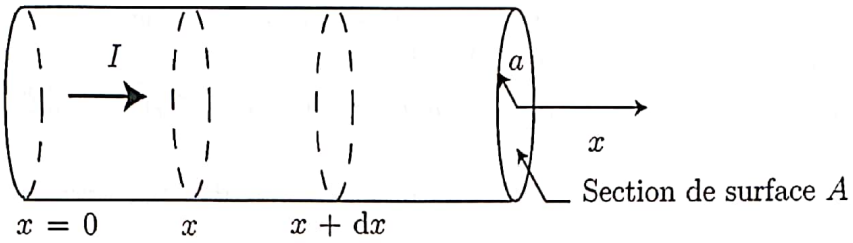
Deuxième partie – Étude d'une lampe fer-hydrogène

Une lampe fer-hydrogène est constituée d'un filament de fer de longueur supposée infinie :

- de section droite de surface A et de rayon a,
- de conductivités thermique et électrique notées respectivement λ et $\gamma = 1/\rho$, en notant ρ la résistivité électrique,
- de masse volumique μ et de capacité calorifique massique c.

Ce filament, parcouru par un courant continu d'intensité I imposé par un générateur de courant, est situé dans une enceinte (ampoule) remplie de dihydrogène. Dans tout le problème, l'environnement de dihydrogène est maintenu à la température constante notée T_e. Ce filament est modélisé figure (3).



Environnement du filament : dihydrogène à la température T_e

Figure 3 – Représentation du filament de la lampe fer-hydrogène.

Dans tout le problème, on considérera que le système est quasi-unidimensionnel et on notera $T(x,t)$ la température qui règne, à l'instant t, en tout point M du filament, situé à l'abscisse x. En $x = 0$, la température du filament est maintenue à $T(x=0) = T_e$.

I. Cas où la résistance est indépendante de T

A. Établissement de l'équation d'évolution

20. Donner un ordre de grandeur de γ et de λ pour un métal.

21. Énoncer clairement les lois phénoménologiques locales de Fourier et d'Ohm. Dans la suite, on supposera que ces lois s'appliquent au filament.

Les transferts thermiques radiatifs et convectifs sont décrits par la densité de flux thermique $\overrightarrow{j_h}(x,t)$ au niveau de l'interface entre le filament et le dihydrogène. Dans la limite où $T(x,t)$ est voisine de T_e, on pourrait montrer que cette densité de flux s'exprime comme

$$\overrightarrow{j_h}(x,t) = h\big(T(x,t) - T_e\big)\,\overrightarrow{n}_{\text{ext}}$$

où h est un coefficient qui décrit les échanges thermiques entre le filament et son environnement, et $\overrightarrow{n}_{\text{ext}}$ est un vecteur unitaire sortant, normal à la surface du filament.

22. Exprimer le travail électrique $\delta^2 W$ reçu par un élément de volume $\mathrm{d}\tau = A\,\mathrm{d}x$ du conducteur pendant un temps $\mathrm{d}t$, de la part du générateur. On exprimera le résultat en fonction de I, γ, A, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}t$.

23. À l'aide d'un bilan d'énergie qu'on établira clairement, montrer que l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $T(x,t)$ s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha\left(T - T_e\right) + \beta\,\rho\, I^2$$

où D, α et β sont des constantes qu'on exprimera en fonction des paramètres du problème.

B. Étude du régime stationnaire

Profil de température en régime stationnaire

24. Déterminer le profil de température ($T = T(x)$) en régime stationnaire. On supposera que le fil occupe le demi-axe $x \geq 0$. On introduira une longueur caractéristique δ qu'on exprimera en fonction de a, λ et h.

