rightarrow \operatorname{Re}(\Psi) = F_0 2\Delta k \cos(k_0z - \omega_0t) \operatorname{sinc}(\Delta k(z - \frac{d\omega}{dk} t))$$

noyau

l'enveloppe se déplace à la vitesse $\frac{d\omega}{dk}$ lent



2) Vitesse de groupe
def: $V_g = \frac{d\omega}{dk}$

propriété: la vitesse de propagation du paquet vaut

2 vitesses: V_g et V_ϕ : V_g vitesse de groupe: vitesse de l'énergie, V_ϕ vitesse de phase

le paquet d'onde se déplace plus vite que la vitesse de phase

30

II Propagation d'onde dans un plasma peu dense

① Rappel: Conductivité complexe dans un plasma.

① $\omega \tau \gg 1$: τ grand $\vec{F}_{\text{freinage}} = -\frac{m \vec{v}}{\tau}$

↳ on néglige le terme de freinage (dû à d'éventuelles collisions)

$\|\vec{B}\|$ comparable à $\frac{\|\vec{E}\|}{c}$ et $\|\vec{v}\| \ll c$ donc $\vec{F} \sim q \vec{E}$

② Régime harmonique avec emploi de $e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow \vec{j} = \frac{ine^2}{m\omega} \vec{E}$ avec n densité particulière des électrons

③ Possibilité d'onde harmonique dans un plasma peu dense

④ La densité volumique de charge volumique est nulle en régime harmonique

$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{ime^2}{m\omega} \text{div } \vec{E} \approx i\omega \tilde{\rho} = 0$

$\text{div } \vec{E} = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{ime^2}{m\omega\epsilon_0} \tilde{\rho} - i\omega \tilde{\rho} = 0$

$\tilde{j} = \frac{ime^2}{m\omega} \vec{E}$ donc $\tilde{\rho} \left(\frac{me^2}{m\omega\epsilon_0} - i\omega \right) = 0$

Re $\Rightarrow \rho \left(\frac{me^2}{m\omega\epsilon_0} - \omega \right) = 0$

donc $\rho = 0$ sauf si $\frac{me^2}{m\epsilon_0} = \omega^2$

caractéristique du plasma

def: $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$ pulsation plasma du milieu étudié

⑤ Onde plane harmonique progressive dans un plasma peu dense

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k} \in \mathbb{R}^3 \text{ par ex: } \vec{k} = k \vec{e}_x$$

$$\omega \in \mathbb{R}^+ \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

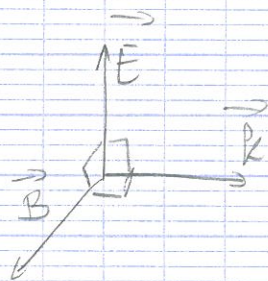
$$i k \vec{E} - i \omega \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \frac{k \vec{E}}{\omega}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$



$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{\omega/k}$$

Les ondes planes progressives harmoniques dans un plasma peu dense sont TEM et vérifient partout point $\vec{B} = \frac{k \vec{E}}{\omega}$

2) Relation de dispersion

$$\text{Maxwell ampère: } \text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$i k \wedge \vec{B} + i \omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = \frac{\mu_0 m e^2}{m \omega} \vec{E}$$

$$k \wedge \left(\frac{k \wedge \vec{E}}{\omega} \right) + \omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = \frac{\mu_0 m e^2}{m \omega} \vec{E}$$

$$k \left(\frac{k \cdot \vec{E}}{\omega} \right) \cdot \frac{\vec{E}}{\omega} + \frac{\omega}{c^2} \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \mu_0}{\omega} \vec{E}$$

donc $\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} = k^2} \quad (*)$

$$\vec{B} \wedge \vec{B} = \vec{B} \wedge \vec{B} = 0$$

$$- \vec{B} \wedge \vec{B} = 0$$

valable partout et à tout instant

Relation de dispersion: $\forall k$: si $\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} + k^2$

l'onde $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ peut exister

3) Etude de la relation de dispersion

a) Relation de coupure

pour avoir $k \in \mathbb{R}^{+*}$ il faut que $\omega > \omega_p$ (si $k=0$ pas de propagation)
 $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$ ω_p est la pulsation de coupure

le plasma se comporte que un miroir parfait

b) Vitesse de phase en fonction de ω :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

classique
 les:

