ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2015 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR – (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

RALENTISSEMENTS et FREINAGES

Les deux parties de ce problème sont indépendantes ; on les traitera dans l'ordre de son choix.

1 Partie I : Marées et synchronisations d'oscillateurs

Les forces gravitationnelles s'exerçant entre deux corps célestes en mouvement sont à l'origine d'*effets de marée*, analogues aux marées océaniques : les effets inertiels et les forces de gravitation s'exerçant sur un corps sont variables d'un point à un autre et la force de marée est le bilan des écarts entre ces différentes forces. Dans cette étude, on négligera, en raison de leur faible importance, les effets inertiels associés aux rotations propres des divers corps. Un objet - par exemple la Lune - réputé homogène, sphérique, de masse $2m$, de centre O et de rayon R_L est en orbite circulaire de rayon $d \gg R_L$ autour d'un objet ponctuel (T) - par exemple la Terre - réputé fixe et de masse M. Pour simplifier l'étude, le satellite (Figure 1a) est décomposé par la pensée en deux hémisphères identiques (Figure 1b), modélisés chacun par son centre de masse, situé sur l'axe de l'hémisphère à la distance $b = \frac{3}{8}R_L$ de O et portant la masse m. Le système Terre - Lune sera considéré comme isolé ; par symétrie, il pourra être traité comme un système plan. Le référentiel d'étude de la Figure 1c, Oxy, est en translation circulaire autour de (T) : les axes gardent des directions fixes par rapport aux étoiles lointaines et la vitesse angulaire de révolution Ω_r est constante, $\Omega_r = \sqrt{\frac{GM}{d^3}}$.

- On trouvera page 4 les données numériques nécessaires.

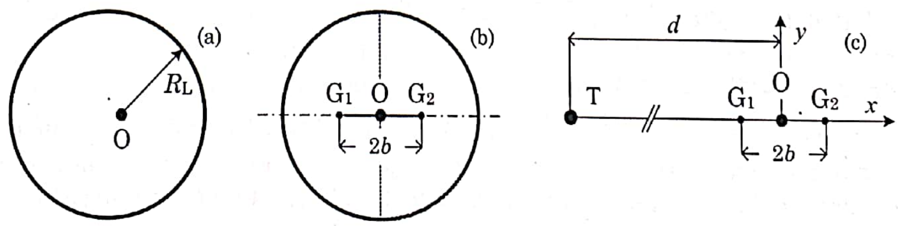


FIGURE *1 – Le satellite en* (a) *est modélisé en* (b) *par deux points massiques situés aux centres de masse respectifs,* G_1 *et* G_2*, de deux hémisphères. La situation initiale est représentée en* (c).

1.1 Étude qualitative

1.1.1 Cas statique

1. La force totale subie par le satellite est développable en série de $\frac{R_L}{d}$; le terme d'ordre zéro correspond au modèle ponctuel : masse $2m$ localisée en O. Les termes suivants correspondent aux effets de marée. La configuration initiale étant représentée à la figure 1(c), déterminer, au premier ordre en $\frac{b}{d}$, l'expression de la force subie par G_1 de la part de la Terre.

2. En considérant les forces gravitationnelles subies par G_1, montrer qu'il existe une limite d_m à d, en deçà de laquelle le satellite se brise (limite de Roche).

3. Calculer d_m pour le système Terre-Lune. Le résultat pourrait-il inciter à penser que la Lune s'est détachée de la Terre, ou au contraire montrer que cette hypothèse est peu plausible ?

1.1.2 Déformation de la planète pendant sa révolution

Le satellite est constitué d'un noyau rigide entouré d'un manteau déformable qui peut glisser avec frottement sur ce noyau. Un point P de la surface du satellite, de masse m', est repéré dans le plan Oxy par OP $= r$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = \theta$ (Figure 2).

4. Montrer que, au premier ordre en r/d, la force de marée en P, appelée *force de marée interne*, s'exprime par $\overrightarrow{F} = \frac{GMm'}{d^3}(2r\hat{x}\cos\theta - r\hat{y}\sin\theta)$, où $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont les vecteurs unitaires portés respectivement par Ox et Oy.

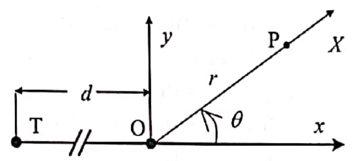


FIGURE 2 – *Notations pour l'effet de marée ; seuls les centres des planètes ont été représentés.*

5. Indiquer sur un schéma le sens des forces de marée en P et en P′, diamétralement opposé à P. On notera $\hat{r}$ le vecteur unitaire porté par OP. Expliquer l'apparition d'un « bourrelet » à la surface du satellite et déterminer qualitativement la forme d'équilibre du satellite à deux instants différents de la révolution orbitale. Quelle est la conséquence de cette déformation sur son mouvement ?

2 Synchronisation des périodes

2.1 Considérations énergétiques

6. Si l'orbite lunaire était circulaire avec son axe de rotation perpendiculaire au plan de révolution, on observerait de la Terre, à la même heure, toujours la même surface lunaire ; en réalité, 59% de la surface de la Lune peut être observée depuis la Terre. Comment cela se peut-il ?

Le centre de masse du système isolé Terre - Lune est noté G ; on note $\mu = \frac{2Mm}{M+2m}$ sa masse réduite et l'on rappelle la relation $M\,(\mathrm{GT})^2 + (2m)\,(\mathrm{GO})^2 = \mu\, d^2$. On conviendra que, dans le référentiel galiléen barycentrique, la planète et le satellite décrivent des cercles centrés sur G, avec la même vitesse angulaire $\Omega(t)$. La période de rotation propre de la Terre est d'environ 86 400 s ; la vitesse angulaire correspondante est notée $\omega(t)$; la période de rotation de la Lune est de vingt-sept jours, on note $\Omega(t)$ la vitesse angulaire correspondante : les vitesses angulaires de rotation et de révolution de la Lune sont, à chaque instant, quasiment identiques ; on admet que les vecteurs rotation $\vec{\omega}$ et $\vec{\Omega}$ sont colinéaires et de même sens (voir Figure 3) ; la grandeur d peut elle aussi dépendre du temps.