25. Tracer le profil de $T(x) - T_e$. On précisera la température limite notée T_ℓ en fonction de T_e, ρ, a, h, et I.

26. Y a-t-il conservation du flux thermique conductif ? On argumentera la réponse.

Mise en évidence du caractère dissipatif du système. Création d'entropie

On se propose à présent de déterminer le taux de création d'entropie $\sigma(x)$ par unité de longueur et de temps dans le filament, à l'abscisse x. Cette étude s'appuie sur un bilan d'entropie en régime stationnaire. Le système thermodynamique d'étude sera un élément de volume $\mathrm{d}\tau = A\,\mathrm{d}x$ du filament. On notera $\delta^2\mathrm{S}_{\mathrm{ech}}$ et $\delta^2\mathrm{S}_{\mathrm{c}}$ l'entropie d'échange et l'entropie créée, pendant $\mathrm{d}t$.

27. En régime stationnaire, déterminer le lien entre l'entropie d'échange $\delta^2\mathrm{S}_{\mathrm{ech}}$ et l'entropie créée $\delta^2\mathrm{S}_{\mathrm{c}}$

28. Exprimer l'entropie d'échange entrante $\delta\mathrm{S}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{ech}}$ par la section d'abscisse x pendant $\mathrm{d}t$. On exprimera le résultat en fonction de la denstié de flux conductif $j_{\mathrm{cd}}(x)$, $T(x)$, A et $\mathrm{d}t$.

29. Exprimer de même l'entropie d'échange sortante $\delta\mathrm{S}^{s}_{\mathrm{ech}}$ du cylindre de volume $\mathrm{d}\tau = A\,\mathrm{d}x$. On exprimera le résultat en fonction de h, T_e, a, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}t$, A et des fonctions j_{cd} et T évaluées à des abscisses que vous préciserez.

30. Montrer alors que le taux de création d'entropie $\sigma(x)$ par unité de longueur et de temps s'écrit :

$$\sigma(x) = \frac{\delta^2\mathrm{S}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t} = \frac{\rho I^2}{AT} + \frac{\lambda A}{T^2}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\pi\, a\, h(T - T_e)\left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T}\right) \qquad (3)$$

On ne cherchera pas à établir une expression explicite de $\sigma(x)$ en fonction de x.

31. Identifier les différentes sources d'irréversibilité du problème.

32. À quelle condition l'état stationnaire est-il un état d'équilibre thermodynamique pour le filament ?

33. À partir de l'équation (3), exprimer σ (sans expliciter la dépendance en x) dans un régime de conduction thermique pure, c'est-à-dire en l'absence de courant, ainsi qu'en l'absence de transferts radiato-convectifs. Justifier le signe de λ.

34. En vous appuyant sur l'équation (3), vérifier que tout contact thermique entre deux corps dont les températures de surface sont différentes constitue une source de création d'entropie.

35. La loi d'Ohm locale « statique » se généralise au cas des régimes sinusoïdaux en remplaçant la conductivité électrique statique γ_0 par l'expression complexe suivante :

$$\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 + \mathrm{i}\omega\tau}$$

Cette expression traduit la réponse du métal à l'application d'un champ électrique sinusoïdal homogène :

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}(\omega) = \mathrm{E}_0\, e^{\mathrm{i}\omega t}\, \overrightarrow{e_x}$$

Une étude élémentaire permettrait de montrer que :

$$\gamma_0 = Ne^2\tau/m_e$$

où τ est un temps caractéristique microscopique et N est la densité volumique d'électrons de conduction dans le métal, e et m_e désignant respectivement la charge électrique élémentaire et la masse de l'électron.

Estimer l'ordre de grandeur de N dans un métal. En déduire l'ordre de grandeur de τ. On rappelle que $m_e \sim 10^{-30}$ kg et $e \sim 10^{-19}$ C .

36. En régime sinusoïdal, montrer que, pour $\omega\tau \gg 1$, un conducteur ohmique n'est plus dissipatif.

37. Montrer que la variation d'entropie dS d'un système thermodynamique (Σ) quelconque peut s'écrire, dans le cas général,

$$\mathrm{dS} = \frac{\delta Q}{T} + \delta \mathrm{S}_c^{\mathrm{int}}$$

où T est la température du système thermodynamique, δQ le transfert thermique reçu par le système de l'environnement extérieur à la température T_e et $\delta \mathrm{S}_c^{\mathrm{int}}$ une création d'entropie due aux seuls processus dissipatifs internes au système. On exprimera $\delta \mathrm{S}_c^{\mathrm{int}}$ en fonction de δQ, T, T_e et de la création d'entropie totale $\delta \mathrm{S}_c$.