eq de Maxwell

→ relation

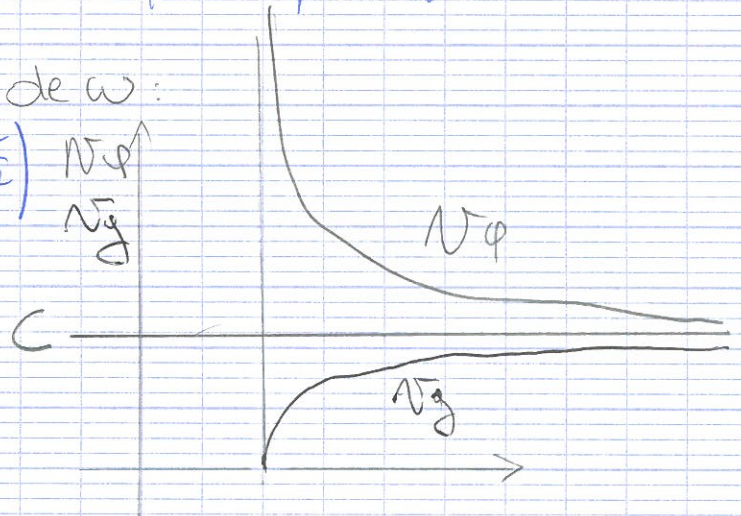
de dispersion

→ vitesse de

phase

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

$$\rightarrow v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$



c) Vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

→ on différentie (2): $\frac{2\omega d\omega}{c^2} = 2k dk$

donc $\frac{\omega d\omega}{k dk} = c^2$

$$v_\phi v_g = c^2$$

donc $v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

4) Commentaires

② Ondes de grandeur

plasma peu dense : couches supérieures de l'atmosphère
l'ionosphère : $n \sim 10^{10} \text{ à } 10^{12} \text{ m}^{-3}$

$$\omega_p^2 \sim \frac{10^{11} \times 10^{-33}}{10^{-30}} \times 10^{10} \times 10$$

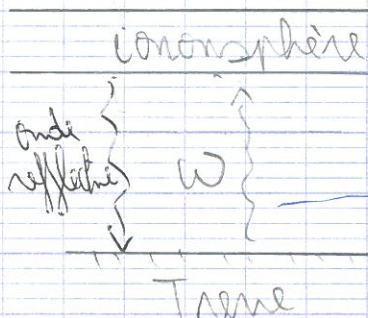
$$\sim 10^{14} \text{ SI}$$

$$\omega_p = 10^7 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\omega_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \sim 1 \text{ MHz}$$

fréquence plasma de l'ionosphère

6) Que se passe-t-il si $\omega < \omega_p$



$\omega \text{ onde envoyée} < \omega_p$

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0$$

$$k \in i\mathbb{R}, k = i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \frac{i}{\delta}$$

$$e^{-3/8} e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \text{neel: } E^0 e^{-3/8} \cos(\omega t - \varphi)$$

Lois de propagation

Energie absorbée par l'ionosphère ?

$$\frac{dP}{dt} \text{ reçue par } = \vec{j} \cdot \vec{E} \neq 0$$

$$\vec{j} = \frac{ine^2}{m\omega} \vec{E}$$

déphasage de $\pi/2$ entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{u}_y E_0 \cos(\omega t)$$

$$\vec{j} = \vec{u}_y (-) E_0 \sin(\omega t)$$

$\rightarrow \frac{dP}{dt}$ est en $\sin(2\omega t) \rightarrow 0$ en moyenne

l'énergie n'est absorbée donc réfléchi.

c) Indice optique de l'atmosphère

Pour $\omega > \omega_p$, l'atmosphère est un milieu transparent : $v_\phi = \frac{c}{n}$

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad k = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

$$\hookrightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1$$

III Ondes dans un conducteur Ohmique, modèles du conducteur parfait

① Propagation de l'onde

② En général on peut négliger le "courant de déplacement" devant le courant de conduction.

Bon conducteur :

$$\text{Ohm : } \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

* loi expérimentale $\sigma \sim 10^6 - 10^8 \text{ SI}$
 * modèle de drude $\sigma = \frac{ne^2}{m} \tau$
 valable pour $\omega < 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$

Maxwell-Ampère :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Conduction
 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

courant de déplacement

$$\gamma E \ll \epsilon_0 \omega E? \quad ; \quad \omega \ll \frac{\omega_p}{\sqrt{\epsilon_0}} \sim 10^{18} \text{ rad/s} \quad \begin{matrix} 10^7 \times 10^{11} \\ \downarrow \end{matrix}$$

b) Équation de diffusion pour le champ électromagnétique

on néglige $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$: $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$

On applique rot à l'éq. $\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \gamma \text{rot} \vec{E}$

$$\rightarrow \underbrace{\text{grad}(\text{div}(\vec{B})) - \Delta(\vec{B})}_{\substack{=0 \\ \text{M.F. flux}}} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{M.F.})$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta(\vec{B}) = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{équation de diffusion}$$

projection sur y : $\Delta B_y = \mu_0 \gamma \frac{\partial B_y}{\partial t}$

* pour E ?