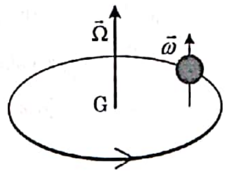


FIGURE *3 – Schématisations de la rotation et de la révolution de la Terre*

7. Établir l'expression de l'énergie cinétique de révolution du système Terre - Lune.

8. Admettant que l'énergie cinétique de rotation d'une boule de rayon r' et de masse m', en rotation (ω') autour d'un axe de direction fixe passant par son centre, est $E_c = \frac{1}{5} m' \, r'^2 \, \omega'^2$, montrer que, avec une approximation que l'on précisera, l'énergie cinétique du système Terre - Lune est $E_c \approx \frac{1}{5} M \, R^2 \, \omega^2 + \frac{1}{2} \mu \, d^2 \, \Omega^2$.

9. Montrer que, avec la même approximation, la norme du moment cinétique barycentrique du système est $\sigma_G \approx \mu \, d^2 \, \Omega + \frac{2}{5} M \, R^2 \, \omega$. Donner, à l'ordre 0 en $\frac{b}{d}$, l'énergie mécanique du système.

10. Considérant l'équilibre des forces s'exerçant sur la Terre et sur la Lune, établir la relation liant d, Ω, M et m (on obtient une relation ressemblant à une loi de Kepler). En déduire le lien entre les petites variations relatives $\frac{\delta \Omega}{\Omega}$ et $\frac{\delta d}{d}$.

11. Considérant à présent le moment cinétique barycentrique du système isolé Terre - Lune, établir le lien entre les petites variations $\delta\omega$ et δd et en déduire l'expression de $\frac{\delta\omega}{\delta\Omega}$ en fonction de m, M, d et R. La valeur numérique de ce rapport est 35, 6.

12. Déduire des considérations précédentes que l'expression de la petite variation d'énergie mécanique associée à une petite variation de ω est $\mathrm{d}E = \frac{2}{5} M \, (\omega - \Omega) \, R^2 \, \delta \omega$.

2.1.1 Stabilité du système Terre - Lune

Le frottement associé aux marées dissipe de l'énergie. La Lune s'éloigne de la Terre à raison de 3 à 4 cm par an. L'étude des anneaux de croissance de coraux fossiles montre qu'il y a 500 millions d'années la durée du jour était de 21 heures.

13. Quels sont les signes, aujourd'hui, de $\delta\omega, \delta\Omega$ et δd ? Quelle sera la durée du jour dans un siècle ?

14. Le résultat calculé à la question **13** est-il en accord avec les données du préambule de ce paragraphe 2.1.1 ? L'intervalle de temps séparant deux nouvelles lunes (lunaison) augmente-t-il ou diminue-t-il ? Sa variation est-elle plus rapide ou plus lente que celle de la durée du jour ?

15. Montrer que la dissipation d'énergie finit par ne plus avoir lieu. Calculer la durée du jour et la distance Terre - Lune au terme du processus de dissipation.

16. Estimer la durée du processus de synchronisation et la comparer à l'âge de l'Univers, soit environ 10^{10} années.

17. Calculer E_{DM}, énergie dissipée par effet de marée entre la période actuelle et la fin du processus. Le Soleil dissipe 4×10^{26} W ; combien de secondes lui faudrait-il pour dissiper E_{DM} ?

Quelques symboles et données numériques relatifs à la première partie

Symbole et valeur	Sens et occurrence
$d = 380 \times 10^6$ m	Distance Terre - Lune
$G = 6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$	Constante de la gravitation
$M = 6 \times 10^{24}$ kg	Masse de la Terre
$2m = \dfrac{M}{81}$	Masse de la Lune
$R_L = 1750 \times 10^3$ m	Rayon de la Lune
$R = 6400 \times 10^3$ m	Rayon de la Terre

3 Partie II : Freinage sur un pont

Le pont présenté dans la Figure 4 comprend trois travées (parties du pont comprises entre deux piles successives). Afin d'atténuer les contraintes créées par le blocage des mouvements saisonniers de dilatation thermique, chaque travée est posée sur des appuis à élastomère, « matériau macromoléculaire qui reprend sa forme et sa dimension initiale après avoir subi une importante déformation sous l'effet d'une faible variation de contrainte » (Norme NF EN 1337-3, § 3.1). Chaque bloc en élastomère vulcanisé, renforcé intérieurement par des frettes en acier, est modélisé par une raideur k selon l'axe longitudinal du pont et correspondant à la raideur de cisaillement de l'appui. Ces appuis bloquent le déplacement vertical ; leur rigidité en rotation est négligeable. On s'intéresse au comportement dynamique dans la direction longitudinale du pont, dont un modèle simplifié est présenté sur la partie droite de la Figure 4 : les trois tabliers rigides, de masse identique m, sont reliés par des ressorts de raideur k. Les piles sur lesquelles sont posés les appuis (sauf ceux aux deux extrémités) sont modélisées par des ressorts de masse négligée et de raideur k_0.

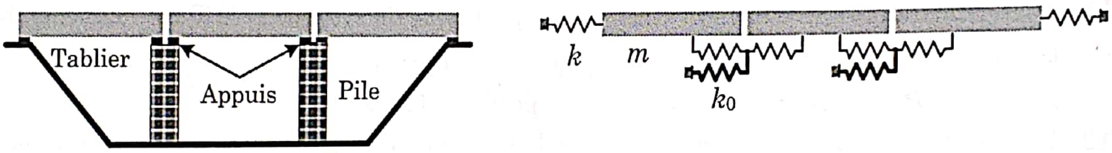


FIGURE 4 – *Pont à trois travées. À gauche, schéma du pont réel (non à l'échelle) ; le* tablier *est la structure qui supporte les charges et les transmet aux appuis ou aux éléments de suspension. À droite modélisation pour la réponse longitudinale. Les trois masses sont identiques. La raideur des ressorts en traits fins est notée k et celle des autres ressorts, en traits gras, est notée k_0.*

3.1 Influence des variations de température sur un ouvrage d'art

Le pont considéré ici est constitué principalement de béton armé, qui est un matériau composite (Figure 5). On s'intéresse ici au comportement statique d'un tel ouvrage, sous l'influence de variations thermiques, dont l'amplitude est donnée dans le tableau 1 ci-après.