38. À la lumière du résultat précédent, déduire la nature des seules transformations thermodynamiques qui sont susceptibles d'être réversibles. À quel thermodynamicien doit-on ce résultat ?

II. Cas où ρ dépend de T – Recherche des solutions stationnaires stables

On prend désormais en compte les variations de résistivité ρ du métal en fonction de la température T. Des mesures, pour le fer, permettent d'obtenir la courbe $\rho(T)$ illustrée figure (4).

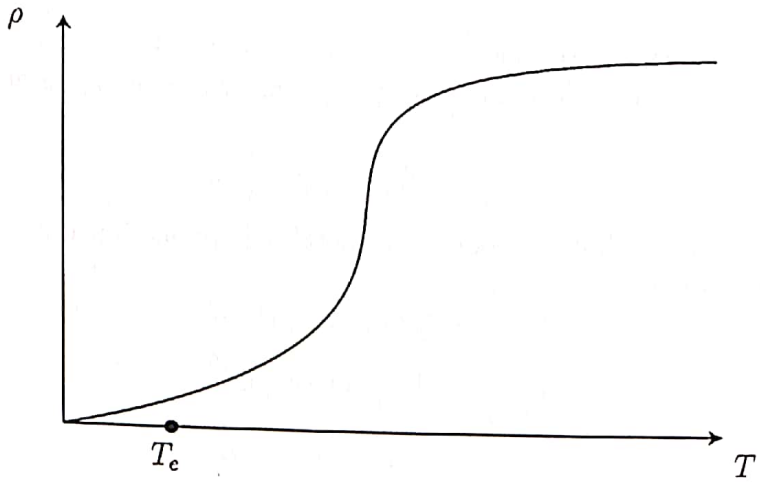


FIGURE 4 – Évolution de la résistivité ρ du filament en fonction de T.

Dans cette partie, on supposera, dans une bonne approximation, que la température est homogène sur toute la longueur du filament.

A. Approche qualitative

39. Montrer que la recherche des solutions stationnaires conduit à une équation de la forme :

$$\rho(T) = y(T) \quad , \tag{4}$$

où $y(T)$ est l'équation d'une droite $\mathcal{D}$ dont on précisera la pente et l'ordonnée à l'origine, en fonction de h, a, I et T_e. On appellera T^* une température solution de l'équation (4).

40. On supposera, dans toute cette étude, que T_e est maintenue constante à la valeur indiquée sur la figure (4).

Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation (4) par rapport à l'intensité I. On nommera *points de fonctionnement* ces solutions. On indiquera très clairement sur la courbe les différents points de fonctionnement possibles.

B. Stabilité des solutions stationnaires

Afin d'étudier la stabilité des solutions déterminées graphiquement à la question précédente, on examine le comportement du système face à une fluctuation de température notée $\epsilon(t) = T(t) - T^*$ avec $|\epsilon| \ll T^*$ et T^* est la valeur de la température du point de fonctionnement considéré.

41. Montrer que l'équation différentielle satisfaite par $\epsilon(t)$ s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon(t)}{\mathrm{d}t} = \kappa(\tilde{p}(T^*) - p)\,\epsilon(t)$$

où

* κ est à exprimer en fonction de β et I,
* $\tilde{p}(T^*)$ et p sont des pentes que l'on précisera.

42. Dégager un critère graphique simple permettant de conclure quant au caractère stable ou instable des points de fonctionnement étudiés. Représenter la zone instable.

43. Déduire l'allure de la courbe donnant les variations de T^* en fonction de I. On représentera sur cette courbe les différents points de fonctionnement.