$\text{div} \vec{E}$? (pour avoir la même eq)

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \rho = 0?$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{J} = \gamma \vec{E} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \gamma \text{div} \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \hookrightarrow \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{on pose } T = \epsilon_0 \gamma \\ \text{à l'échelle : } \rho = \rho_0 \exp(-t/T) \end{array}$$

T la constante de temps $\sim 10^{-18}$ s

qualitativement : un excès de charge se dissipe dans le conducteur

(On aurait pu supposer que ϵ varie lentement puis faire le calcul et tomber sur une contradiction)

② Peut-on envisager des ondes planes harmoniques dans un conducteur ohmique?

par ex: $\tilde{B}_y = \tilde{B}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad / \quad \omega \in \mathbb{R}^+$

l'équation: $\frac{\partial^2 \tilde{B}_y}{\partial x^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \tilde{B}_y}{\partial t}$

$$(ik)^2 \tilde{B}_y = -\mu_0 \sigma i \omega \tilde{B}_y$$

$$\Rightarrow k^2 = i \mu_0 \sigma \omega$$

$$\hookrightarrow k^2 = (1+i)^2 \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}$$

$$\text{donc } k = \pm (1+i) \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} \quad | \text{ on pose } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

$$\text{donc } k = \pm \frac{1+i}{\delta}$$

avec le signe +: $\tilde{B}_y = \tilde{B}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\frac{x}{\delta} - \omega t)}$

même si on a $\omega > 0$

partie réelle: $B_y = B_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta} - \phi)$: onde progressive atténuée dans le sens de prop.

atténuée dans le sens de propagation

onde progressive se propageant dans le sens positif

pas la même chose qu'une onde évanescente (algebra 2 ou l'ex pour eva)

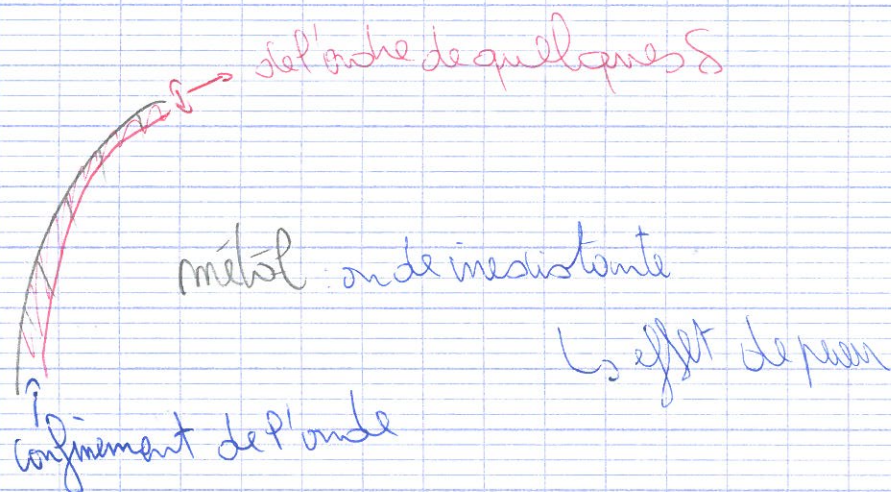
2) Application numérique, effet de peau

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \sim \sqrt{\frac{2}{6.28 \cdot 10^{-7} \cdot 10^7 \cdot 2\pi \cdot 10^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{1}{\omega}} \rightarrow \text{en Hz}$$

radio: $\omega \sim 1 \text{ MHz}$, $\delta \sim 0,1 \text{ mm}$

Est donc très petit

effet de peau:



