Polytechnique PC 2005 Physique 1

Anneau de stockage pour molécules polaires

I Hexapôle électrostatique

1.a) L'invariance par translation entraîne que ni $\vec{E}$ ni V ne dépendent de z.

1.b) La symétrie par rapport à tout plan parallèle à Oz entraîne que E_z est nul.

1.c) Sur un plan de symétrie, $\vec{E}$ est parallèle au plan. Dans les plans contenant 2 électrodes opposées, E_θ est nul.

1.d) Les plans étudiés sont plans d'antisymétrie des charges donc de $\vec{E}$. En tout point d'un tel plan $\vec{E}$ est orthogonal au plan donc les lignes de champ aussi. Ces plans sont donc équipotentiels.

1.e) Le système est invariant par rotation d'angle $2\pi/3$. A r fixé, le potentiel est donc une fonction de θ périodique, de période $2\pi/3$. Cette fonction est paire à cause de la symétrie par rapport au plan C_1 C_4. Alors :

$$\boxed{V(r,\theta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r)\cos(3n\theta)}$$

2. Par utilisation des symétries puis application du théorème de Gauss $\vec{E}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 D}\vec{e_r}$ puis $\boxed{V=-\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{D}{a}\right)}$

3. Par superposition $V=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{D_2D_4D_6}{D_1D_3D_5}\right)$. ($V$ est bien nul en O).

4. $D_1=|\underline{Z}-R|$ $\quad D_3=|\underline{Z}-jR|$ $\quad D_5=|\underline{Z}-j^2R|$ donc $D_1D_3D_5=|(\underline{Z}-R)(\underline{Z}-jR)(\underline{Z}-j^2R)|$ Le polynôme en $\underline{Z}$ dont on prend le module a pour racines les trois racines cubiques de R^3. C'est donc le polynôme $\underline{Z}^3-R^3$. De même pour le produit $D_2D_4D_6$ avec les racines cubiques de $-R^3$. Donc $\dfrac{D_2D_4D_6}{D_1D_3D_5}=\dfrac{|\underline{Z}^3+R^3|}{|\underline{Z}^3-R^3|}$.

5. $R^3+\underline{Z}^3=R^3+r^3\cos3\theta+i\,r^3\sin3\theta$ dont le carré du module vaut $R^6+2r^3R^3\cos3\theta+r^6$ c'est-à-dire $R^6\left[1+2\left(\dfrac{r}{R}\right)^3\cos3\theta+\left(\dfrac{r}{R}\right)^6\right]$. En ne gardant que les termes d'ordre au plus 3, $V=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+2(r/R)^3\cos3\theta}{1-2(r/R)^3\cos3\theta}$

d'où $\boxed{V(r,\theta,z)=\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3\cos3\theta}$ qui est bien de la forme prévue au **1.e)**, est bien extrémal par rapport à θ pour $\theta=k\pi/3$ (question **1.c**) et nul (donc constant) pour $\theta=\pi/6+k\pi/3$ (question **1.d**).

6. Sur C_1 par exemple, $D_1=a$, $D_3=D_5=R\sqrt{3}$, $D_2=D_6=R$, $D_4=2R$ donc $\boxed{V_0=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2R}{3a}}$. Par antisymétrie par rapport au plan $\theta=\pi/6$, le potentiel vaut $-V_0$ sur les électrodes paires.

7. La capacité par unité de longueur est $\dfrac{Q_{\text{lineique}}}{V_0-(-V_0)}=\dfrac{3\lambda}{2V_0}$ donc $\boxed{C=\dfrac{3\pi\varepsilon_0}{\ln(2R/3a)}}$. Alors $V=\dfrac{2CV_0}{3\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3\cos3\theta$.

8. $\boxed{C=4{,}40\,10^{-11}\,\text{F.m}^{-1}}$. Valeur très faible caractéristique d'un condensateur à armatures éloignées.