44. Supposons que l'on observe l'image du courant I sur la voie X d'un oscilloscope et celle de la température T^* sur la voie Y. Quelles sont les parties de la courbe qu'on observerait effectivement en mode XY, en régime variable (faible fréquence) ? Préciser graphiquement l'amplitude minimale du courant qu'il faudra assurer pour observer une courbe $T^*(I)$ révélant les propriétés particulières du système.

C. Étude à tension imposée

45. Reprendre la question 39 dans le cas où le filament est alimenté par un générateur de tension continue.

46. Justifier physiquement que le point de fonctionnement trouvé est toujours stable, quelle que soit la valeur de U.

Utilisation du dioxyde de carbone comme fluide frigorigène

On donne le diagramme (P, h) (pression en ordonnée, enthalpie massique en abscisse) de CO_2. Il correspond à une gamme de pressions et de températures où CO_2 peut être à l'état liquide ou gazeux ou à l'équilibre entre les deux phases. Sur ce diagramme sont représentées les isothermes (valeurs de T allant de -50 à $170\,°C$), les courbes d'égale entropie massique s (valeurs allant de 1300 à $2600\,J\,kg^{-1}\,K^{-1}$), les courbes isotitre dans la zone diphasée (valeurs de 0,1 en 0,1) et les courbes d'égal volume massique (valeurs allant de 1,5 à $100\,dm^3\,kg^{-1}$).

On a représenté sur le diagramme le cycle 1-2-3-4-1 (parcouru dans cet ordre) d'une machine thermique ditherme dont le fluide frigorigène est CO_2.

Les quatre étapes du cycle sont (citées dans le désordre) :

A. Mise en contact thermique isobare avec la source chaude de température T_C. On note q_C le transfert thermique massique associé. À l'issue de ce contact thermique, le fluide est à la température T_C.

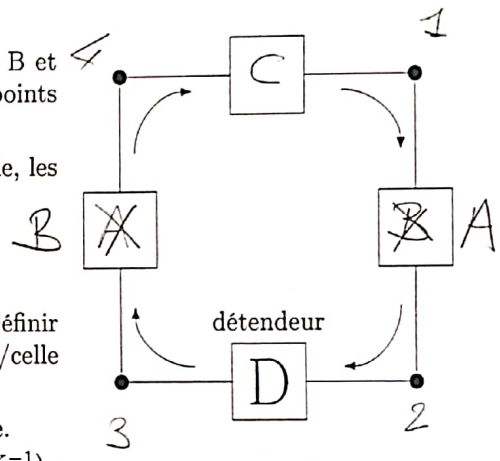
B. Mise en contact thermique isobare avec la source froide de température T_F. On note q_F le transfert thermique massique associé. À l'issue de ce contact thermique, le fluide est à la température T_F.

C. Passage dans un compresseur adiabatique qui fournit un travail massique w au fluide.

D. Traversée d'un détendeur adiabatique à parois rigides permettant une détente de Joule-Kelvin du fluide.

On néglige au cours des différentes étapes les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle macroscopiques.

Les valeurs numériques utiles seront lues avec soin sur le diagramme.



Q1. Compléter le diagramme ci-contre en indiquant par les lettres A, B et C les parties du cycle associées à ces étapes et en plaçant les points correspondant aux états 1, 2, 3 et 4.

Q2. Compléter le tableau ci-dessous en indiquant, lorsque c'est possible, les valeurs de P, T, h, s. Faire figurer les unités en dernière ligne.