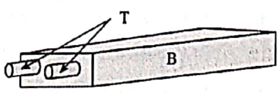


FIGURE 5 – *Le béton armé est constitué de béton **B** précontraint par des tiges d'acier **T**.*

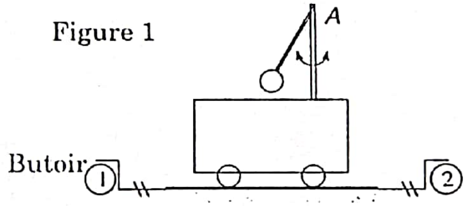
Épreuve : PHYSIQUE I

Problème I -

Les correcteurs attacheront la plus grande importance à la clarté et à la pertinence des explications fournies.

Au palais de la Découverte à Paris vous pouvez observer, grâce à des réalisations originales, différents phénomènes physiques. L'une d'entre elles se présente sous la forme suivante :

Figure 1



Un chariot sur lequel est fixé un pendule pesant peut rouler en ligne droite sur quelques mètres entre deux butoirs (Figure 1).

Le public est invité à écarter le pendule de la position d'équilibre soit lorsque le chariot n'est pas encore en contact avec les butoirs, soit lorsqu'il est contre le butoir. Les mouvements ultérieurs du chariot sont intéressants à étudier. On considèrera le référentiel terrestre R comme galiléen .

I.A - Le chariot est supposé immobile. Étude du pendule pesant

Ce pendule est composé d'une tige homogène de masse m, de longueur $2l$ de dimensions transversales négligeables devant l et d'un disque homogène de masse M et de rayon r.

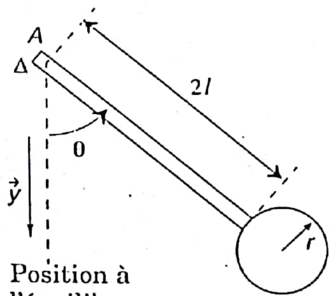


Figure 2

I.A.1) Donner l'expression de d distance de A point d'articulation au centre d'inertie G du système.

On utilisera le paramètre d dans toute la suite de ce problème.

I.A.2) Les liaisons au niveau de l'axe étant supposées parfaites (on précisera la signification de ce terme), établir l'équation différentielle du mouvement en négligeant toutes les forces de frottement. On désignera par J_Δ le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe Δ passant par A et perpendiculaire au plan de la figure.

I.A.3) Intégrer cette équation dans le cas des très petites oscillations ($\sin\theta \cong \theta$) et donner l'expression de la période T_0 du mouvement.

I.B - Étude du mouvement du chariot

Dans les questions I.B. on considérera que le chariot de masse M est posé directement sur le sol (sans roue) et qu'il n'y a pas de frottement entre celui-ci et le sol (type coussin à air). Le pendule pourra être considéré comme un pendule simple de masse m et de longueur l dans toute la suite de ce problème. On négligera tous les types de frottements.

I.B.1)

a) On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 (compris entre $-\pi/2$ et 0 : cf figure 3) alors que le chariot est loin des butoirs et on lâche $B(m)$, (Figure 3), sans communiquer au système de vitesse initiale. Établir la relation entre $\dot{x}$ vitesse du chariot et $\dot{\theta}$ vitesse angulaire de $B(m)$.

On pourra poser $\alpha = \dfrac{m}{m+M}$.

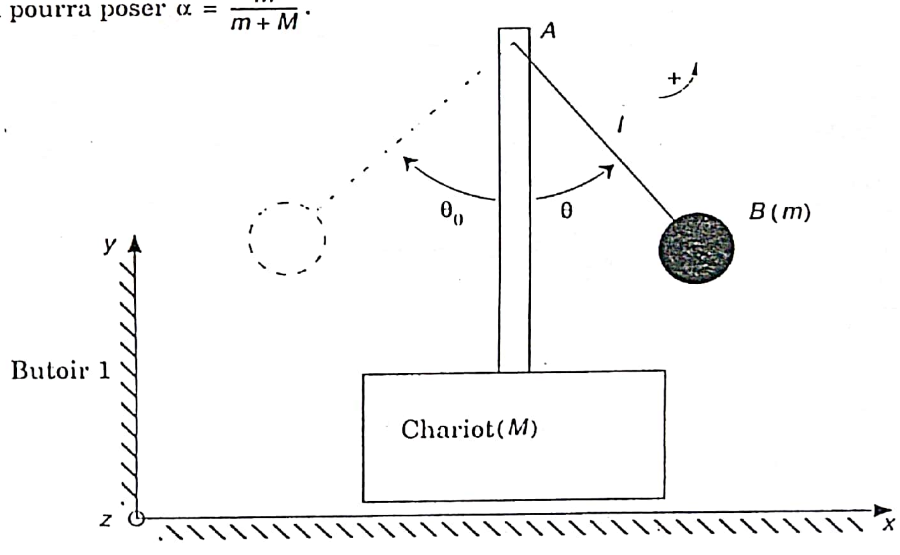


Figure 3

b) Décrire qualitativement le mouvement du chariot en fonction de la position de B.

c) On procède de même qu'en a) cependant le chariot est contre le butoir n°1. À partir de quel instant le système est-il pseudo-isolé (en ce qui concerne le mouvement horizontal) ? À ce même instant, quelle est la différence entre cette situation et celle étudiée en a) ? En déduire la nouvelle relation entre $\dot{x}$ et $\dot{\theta}$.
On note Ω_0 la valeur de $|\dot{\theta}|$ pour $\theta = 0$.

d) En déduire alors qualitativement l'allure du mouvement du chariot.

Dans toute la suite, on suppose que le chariot n'est plus jamais en contact avec les butoirs.

I.B.2) Établissement de l'équation différentielle

La question suivante est à traiter par application au pendule simple B de la loi de la quantité de mouvement ou de la loi du moment cinétique.

a) Établir l'équation du mouvement (équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par $\theta(t)$). On utilisera la relation établie en I.B.1) pour exprimer $\ddot{x}$ en fonction de $\ddot{\theta}$.

b) Simplifier cette équation en ne considérant que les très petites oscillations.

c) Résoudre cette équation puis déterminer la loi d'évolution de $x(t)$.