II. Mouvement de molécules polaires dans un hexapôle électrostatique.

1. $\boxed{E_p=-\vec{d}.\vec{E}=-d_{\text{eff}}|\vec{E}|}$

2. $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}\,V=-\dfrac{3\lambda}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{R^3}\left(\cos3\theta\vec{e_r}-\sin3\theta\vec{e_\theta}\right)$ donc $E_p=-d_{\text{eff}}\dfrac{3\lambda}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{R^3}$ et $\vec{F}=-\overrightarrow{grad}\,E_p=d_{\text{eff}}\dfrac{6\lambda}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}\vec{e_r}$.

3. La troisième loi de Newton s'écrit $m\vec{a}=-Kr\vec{e_r}$ avec $\boxed{K=-\dfrac{6\lambda d_{\text{eff}}}{\pi\varepsilon_0R^3}}$. Le mouvement est périodique (du moins en ce qui concerne sa projection sur xOy) si K est positif donc si d_{eff} est négatif. $\omega_0=\sqrt{\dfrac{K}{m}}=\sqrt{\dfrac{6\lambda|d_{\text{eff}}|}{\pi\varepsilon_0R^3m}}$. On peut aussi écrire $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{4CV_0|d_{\text{eff}}|}{\pi\varepsilon_0 R^3 m}} = \sqrt{\dfrac{12V_0|d_{\text{eff}}|}{mR^3\ln(2R/3a)}}$. Si d_{eff} a le signe contraire, la position $x = y = 0$ est instable. Les molécules s'éloignent exponentiellement.

4. Il n'y a pas de force selon Oz donc $\boxed{z = z_0 + v_{0z}t}$. Avec les conditions initiales, $\boxed{x = \dfrac{v_{0x}}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$ et $\boxed{y = \dfrac{v_{0y}}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$.

5. Les molécules recoupent l'axe Oz pour la première fois lorsque $\omega_0 t$ vaut π donc à $t = \pi/\omega_0$ et elles ont parcouru une distance $v_{0z}\pi/\omega_0$ le long de l'axe. Comme ω_0 dépend de d_{eff}, il y a bien une sélection selon d_{eff}.

6. La vitesse la plus probable est celle qui rend maximal dN/dv. Un calcul de dérivée par rapport à v montre que $\boxed{v_{\text{probable}} = \sqrt{\dfrac{3k_B T}{m}}}$ qui est aussi la vitesse quadratique moyenne dans l'enceinte $\dfrac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \dfrac{3}{2}k_B T$.

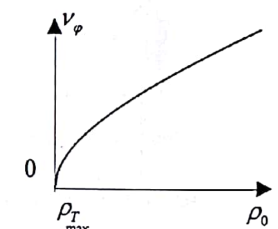
7.a) $\boxed{\omega_0 = 1{,}04\,10^3 \text{ rad.s}^{-1}}$ b) Les molécules sont focalisées en $\boxed{v_{\text{probable}}\pi/\omega_0 = 0{,}97 \text{ m}}$.

III. Un anneau de stockage pour les molécules polaires.

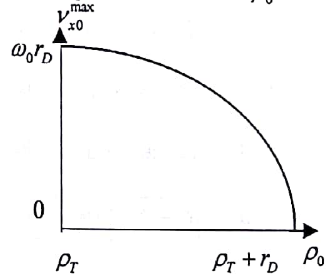
1. Le vecteur $\vec{r}$ de la question **II.2.** est à remplacer par le vecteur du plan méridien qui relie le centre de l'hexagone O' au point où est le dipôle. On remplace donc $\vec{r}$ par $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \rho\vec{e_\rho} + x\vec{e_x} - \rho_T\vec{e_\rho}$. Alors, en coordonnées cylindriques : $m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) = -K\left(\rho - \rho_T\right)$ $\quad m\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right) = 0 \quad m\ddot{x} = -Kx$.