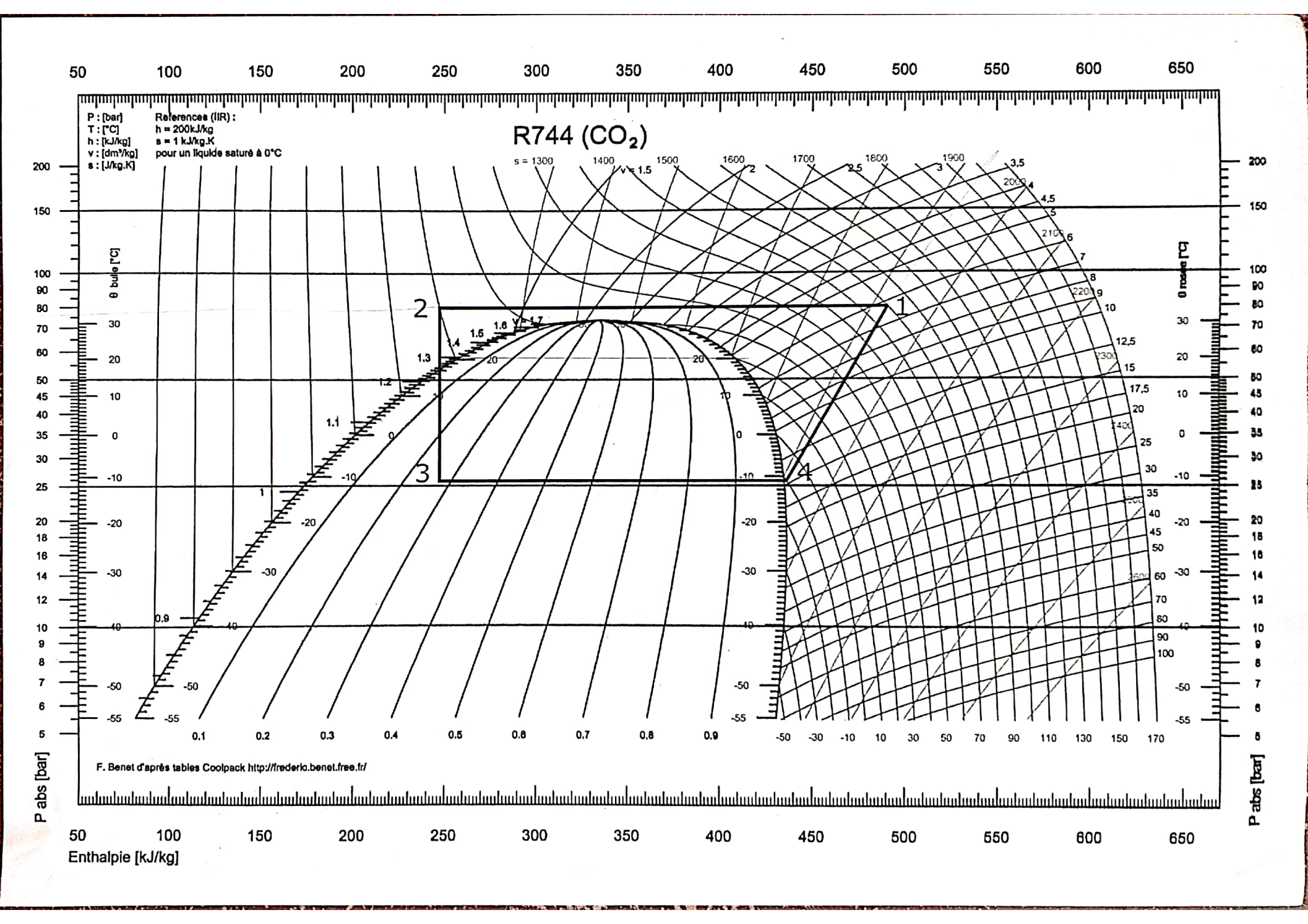
Q3. Quelles sont les valeurs des températures T_C et T_F ?

Q4. Déterminer q_F, q_C, w.

Q5. La machine fonctionne-t-elle en pompe à chaleur ou en moteur ? Définir et calculer son rendement ou son efficacité. Comparer avec celui/celle d'un cycle de Carnot. Commenter.

Q6. Déterminer l'entropie créée par unité de masse parcourant le cycle.
On donne pour les états 2 et 3 les entropies massiques (en $J\,kg^{-1}\,K^{-1}$) : 1146 et 1183. Quelle(s) étape(s) contribuent le plus à la création d'entropie ? Pour quelles raisons ?