I.B.3) Étude énergétique

a) Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble chariot + pendule dans R. Eliminer $\dot{x}$ de l'équation en utilisant la relation établie au I.B.1)

b) Donner l'expression de l'énergie potentielle de l'ensemble.

c) Déduire l'équation différentielle du second ordre du mouvement.

École Polytechnique Concours 2015 Filière MP Physique et sciences de l'ingénieur

Partie I : Marées et synchronisation d'oscillateurs

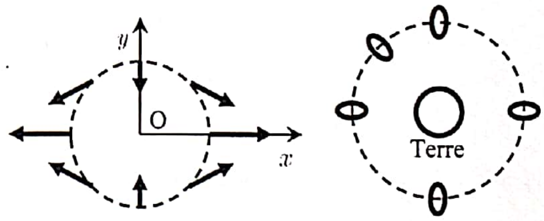
1. La force gravitationnelle, dans la position de la figure **1(c)** est $-\dfrac{GmM}{(d-b)^2}\vec{u}_x \approx -\dfrac{GmM}{d^2}\left(1+2\dfrac{b}{d}\right)\vec{u}_x$. La force d'inertie d'entraînement est (translation du référentiel Oxy) $-m\vec{a}_e(\mathrm{G}_1) = -m\vec{a}_a(\mathrm{O}) = m\Omega_r^2 d\vec{u}_x = \dfrac{GmM}{d^2}\vec{u}_x$. La force totale subie par G_1, due à la présence de la Terre est donc $-2\dfrac{GmM}{d^2}\dfrac{b}{d}\vec{u}_x$.

2. La force attractive exercée par l'autre hémisphère est modélisée par $\dfrac{Gm^2}{(2b)^2}\vec{u}_x$. Le satellite ne reste intact que si elle l'emporte sur la force totale due à la Terre donc si $\dfrac{Gm^2}{(2b)^2} \geq 2\dfrac{GmM}{d^2}\dfrac{b}{d}$ c'est-à-dire $d^3 \geq 8b^3\dfrac{M}{m}$. Le satellite se brise si $d < d_m = 2b\sqrt[3]{\dfrac{M}{m}}$.

3. **AN.** $d_m = \dfrac{3}{4}R_L\sqrt[3]{\dfrac{M}{m}} = 7150\ \mathrm{km}$. Cette valeur, proche du rayon terrestre ne permet pas de conclure de façon catégorique. Si on avait trouvé d_m franchement plus grand que le rayon terrestre, on aurait pu dire que le détachement de la Lune, en bloc, n'était pas possible, la Lune se brisant avant d'atteindre d_m. Ici, la Lune juste détachée serait déjà à $d = 6400 + 1750 = 8150\ \mathrm{km}$ donc au-delà de d_m et resterait donc entière. Mais, au moment de ce détachement, les modèles sphériques pour la Terre et la Lune sont certainement beaucoup trop grossiers.

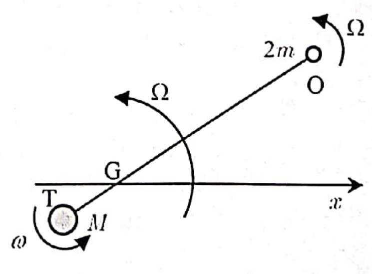
4. À l'ordre 1, $\mathrm{TP}^{-3} = \left((d\vec{u}_x + r\vec{u}_r)^2\right)^{-3/2} = \left(d^2 + 2rd\cos\theta + d^2\right)^{-3/2} \approx \dfrac{1}{d^3}\left(1+2\dfrac{r}{d}\cos\theta\right)^{-3/2} \approx \dfrac{1}{d^3}\left(1-3\dfrac{r}{d}\cos\theta\right)$. La force de gravitation terrestre vaut $-\dfrac{GMm'}{\mathrm{TP}^3}\overrightarrow{\mathrm{TP}} \approx -\dfrac{GMm'}{d^3}\left(1-3\dfrac{r}{d}\cos\theta\right)(d\vec{u}_x + r\vec{u}_r) \approx -\dfrac{GMm'}{d^2}\left(\vec{u}_x - 3\dfrac{r}{d}\cos\theta\vec{u}_x + \dfrac{r}{d}\vec{u}_r\right)$. La force d'inertie vaut, comme en 1, $\dfrac{Gm'M}{d^2}\vec{u}_x$ et la somme des deux vaut donc $\dfrac{GMm'}{d^2}\left(3\dfrac{r}{d}\cos\theta\vec{u}_x - \dfrac{r}{d}\vec{u}_r\right)$. Avec $\vec{u}_r = \cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y$, $\vec{F} = \dfrac{GMm'}{d^3}(2r\cos\theta\vec{u}_x - r\sin\theta\vec{u}_y)$.

5. Le dessin des forces (flèches en traits épais) montre une tendance à l'extension selon l'axe Ox et à la contraction selon Oy (et aussi Oz par symétrie de révolution autour de Ox). Le manteau (déformable) du satellite a tendance à prendre une forme « ballon de rugby », une « pointe » vers la Terre. Le mouvement avec frottement du manteau est responsable de pertes d'énergie mécanique.



6. Si l'orbite n'est pas circulaire, le mouvement de la Lune, assimilée à un point est elliptique. Il suit la loi des aires $r^2\dot{\phi} = C$ donc, si r varie, $\dot{\phi}$ doit, lui aussi, varier. La vitesse angulaire orbitale ne reste plus identique à la vitesse angulaire de rotation propre. Ce décalage angulaire permet de voir un peu plus que la « moitié visible » de la surface lunaire. De plus, si l'axe de rotation propre (axe polaire) n'est pas parallèle à l'axe de révolution, les voisinages des pôles deviennent visibles pendant une partie de la révolution.

7. Si on ne tient compte que de la « révolution », cela signifie qu'on assimile la Terre et la Lune à des points. Les distances GT, GO et TO étant constantes, le système est un solide en rotation autour de $Gz \perp OGx$. Son énergie cinétique est donc $\dfrac{1}{2}J\Omega^2$ où J est le moment d'inertie qui, par la relation aimablement fournie par l'énoncé, vaut μd^2. $E_{c\ \text{rév}} = \dfrac{1}{2}\mu d^2\Omega^2$.