2. Le moment en O de la force est $\vec{\Gamma} = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} = -K\left(\rho\vec{e_\rho} + x\vec{e_x}\right)\wedge\left((\rho-\rho_T)\vec{e_\rho} + x\vec{e_x}\right)$ dont la composante sur Ox est nulle. D'après le théorème du moment cinétique, L_x est alors conservé au cours du mouvement. $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\left(\dfrac{1}{2}K\left((\rho-\rho_T)^2 + x^2\right)\right)$ donc l'énergie $\boxed{E = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2\right) + \dfrac{1}{2}K\left((\rho-\rho_T)^2 + x^2\right)}$ est conservée. Or, d'après l'équation du mouvement projetée sur Ox, $E_x = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}Kx^2$ est conservée donc la différence

$E_{\rho,\varphi} = E - E_x = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + \dfrac{1}{2}K\left(\rho - \rho_T\right)^2$ est également conservée.



3. Pour une trajectoire circulaire, la conservation de $E_{\rho,\varphi}$ montre que $\dot{\varphi}$ est constant : le mouvement est uniforme. L'accélération est alors normale. Elle vaut v_φ^2/ρ et la troisième loi de Newton projetée sur $\vec{e_\rho}$ s'écrit $mv_\varphi^2/\rho_0 = K\left(\rho_0 - \rho_T\right)$ donc a) $\boxed{\rho_0 > \rho_T}$ (dans un référentiel lié à la particule, une force centrifuge l'éloigne de l'axe) et b) $\boxed{v_\varphi = \omega_0\sqrt{\rho_0\left(\rho_0 - \rho_T\right)}}$. c) v_φ est fonction croissante de ρ_0. Sa valeur maximale, atteinte pour $\rho_0 = \rho_T + r_D$ vaut $\boxed{v_\varphi^{\max} = \omega_0\sqrt{(\rho_T + r_D)r_D} = 36{,}8 \text{ m.s}^{-1}}$.



4.a) L'équation $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ a pour solution $x = \dfrac{v_{x0}}{\omega_0}\sin\omega_0 t$.

4.b) L'amplitude du mouvement en x ne dépasse par r_D si $v_{x0} < \omega_0 r_D$. L'amplitude doit même ne pas dépasser $x_{\max}\left(\rho_0\right) = \sqrt{r_D^2 - (\rho_0 - \rho_T)^2}$ donc $\boxed{v_{x0} \le \omega_0 x_{\max} < \omega_0 r_D = 2{,}59 \text{ m.s}^{-1}}$

5.a) La conservation de L_x montre que $\rho^2\dot{\varphi} = C = \rho_T v_{\varphi 0}$. $E_{\rho,\varphi}$ est alors de la forme demandée avec $U_{\text{eff}} = \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{\rho^2} + \dfrac{1}{2}K\left(\rho - \rho_T\right)^2$. b) ρ oscille entre les deux racines de l'équation $U_{\text{eff}} = E_{\rho,\varphi}$ c) Il reste inférieur à $\rho_T + r_D$ si $U_{\text{eff}}\left(\rho_T + r_D\right) > E_{\rho,\varphi} = U_{\text{eff}}\left(\rho_T\right) + mv_{\varphi 0}^2/2$. Après calcul on obtient alors la condition $v_{\rho 0}^2 < \dfrac{\rho_T^2 v_{\varphi 0}^2}{(\rho_T + r_D)^2} - v_{\varphi 0}^2 + \omega_0^2 r_D^2$ donc $v_{\rho 0}^{\max} = \sqrt{\omega_0^2 r_D^2 - v_{\varphi 0}^2\dfrac{2\rho_T r_D + r_D^2}{(\rho_T + r_D)^2}}$ ce qui n'a de sens que si :

$$\boxed{v_{\varphi 0} < \frac{\omega_0 r_D(\rho_T + r_D)}{\sqrt{2\rho_T r_D + r_D^2}} \approx \frac{\omega_0\sqrt{r_D\rho_T}}{\sqrt{2}} = 26{,}0 \text{ m.s}^{-1}}$$

6. Le diaphragme sélectionne des particules focalisées près de son centre donc ayant toutes à peu près les mêmes valeurs de d_{eff} et de la vitesse tangentielle. Seules les particules de vitesse faible (voir **III.5.c**) seront stockées. La probabilité est donnée par la loi du **II.6**.