Point	P	T	h	s
1	80	80	490	1920
2	80	20	245	/
3	26	-10	245	/
4	26	-10	435	1900
Unité	bar	°C	$kJ \cdot kg^{-1}$	$J\,kg^{-1}\,K^{-1}$


R744 (CO_2)
P : [bar]
T : [°C]
h : [kJ/kg]
v : [dm³/kg]
s : [J/kg.K]
References (IIR) :
h = 200kJ/kg
s = 1 kJ/kg.K
pour un liquide saturé à 0°C
θ bulle [°C]
θ rosée [°C]
P abs [bar]
Enthalpie [kJ/kg]
1
2
3
4
F. Benet d'après tables Coolpack http://frederic.benet.free.fr/

ENS groupe Info 2009

DEUXIÈME PARTIE – ÉTUDE D'UNE LAMPE FER-HYDROGÈNE

20. $\gamma \approx 10^7\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ $\lambda \approx 100\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$

21. Ohm : en régime permanent $\vec{j} = -\gamma\ \overrightarrow{grad\ V}$ Fourier : $\vec{j}_{Th} = -\lambda\ \overrightarrow{grad\ T}$

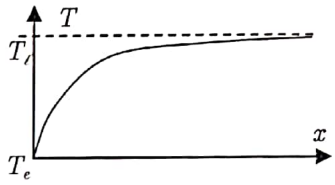
22. $\delta^2 W = \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \dfrac{j^2}{\gamma}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$. Ici $I = Aj$ donc $\delta^2 W = \dfrac{I^2}{\gamma A^2}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \dfrac{I^2}{\gamma A}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

23. La tranche comprise entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$ reçoit le travail calculé à la question précédente, la puissance thermique $j_{Th}(x)A$ sur sa face de gauche. Elle cède les puissances $j_{Th}(x+\mathrm{d}x)A$ sur sa face de droite et $j_h 2\pi a\mathrm{d}x$ sur la paroi latérale cylindrique. L'application du premier principe s'écrit :

$$\mu cA\,\mathrm{d}x\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t = \frac{I^2}{\gamma A}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \lambda\frac{\partial T}{\partial x}(x)A\mathrm{d}t + \lambda\frac{\partial T}{\partial x}(x+\mathrm{d}x)A\mathrm{d}t - h\left(T-T_e\right)2\pi a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha\left(T-T_e\right) + \beta\rho I^2} \text{ avec } \boxed{D = \frac{\lambda}{\mu c}} \text{ (diffusivité thermique) } \boxed{\alpha = \frac{2\pi ah}{\mu cA} = \frac{2h}{\mu ca}} \quad \boxed{\beta = \frac{1}{\mu cA^2}}$$

24. On pose $\boxed{\delta^2 = \dfrac{D}{\alpha} = \dfrac{\lambda a}{2h}}$. L'équation à résoudre est $\delta^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \left(T-T_e\right) + \dfrac{\beta}{\alpha}\rho I^2 = 0$ dont la solution générale est $T = T_e + \dfrac{\beta}{\alpha}\rho I^2 + C\exp\left(-\dfrac{x}{\delta}\right) + E\exp\left(+\dfrac{x}{\delta}\right)$. La température ne pouvant diverger lorsque x augmente, la constante E est nulle.



$$\boxed{T = T_e + \frac{\beta}{\alpha}\rho I^2\left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\right)}$$

25. La température limite (pour $x \gg \delta$) est $T_\ell = T_e + \dfrac{\beta}{\alpha}\rho I^2$. $\boxed{T_\ell = T_e + \dfrac{\rho I^2}{2\pi^2 h a^3}}$

26. Le flux thermique conductif n'est pas conservé (présence de puissance en volume et pertes latérales).

27. En régime stationnaire, l'entropie du système ne varie pas donc $\mathrm{d}S = 0 = \delta^2 S_{\text{ech}} + \delta^2 S_{\text{c}}$.

28. $\delta^2 S^e_{\text{ech}} = \dfrac{\delta Q_{\text{reçue}}}{T(x)} = \dfrac{j_{\text{cd}}(x)A}{T(x)}\mathrm{d}t$.