δ : profondeur de peau

3) Le modèle du conducteur parfait

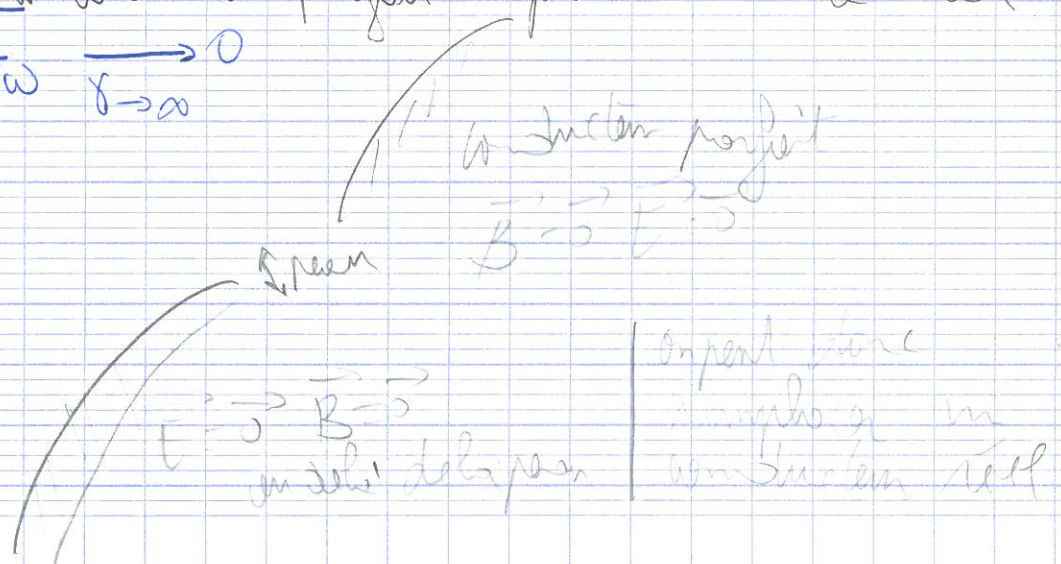
a- Def:

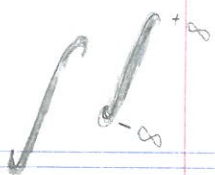
Un conducteur parfait est la limite d'un conducteur ohmique dont la conductivité tends vers l'infini

b- Comportement d'un conducteur parfait en présence d'une onde $\forall \omega \neq 0$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 0$$

c- Intérêt
conducteur réel





pour un conducteur parfait

si $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ est très petit devant toutes les distances q'on se pose le problème

conducteur réel

$$\delta \ll a, b$$



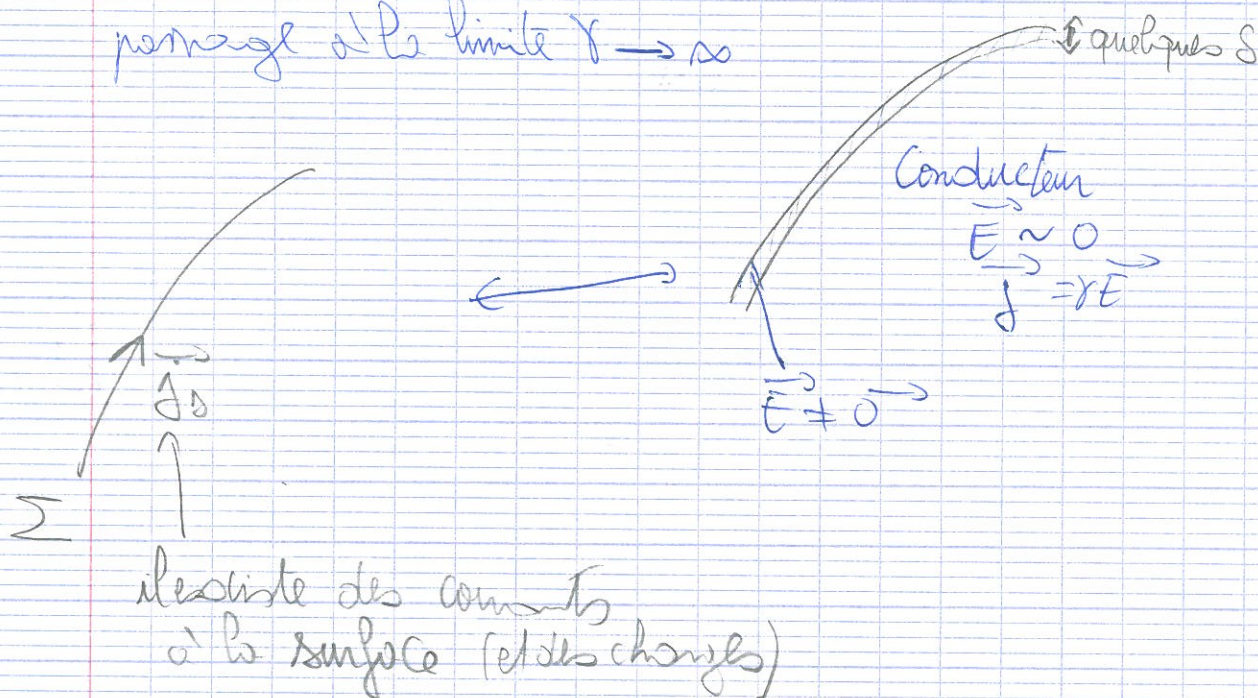
$$\delta \ll L$$

$$\delta \ll \text{rayon de courbure}$$

3) Comportement de la surface d'un conducteur parfait

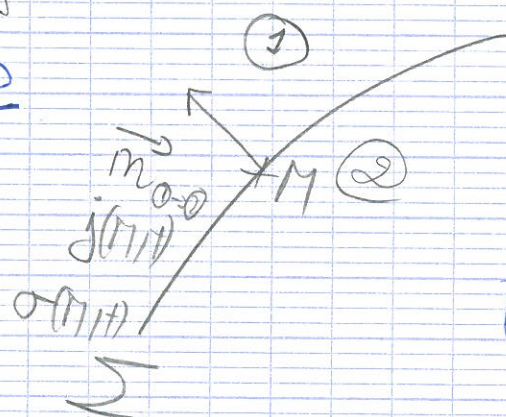
a- Courants et charges dans un conducteur parfait