8. Il convient (théorème de Koenig) d'ajouter les énergies cinétiques de rotation propre de la Terre et de la Lune c'est-à-dire $\frac{1}{5}MR^2\omega^2 + \frac{1}{5}2mR_L^2\Omega^2$. Le deuxième terme est à la fois négligeable devant le premier ($m \ll M$, $R_L^2 < R^2/10$ et $\Omega \approx \omega/27$) et devant l'énergie calculée en 7 ($\mu \approx 2m$ mais $R_L \ll d$) donc l'énergie cinétique totale est $E_c \approx \frac{1}{2}\mu d^2\Omega^2 + \frac{1}{5}MR^2\omega^2$.

9. De même, en projection sur $\vec{u}_z$, $\sigma_{G\,\text{rév}} = J\Omega = \mu d^2\Omega$ et $\sigma_{\text{propre}} = \frac{2}{5}MR^2\omega + \cancel{\frac{2}{5}2mR_L^2\Omega}$. L'énergie potentielle de gravitation valant (en assimilant Terre et Lune à des points) $-\frac{GM2m}{d}$, $E \approx \frac{1}{2}\mu d^2\Omega^2 + \frac{1}{5}MR^2\omega^2 - 2\frac{GMm}{d}$.

10. La loi de la quantité de mouvement appliquée à la Lune s'écrit $\frac{GM2m}{d^2} = 2m\Omega^2\mathrm{OG}$ (avec $\mathrm{GO} = d\frac{M}{M+2m}$) donc $G(M+2m) = d^3\Omega^2$. C'est la troisième loi de Kepler généralisée à une situation où la masse du satellite n'est pas infiniment petite devant celle de la Terre). Par différentielle logarithmique, $3\frac{\delta d}{d} + 2\frac{\delta\Omega}{\Omega} = 0$.

11. Le système étant isolé, son moment cinétique dans le référentiel barycentrique (galiléen) est conservé donc, avec le résultat de 9, $2\mu\Omega d\,\delta d + \mu d^2\,\delta\Omega + \frac{2}{5}MR^2\,\delta\omega = 0$. En utilisant 10 pour éliminer $\delta\Omega$ ou bien δd :

$$2\mu\Omega d\,\delta d - \frac{3}{2}\mu d\Omega\,\delta d + \frac{2}{5}MR^2\,\delta\omega = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\mu d\Omega\,\delta d + \frac{2}{5}MR^2\,\delta\omega = 0 \Rightarrow \frac{\delta\omega}{\delta d} = -\frac{5}{4}\frac{\mu d\Omega}{MR^2}$$

$$\text{et} \quad \frac{\delta\omega}{\delta\Omega} = \frac{5}{6}\frac{\mu d^2}{MR^2} \approx \frac{5}{3}\frac{md^2}{MR^2}$$

12. Avec 9, $\delta E \approx \mu d\Omega(d\,\delta\Omega + \Omega\,\delta d) + \frac{2}{5}MR^2\omega\,\delta\omega + 2\frac{GMm}{d^2}\delta d$. Avec les résultats de 11, on remplace δd et $\delta\Omega$ en fonction de $\delta\omega$. Puis, en utilisant 10 (loi de Kepler) sous la forme $G\frac{2Mm}{\mu} = d^3\Omega^2$, on trouve $\delta E = \frac{2}{5}MR^2(\omega - \Omega)\delta\omega$.

13. Actuellement, $\omega > \Omega$. À cause des frottements, l'énergie mécanique doit décroître. Alors $\delta E < 0 \Rightarrow \delta\omega < 0$ et, avec 11, $\delta\Omega < 0$ et $\delta d > 0$. La rotation propre de la Terre ralentit et la Lune s'éloigne. D'après 11, $\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{5}{4}\frac{\mu d\Omega}{MR^2\omega}\delta d = -\frac{3}{2}\frac{\Omega}{\omega}\frac{\delta\omega}{\delta\Omega}\frac{\delta d}{d}$. Pour une durée d'un siècle, $\delta d \approx 3$ ou 4 m donc $\frac{\delta\omega}{\omega} \approx -(1{,}6 \text{ à } 2{,}1)\times 10^{-8}$. Ceci représente (au signe près) la variation relative de la durée du jour. Le jour va donc s'allonger de 1,4 à 1,8 ms.

14. Avec l'étude des coraux, en 500 millions d'années, la variation a été en moyenne de 2,2 ms par siècle. L'ordre de grandeur est correct et l'allongement est moins prononcé actuellement. La lunaison est liée à la vitesse de révolution Ω qui diminue (mais 36 fois moins que ω). La durée entre lunaisons augmente donc.

15. ω décroissant plus vite que Ω, on peut tendre vers un état où $\omega = \Omega$ et où il n'y aura donc plus de perte d'énergie d'après 12. Par conservation du moment cinétique, $\mu d^2\Omega + \frac{2}{5}MR^2\omega = \left(\mu d_{\text{final}}^2 + \frac{2}{5}MR^2\right)\Omega_{\text{final}}$. L'application numérique de la question 11 montre que $\mu d^2 \gg MR^2$ donc, comme $d_{\text{final}} > d$, $\mu d^2\Omega + \frac{2}{5}MR^2\omega \approx \mu d_{\text{final}}^2\Omega_{\text{final}}$. Avec la loi de Kepler (question 10) $\mu d^2\Omega + \frac{2}{5}MR^2\omega \approx \mu(G(M+2m))^{2/3}(\Omega_{\text{final}})^{-1/3}$.

AN : La durée du jour sera de 51 jours actuels et la distance Terre-Lune sera $d_{\text{finale}} = 580\times 10^6$ m.

16. Au rythme actuel d'éloignement de la Lune, il faudrait de l'ordre de 6 milliards d'année pour atteindre d_{finale}. Comme l'éloignement se ralentit, la durée associée serait encore plus grande soit comparable à l'âge de l'Univers. La mort du Soleil risque d'avoir fait disparaître le système Terre-Lune d'ici là !

17. On calcule $E_{\text{actuelle}} = \frac{1}{2}\mu d^2\Omega^2 + \frac{1}{5}MR^2\omega^2 - 2\frac{GMm}{d} = \frac{1}{5}MR^2\omega^2 - \frac{GMm}{d} = 2{,}2\times 10^{29}$ J et $E_{finale} = -2{,}5\times 10^{28}$ J d'où $E_{DM} = 2{,}5\times 10^{29}$ J. Il suffit de 600 s (10 minutes) au Soleil pour libérer cette énergie !