passage à la limite $\gamma \rightarrow \infty$



b) Relations de passage en présence de charges et courants superficiels.

Admis



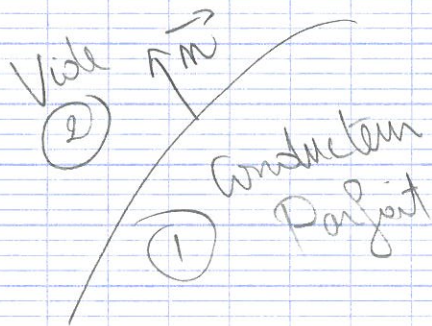
$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{E}_0 = \lim_{P \rightarrow M} \vec{E}(P)$$

longueur mini

Cas particulier: d'un conducteur parfait et vide



$$\vec{E}_2 = \vec{E} \text{ dans le vide à la frontière du conducteur} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \rightarrow \text{vide}$$

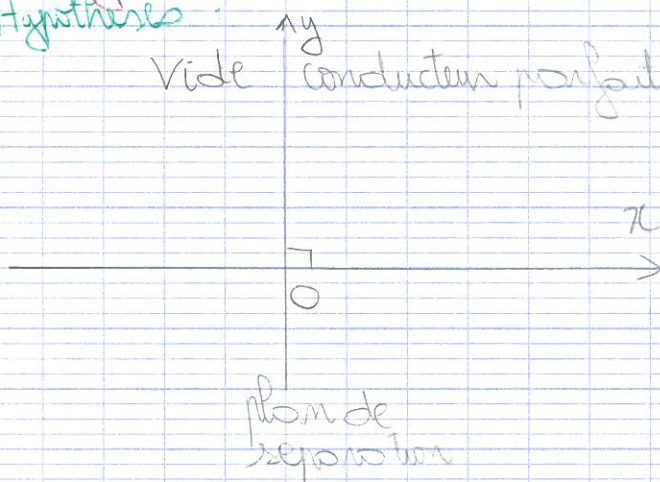
$$\rightarrow \vec{E}_{\text{tangential}} = \vec{0} \text{ dans le vide à la frontière du conducteur}$$

$$\vec{B} \text{ dans le vide à la frontière} = \mu_0 \vec{j} \wedge \vec{n} \rightarrow \text{vide}$$

$$\rightarrow \vec{B}_{\text{normale}} = 0$$

IV Réflexion d'une onde sur un conducteur parfait

1) Hypothèses



seule hyp. vraiment restrictive

④ Onde plane progressive incidente (incidence normale), polarisation rectiligne harmonique

2) Champ électromag dans le vide.

$$\vec{E}_i = \vec{u}_y E^0 \sin(\omega t - kx)$$

$$\vec{B}_i = \vec{u}_z \frac{E^0}{c} \sin(\omega t - kx)$$

↑ structure d'une onde plane progressive

$$\textcircled{2} z=0: \vec{E}_t = 0 \quad \forall (y, t)$$

$$\begin{cases} E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \quad \text{continuité de la composante tangentielle}$$

onde réfléchie pour vérifier la condition aux limites:

$$\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_{\text{vide}}$$

$$\vec{E}_r(z=0) = -\vec{u}_y E^0 \sin \omega t$$

$\neq 0 \quad \forall y, t \Rightarrow$ onde réfléchie harmonique avec même pulsation ω et même amplitude

$$\vec{E}_r = -E^0 \vec{u}_y \sin(\omega t + kx)$$

$$\vec{B}_r = -\frac{\mu_0}{c} \frac{\partial \vec{E}_r}{\partial t} = \vec{u}_y \frac{E^0}{c} \sin(\omega t + kx)$$

$$\vec{E}_{\text{vide}} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{u}_y E^0 (\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx))$$

$$= -2\vec{u}_y E^0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

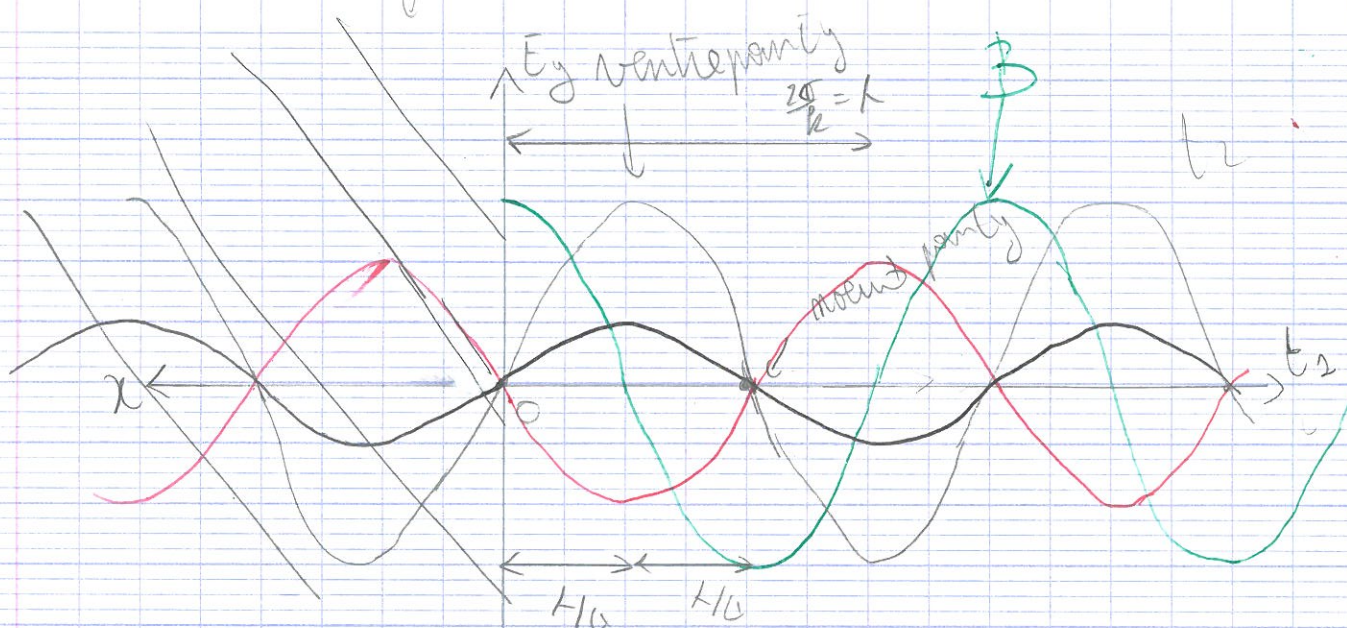
$$\vec{B}_{\text{vide}} = \vec{u}_y \frac{2E^0}{c} \sin \omega t \cos kx$$

RM: l'onde envoyée sur le conducteur provoque l'oscillation de charges à la surface qui rayonnent et créent un champ qui compense exactement le champ incident au conducteur ce qui fait que dans un conducteur que $\vec{E} = 0$, ~~$\vec{B} \neq 0$~~

3 Onde stationnaire dans le vide:

$\vec{E}_{\text{vide}}, \vec{B}_{\text{vide}} =$ onde stationnaire

conservation E.O.



alternance de nœuds et ventres séparés de $\lambda/2$

une onde stationnaire est obtenue par superposition de 2 ondes progressives harmoniques - sinus de ω opposés et de m amplitude - même μ

aspect énergétique:

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{L E^2}{\mu_0 c} \sin \omega t \sin \omega t$$

$\forall t \vec{\Pi} = \vec{0}$ pour les nœuds et les ventres des ondes stationnaires $\Rightarrow$ pas de transfert d'énergie

Pour des ondes progressives

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{L E^2}{\mu_0 c} \right\rangle_{\text{sur } \lambda/2} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ pas de transfert d'énergie en moyenne

D Comportement de la surface du conducteur

$$\vec{0} = \vec{E}_{\text{vide}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{m}_{\text{vide}} \Rightarrow \sigma = 0 \quad (\text{annulation due à la propagation dans le vide})$$

$$\vec{B}_{\text{vide}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{m}_{\text{vide}}$$

$$= \mu_0 \vec{m} \wedge \vec{j}_s = \vec{m}_y \frac{2E^0}{c} \sin \omega t$$

$$\text{sur la surface} \rightarrow \vec{j}_s = j_s \vec{m}_y \Rightarrow j_s = \frac{2E^0 \sin \omega t}{\mu_0 c}$$

Complément: admis: pour des courants superficiels, la

force subie en présence de champ électromagnétique vérifie

$$d\vec{F} = dS \vec{j}_s \wedge \left(\frac{\vec{B}_0 + \vec{B}_0}{2} \right)$$

force de Laplace dans le volume: $d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} dV$