Centrale – Supélec MP 1995 Physique I Problème I

A. Pendule pesant

A.1. G est le barycentre des masses donc $d = \left(ml + M(2l + r)\right)/\left(m + M\right)$

A.2. Parfaite $\Leftrightarrow$ Sans frottements $\Rightarrow \Gamma_\Delta = 0$. Loi scalaire du moment cinétique $\Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta} = -\left(m + M\right) gd \sin\theta$.

A.3. En posant $\omega_0^2 = \left(m + M\right) gd / J_\Delta$, l'équation des petites oscillations est $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$. Il s'agit d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 et donc de période $\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\dfrac{J_\Delta}{\left(m + M\right) gd}}}$.

B. Mouvement du chariot

B.1.a. Le système {chariot, pendule} est soumis à son poids et à l'action du sol dont les résultantes sont verticales. La quantité de mouvement horizontale est donc conservée. Elle est initialement nulle. Elle reste donc toujours nulle $M\dot{x} + m\left(\dot{x} + l\cos\theta\,\dot{\theta}\right) = 0$ c'est-à-dire $\boxed{\dot{x} + \alpha l \cos\theta\,\dot{\theta} = 0}$

B.1.b. $\dot{x}$ et $\dot{\theta}$ sont de signes opposés. Le chariot va vers la droite lorsque le pendule oscille vers la gauche. Les deux oscillent avec la même période. En moyenne sur une période $\left\langle \dot{x} \right\rangle = -\alpha l \left\langle \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin\theta \right\rangle = -\alpha l \left[\sin\theta\right]_{\theta_0}^{\theta_0} = 0$. Le chariot n'a donc pas de déplacement global.

B.1.c. Le chariot démarre lorsque la tension du fil est vers la droite donc à partir du moment où $\theta > 0$. À cet instant, la vitesse angulaire n'est pas nulle. À partir de ce moment, $\dot{x} + \alpha l \cos\theta\,\dot{\theta}$ est constant (non nul). $\boxed{\dot{x} + \alpha l \cos\theta\,\dot{\theta} = \alpha l \Omega_0}$.

B.1.d. $\dot{\theta}$ va rester inférieur (ou égal) à Ω_0 (voir conservation de l'énergie). $\dot{x}$ gardera donc toujours un signe positif. Le chariot se déplace vers la droite. $\dot{x}$ sera maximum lorsque $\dot{\theta}$ sera le plus petit (passage par 0 dans le sens négatif).

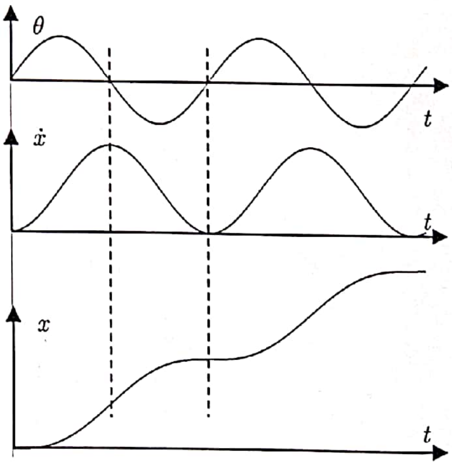
B.2.a. On calcule l'accélération de B : $\vec{a}(B) = \ddot{x}\,\vec{e}_x + l\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r$. (Par dérivation de $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + l\vec{e}_r$ ou par composition des mouvements en prenant comme référentiel mobile le chariot, $\vec{a}_e = \ddot{x}\vec{e}_x$, $\vec{a}_r = l\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r$, $\vec{a}_c = \vec{0}$). On applique la loi de la quantité de mouvement en projection sur $\vec{e}_\theta$ pour obtenir $m\left(\ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta}\right) = -mg\sin\theta$ (seul le poids a une composante non nulle sur $\vec{e}_\theta$, la tension du fil disparaît). Avec la question **1c** on calcule $\ddot{x} = -\alpha l\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$.

On en déduit que $\boxed{l\left(\ddot{\theta}\left(1 - \alpha\cos^2\theta\right) + \alpha\dot{\theta}^2 \sin\theta\cos\theta\right) + g\sin\theta = 0}$.

On pouvait aussi utiliser la loi du moment cinétique en *A* dans le référentiel mobile (*A* y est fixe) en tenant compte de la force d'inertie. La loi de la quantité de mouvement est aussi utilisable dans le référentiel mobile.

et si $\dot{\theta}$ qq ?

B.2.c. Pour les petites oscillations, on ne garde que les termes d'ordre 1 en θ ce qui donne $l\ddot{\theta}\left(1 - \alpha\right) + g\theta = 0$.



B.2.d. On pose $\omega_0 = \sqrt{g / l\left(1 - \alpha\right)}$ et en prenant la date $t = 0$ au moment où le chariot démarre ($\theta = 0$ et $\dot{\theta} = \Omega_0$) l'équation a pour solution :

$\boxed{\theta = \dfrac{\Omega_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$ puis $\dot{x} \approx \alpha l\left(\Omega_0 - \dot{\theta}\right) = \alpha l \Omega_0\left(1 - \cos\omega_0 t\right)$ d'où, en intégrant par rapport à *t*, $\boxed{x = \dfrac{\alpha l \Omega_0}{\omega_0}\left(\omega_0 t - \sin\omega_0 t\right)}$.

B.3.a. $E_C = \dfrac{1}{2}\left[M\dot{x}^2 + m\left(v(B)\right)^2\right] = \dfrac{1}{2}\left[M\dot{x}^2 + m\left(\dot{x}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right)\right]$.

On obtient $\boxed{E_C = \dfrac{1}{2} m\alpha l^2 \Omega_0^2 + \dfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2\left[1 - \alpha\cos^2\theta\right]}$ (élimination de $\dot{x}$).

B.3.b. Seule l'énergie potentielle de *m* varie. $E_P = -mgl\cos\theta + Cte$

B.3.c. L'énergie mécanique est conservée car les forces de contact avec le sol ne travaillent pas (pas de frottement, support fixe) et les forces intérieures non plus (fil souple inextensible). $\dfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2\left[1 - \alpha\cos^2\theta\right] - mgl\cos\theta = Cte$.

Par dérivation on obtient $l\ddot{\theta}\left[1 - \alpha\cos^2\theta\right] + l\alpha\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta + g\sin\theta = 0$ qui est l'équation obtenue au **B.2.b.**

Calcul ?

Polytechnique 2015 MP Physique & SI Partie I

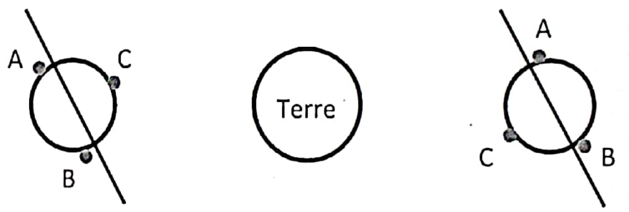
L'énoncé de cette épreuve est très mal rédigé. Cela commence en **1.1.1** (Cas statique) avec une rédaction très ambigüe, atteint un point culminant avec un très improbable « équilibre des forces s'exerçant sur la Terre et sur la Lune » en question 9 et se poursuit en partie **II** où la démarche des questions **28** à **30** est quasi incompréhensible (mais ça c'était plus une partie SI). Au passage, on aura vu apparaître en question **5** un « bourrelet » ésotérique (l'auteur croit-il que la forme du satellite est de révolution autour de Oy ?), une utilisation très « à la va-comme-je-te-pousse » des théorèmes de Koenig aux questions **7** à **9** et des valeurs numériques incorrectes (86 400 s à la place de 86 164 s pour le jour sidéral et un rapport $\delta\omega\ /\ \delta\Omega$ (légèrement) incohérent avec les données de la page 4) …

Néanmoins, les thèmes abordés dans cette partie **I** sont très intéressants !

Questions 1 à 3. On ne sait que faire. D'un côté l'énoncé insiste largement sur le fait que Oxy est non galiléen et sur la prise en compte des « effets de marée ». D'un autre côté il demande en **1** de calculer la force que la Terre exerce sur G_1 (force gravitationnelle donc) et en **2** il considère uniquement les forces gravitationnelles. Il incite alors à ne pas tenir compte des forces d'inertie ! C'est absurde. Il aurait fallu, à la question **1**, demander la « force subie par G_1 due à la présence de la Terre ». Cela aurait comporté la force de gravitation et la force d'inertie.

Question 6. La question la plus mal traitée du problème. Beaucoup se sont contentés de paraphraser l'énoncé en répondant :
L'énoncé affirme « Orbite circulaire avec un axe de rotation perpendiculaire au plan de révolution $\Longrightarrow$ On ne voit que 50% de la surface lunaire ».
J'affirme donc que « On voit plus que 50% de la surface lunaire $\Longrightarrow$ Orbite non circulaire ou axe de rotation non perpendiculaire au plan de révolution ».
Ce n'est pas faux mais … n'est qu'une banalité logique !

Il fallait bien entendu, dans cette question, expliquer physiquement pourquoi on voyait plus de 50% de la surface lunaire. Par exemple, pour l'influence de l'inclinaison de l'axe, un simple dessin commenté suffisait. Les points A, B et C sont liés à la Lune et le dessin tient compte de l'égalité des vitesses de rotation et de révolution. Tous les points de $\widehat{ACB}$ sont, au moins à une date, visibles de la Terre.



Lune à une date t

Lune à la date $t+13{,}5$ jours

Pour l'influence de la trajectoire non circulaire, voir le corrigé.

Question 8. Il n'est légitime d'écrire l'énergie cinétique avec 2 termes (en en négligeant un troisième) que si le troisième terme est négligeable devant les deux termes retenus. Dans un développement limité ou tronqué par des approximations, il est aussi fautif de garder un terme négligeable que d'éliminer un terme non négligeable. On ne doit garder le terme $\frac{1}{2}\mu d^2\Omega^2$ que s'il est effectivement plus grand que le terme négligé $\frac{1}{5}2mR_L^2$.

Question 9. Pour un système de deux points matériels de masses m_1 et m_2, l'expression $E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ désigne à la fois l'énergie potentielle associée à l'action de m_1 sur m_2, l'énergie potentielle associée à l'action de m_2 sur m_1 et l'énergie potentielle d'interaction entre m_1 et m_2. Cela signifie qu'on a aussi bien $\vec{F}_{1\to 2} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{M_2}(E_p)$ que $\vec{F}_{2\to 1} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{M_1}(E_p)$ et que, pour tout mouvement de m_1 et de m_2, $\delta W_{\text{total}} = \vec{F}_1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{dM}_1} + \vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{dM}_2} = -\mathrm{d}E_p$.

Il ne faut pas dire que pour l'ensemble des deux, l'énergie totale vaut $E_p + E_p = 2E_p$.

Questions 10 à 12. Des arguments toujours utiles pour un système isolé :

- Le centre d'inertie est en mouvement rectiligne uniforme dans tout référentiel galiléen.
- Le référentiel barycentrique est galiléen.
- Le moment cinétique en un point fixe d'un référentiel galiléen est constant.

Tout cela vient du fait que le principe fondamental de la mécanique ne fait intervenir que les actions extérieures. Par contre, le théorème de l'énergie cinétique fait intervenir aussi les actions intérieures. Alors, même pour un système isolé il est possible que l'énergie mécanique ne soit pas conservée.

Pendule et chariot

I.A.2 Signification de l'expression « liaison pivot parfaite » : Une liaison pivot d'axe Δ est dite parfaite si les contacts sont sans frottements. Cela se traduit par le fait que le moment des actions de contact par rapport l'axe est nul : si A est un point (quelconque) de l'axe, $\vec{\Gamma}_{\text{liaison}}(\mathrm{A}) \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0$. Mais on ne peut pas en dire plus. Par exemple, sauf coïncidence, $\vec{\Gamma}_{\text{liaison}}(\mathrm{A}) \neq \vec{0}$.

I.B.1.a La situation est classique et l'argument le plus rapide repose sur l'emploi de la quantité de mouvement : si, <u>en coordonnées cartésiennes</u>, la somme des forces extérieures agissant sur un système a une projection nulle sur un des vecteurs de base alors, en vertu de la lois de la quantité de mouvement ($\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{ext}$), la projection correspondante de la quantité de mouvement est une intégrale première (constante du mouvement). Voir aussi, dans les remarques générales en début de texte, le commentaire sur la partie **I.B.3**.