~~$\vec{j}_s dS \wedge \vec{B}$~~
: $\vec{B}$ sur la surface non défini

$$\text{On a donc } d\vec{F} = dS \vec{j}_s \wedge \left(\frac{\vec{B}_0 + \vec{B}_0}{2} \right) = dS \vec{j}_s \wedge \frac{\vec{B}_{\text{vide}}}{2} (K=0)$$

$$= dS \frac{2E^0}{\mu_0 c} \sin \omega t \vec{m}_y \wedge \frac{1}{2} \vec{m}_y \frac{2E^0}{c} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{2E^0{}^2}{\mu_0 c^2} \sin^2 \omega t \vec{m}_y$$

$d\vec{F} //$ normale à l'axe de la surface $\Rightarrow$ pression

$$\left\langle \frac{dF}{dS} \right\rangle = \frac{E^0{}^2}{\mu_0 c^2} \rightarrow \text{pression de radiation}$$

onde incidente $\vec{E}_{incident} \vec{B}_{incident} \vec{\Pi}_{incident} = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0}$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_n \sin^2(\omega t - k_n)$$

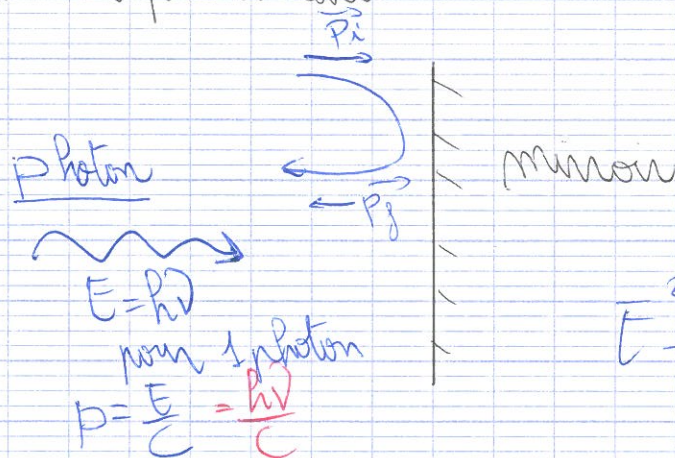
$\rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} =$ puissance surfacique moyenne de l'onde incidente

$\rightarrow \boxed{P_r = \frac{2}{c} P_{\text{surfacique incidente}}}$
pression de radiation

A.N: $P_{\text{surfacique}} \sim 1000 \text{ W m}^{-2}$

$P_r \approx 10^{-5} \text{ Pa} \sim 10^{-10} \text{ atm}$

interprétation corpusculaire



$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$\vec{p}_i = \frac{E}{c} \vec{u}_n \quad \vec{p}_f = -\frac{E}{c} \vec{u}_n$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -\frac{2E}{c} \vec{u}_n$$

$$\Delta \vec{p}_{\text{mirror}} = \frac{2E}{c} \vec{u}_n$$

n photons par unité de temps et de surface

$$dN_{\text{arrivant pendant } dt} = n dS dt$$

$$\rightarrow \Delta p_{\text{minori}} = \underbrace{n dS dt}_{\text{pendant } dt \text{ et sur } dS} \underbrace{2E}_{\text{car } p = E/c} \vec{u}_n$$

$$\rightarrow \frac{\Delta p_{\text{minori}}}{dt} = n dS \frac{2E}{c} \vec{u}_n$$

$$\rightarrow \vec{F}_{\text{exercée sur le miroir}} = n dS \frac{2E}{c} \vec{u}_n$$

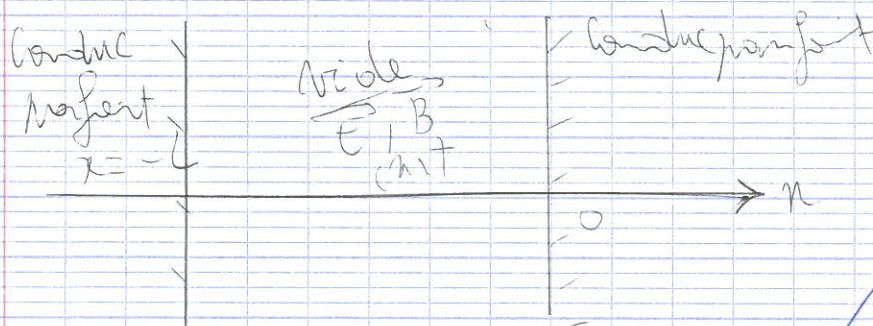
$$\rightarrow \vec{F}_{\text{exercée sur le miroir}} = \frac{2}{c} P_{\text{surface incidente}} dS \vec{u}_n$$

$$\rightarrow \frac{\vec{F}}{dS} = \frac{2}{c} P_{\text{surface}} \vec{u}_n$$

énergie apportée
 $\frac{dS}{dt}$
 $E_{\text{incidente}}$
 = puissance incidente
 surface

2 points de vue différents mais cohérents

3) Onde dans une cavité entre 2 plans (dimension 1)



$E_{\text{vide}}, B_{\text{vide}}$
 élastiques au pouton

$$\vec{E} = -2E_0 \sin(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(kx) \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

→ vérifiant les eq de maxw dans le vide et les conditions aux limites

Conducteur : $\vec{E}_t = 0$ | $x=0^- \rightarrow 0^+$
 $x=L^- \rightarrow 0^+$

$B_n = 0$ | $x=0^- \rightarrow 0^+$
 $x=L^- \rightarrow 0^+$

if faut que $\omega L = p\pi$
 $\Rightarrow \omega = \frac{p\pi}{L} c$

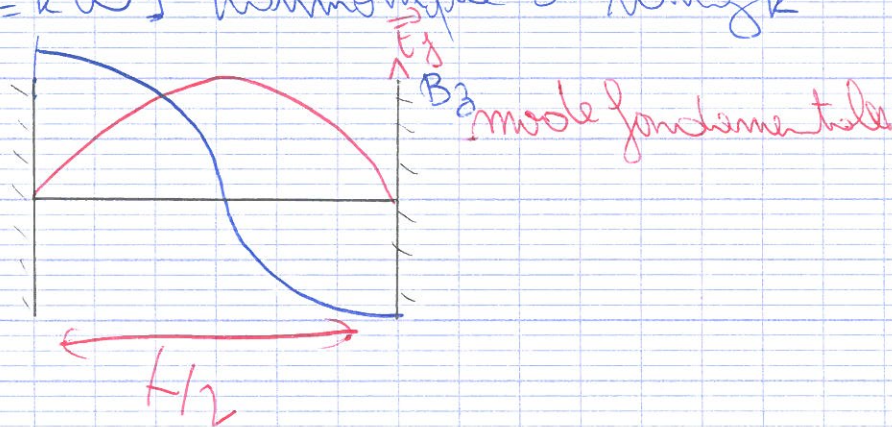
on a une onde stationnaire
 au chapitre
 $\omega = \frac{p\pi}{L} c$

→ Quantification des valeurs possibles de la pulsation

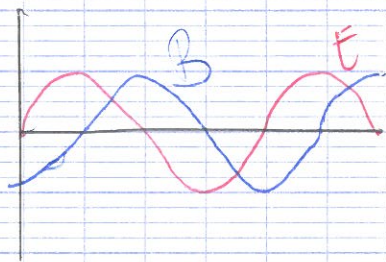
ω fixée $= m\omega_1 \rightarrow$ mode propre de la cavité de dimension 1 $x \in]-L, 0[$

ω_1 : mode fondamental

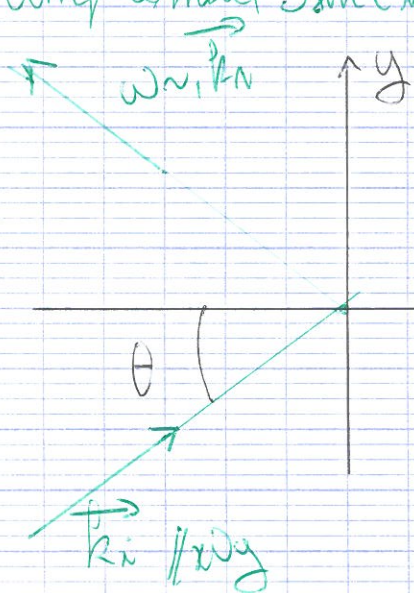
$\omega_k = k\omega_1$ harmonique de rang k



mode 3



⑥ Complément sur l'incidence oblique.



$$\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k \cos \theta \\ k \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde réfléchie plane k_r, ω_r

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$x=0^- \quad \forall y, \forall z \quad \vec{E}_i + \vec{E}_r = 0$$

$$A e^{i\omega t} + B e^{i\omega t} = 0 \quad \forall t$$

$$\hookrightarrow \omega = \omega_r, \quad \begin{cases} k_{iy} = k \sin \theta \\ k_{iz} = 0 \end{cases}$$

loi de Snell


$$\rightarrow \|k_n\| = \frac{\omega n}{c} = \frac{\omega}{c}$$

$$\sin \theta_n = \frac{k_{ny}}{\|k_n\|} = \frac{k \sin \theta}{\omega/c} = \sin \theta : \text{loi de desuents confirmée}$$

On a démontré la loi de desuents pour
une surface plane avec des arguments
électromagnétiques