Ici $\boxed{F_x = 0 \Rightarrow p_x = Cte}$

I.B.2.c Lorsqu'on étudie de très petites oscillations, on fait un développement limité à l'ordre 1 par rapport <u>à l'amplitude du mouvement.</u> À ce titre, si par exemple $\theta = \theta_0 \cos \omega t$, les dérivées temporelles de la forme $\dot{\theta} = -\omega\theta_0 \sin \omega t$ doivent être considérées comme infiniment petits d'ordre 1 (en θ_0) et des termes du type $\theta\dot{\theta}$ ou $\dot{\theta}^2 \sin\theta$ sont d'ordre 2 ou 3 (proportionnels à θ_0^2 ou θ_0^3) et doivent être négligés.

I.B.2.d Attention aux conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration. L'équation différentielle du mouvement n'est valide que lorsque le chariot n'est plus en contact avec un butoir. On ne peut donc pas utiliser, pour déterminer les constantes d'intégration, l'état au tout début du mouvement mais l'état au moment où le chariot perd le contact avec le butoir (à ce moment-là, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = \Omega_0$ et $\dot{x} = 0$).

I.B.3. Pratiquement personne n'a utilisé l'expression complète établie dans le cas général : $\dot{x} + \alpha l \dot{\theta} \cos\theta = Cte$, la constante n'étant pas nulle en général ($\alpha l \Omega_0$ ici). En **c**, on devait obtenir l'équation exacte du mouvement et pas seulement une approximation d'ordre 1.

Remarques générales

Mise en forme des calculs et des résultats.

Il ne faut pas se contenter, à la fin d'une question, d'avoir trouvé un résultat. Le résultat final doit être mis sous la forme la plus simple possible : mettre en facteur les termes qui peuvent l'être, regrouper les termes comparables et les ordonner (pour un polynôme, selon les degrés, pour une équation différentielle, selon les ordres …), faire apparaître des grandeurs sans dimension facilitant la vérification de l'homogénéité …

Une mise en forme peut d'ailleurs se faire tout au long d'un calcul. Par exemple, toute factorisation simplifie grandement la manipulation des équations. Cela est beaucoup trop peu utilisé dans les devoirs (ou en colles).

Utilisation d'un vocabulaire adéquat.

Un vocabulaire inadapté traduit ou provoque une incompréhension des concepts !

Exemple 1 : **Les termes rotation et translation sont des termes de mécanique du solide.** Un point ne peut jamais être en rotation (il peut par contre être en mouvement circulaire). Un solide peut être en rotation mais pas toujours. Par exemple, pour le système Terre-Lune, dans son référentiel barycentrique, le centre C_T de la Terre est en mouvement circulaire autour de G (et pas en rotation car C_T est un point) et la Terre n'est pas en rotation autour d'un axe passant par G (G n'est pas un point lié à la Terre). La Terre ne serait en rotation autour d'un axe passant par G que si, par coïncidence, sa vitesse de rotation propre était égale à la vitesse angulaire du mouvement de C_T autour de G.

Exemple 2 : **Le terme *centre de gravité* est à bannir.** Le barycentre des points matériels étudiés, affectés de leur masse, usuellement noté G est nommé *centre d'inertie* ou *centre de masse.*
Le centre de gravité est défini de la façon suivante : si l'ensemble des forces de gravitation est équivalent à une force unique appliquée en un point (c'est-à-dire qu'en ce point le moment de l'ensemble des forces de gravitation est nul) alors ce point est nommé centre de gravité.
Il se trouve que dans un champ de gravitation uniforme, le centre de gravité est confondu avec le centre d'inertie G (voir le théorème du cours sur un ensemble de forces parallèles). Du coup, on peut appeler dans ce cas G centre de gravité mais il vaut mieux l'éviter car il s'agit au mieux d'une approximation, un champ de gravitation n'étant jamais rigoureusement uniforme.

Exemple 3 : **On ne doit jamais dire, pour un système non réduit à un point, « J'applique la loi de la quantité de mouvement à G » ou bien « J'applique la loi de la quantité de mouvement en G ».**

On applique la loi de la quantité de mouvement à un système fermé S. Il se trouve que le point G, centre de masse de S apparaît car une des formes de la loi de la quantité de mouvement est $m_{\text{système S}}\ \vec{a}(\mathrm{G}) = \vec{F}_{\text{subies par S}}$ mais on n'a pas appliqué la loi à G ou en G mais à S.

Par contre, pour la loi du moment cinétique, on l'applique à un système S en un point A fixe qu'on a choisi, sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_{\mathrm{S}}(\mathrm{A}) = \vec{\Gamma}(\mathrm{A})_{\text{subi par S}}$.

Exemple 4 : On ne peut pas parler de la vitesse ou de l'accélération d'un solide (sauf si on a constaté auparavant que son mouvement était une translation). Il faut parler de la vitesse ou de l'accélération d'un de ses points (par exemple son centre de masse G).

Utilisation d'intégrales premières

La méthode employée dans la partie **I.B.3** du problème du pendule sur un chariot est très intéressante. Il s'agit d'un problème à 2 degrés de liberté (variables de position indépendantes x et θ) et on dispose de deux *intégrales premières* (expressions constantes au cours du mouvement faisant intervenir uniquement les paramètres de position et leurs dérivées premières par rapport au temps). Ici il s'agit de l'énergie mécanique et de la projection horizontale de la quantité de mouvement. En écrivant $p_x = C^{te}$ et $E_m = C^{te}$, on dispose donc de deux équations à deux inconnues. Le problème est résolu !

De façon générale, si on a la chance de trouver autant d'intégrales premières que de degrés de liberté, utiliser ces intégrales est la meilleure méthode pour étudier les systèmes.

Le problème sur les marées exploite partiellement cette méthode en utilisant, sur la fin deux intégrales premières : le moment cinétique barycentrique du système Terre-Lune et le produit $\Omega^2 d^3$ (loi de Kepler). L'exploitation est différente car il y a trois degrés de liberté (d, Ω, ω) et puisque l'énergie mécanique qui pourrait être un bon candidat pour être la troisième intégrale première n'est pas ici constante mais décroît.