29. $\delta^2 S^s_{\text{ech}} = \sum\dfrac{\delta Q_{\text{cédée}}}{T_{\text{ext}}} = -\dfrac{j_{\text{cd}}(x+\mathrm{d}x)A}{T(x+\mathrm{d}x)}\mathrm{d}t + \dfrac{2\pi a\,\mathrm{d}x h\left(T(x)-T_e\right)}{T_e}\mathrm{d}t$.

30. Globalement

$$\delta^2 S_{\text{ech}} = -A\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{j_{\text{cd}}}{T}\right) + \frac{2\pi a\,\mathrm{d}x\,h\left(T-T_e\right)}{T_e}\mathrm{d}t = \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\left[A\lambda\left(\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{T^2}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)^2\right) + \frac{2\pi ah\left(T-T_e\right)}{T_e}\right]$$

D'après l'équation de la question **23**, $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{2h}{\lambda a}\left(T-T_e\right) - \dfrac{1}{\lambda A^2}\rho I^2$. En reportant dans l'expression précédente, on obtient $\boxed{\sigma(x) = \dfrac{\delta^2 S_{\text{c}}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}x} = -\dfrac{\delta^2 S_{\text{ech}}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}x} = \dfrac{\rho I^2}{AT} + \dfrac{A\lambda}{T^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\pi ah\left(T-T_e\right)\left(\dfrac{1}{T_e} - \dfrac{1}{T}\right)}$.

31. Les trois sources d'irréversibilité sont l'effet Joule (terme ρI^2), les transferts conductifs associés à une température non uniforme dans le filament (terme contenant λ) et les transferts thermiques avec l'hydrogène à température différente du filament.

32. L'état stationnaire ne serait un état d'équilibre que si la température du filament était uniforme : $T = T_\ell$.

33. $\sigma(x) = \dfrac{A\lambda}{T^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)^2$ doit être positif (second principe) donc $\boxed{\lambda > 0}$.

34. Lorsque $T \neq T_e$ le terme $2\pi ah\left(T - T_e\right)\left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T}\right)$ toujours strictement positif intervient.

35. En considérant que chaque atome de métal libère un électron, pour un métal de densité d par rapport à l'eau et de masse molaire M, $N = N_A d \times \frac{10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{M}$ est de l'ordre de 10^{29} m^{-3} ($d \approx 10$, $M \approx 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) $\boxed{\tau \approx 10^{-14} \text{ s}}$.

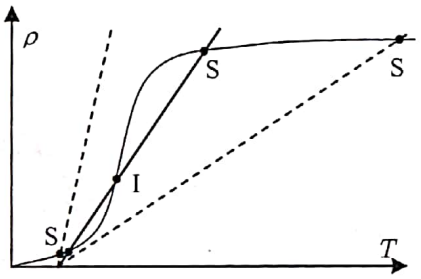
36. Si $\omega\tau \gg 1$ $\underline{\gamma}$ est pratiquement imaginaire pur : $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature de phase et, en valeur moyenne, le produit $\vec{j} \cdot \vec{E}$ est nul.

37. Le second principe permet d'écrire $\text{d}S = \frac{\delta Q}{T_e} + \delta S_c \Rightarrow \text{d}S = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_c^{\text{int}}$ avec $\delta S_c^{\text{int}} = \delta S_c - \delta Q\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_e}\right)$. En enlevant le terme d'entropie créée dû à l'échange thermique (si $T \neq T_e$), on ne garde dans δS_c^{int} que les causes internes d'irréversibilité.

38. Il ne peut y avoir réversibilité que si il y a équilibre thermodynamique (voir **31**) : T uniforme et $T = T_e$. Sadi Carnot a mis en évidence (1824) l'importance de la réversibilité dans le rendement des machines thermiques. Ilya Prigogine (prix Nobel 1977) a théorisé la thermodynamique des systèmes hors d'équilibre.

39. On utilise l'équation de la question **23**. En régime permanent avec une température uniforme. $\alpha\left(T - T_e\right) = \beta\rho I^2$. Ceci peut être écrit sous la forme $\boxed{\rho = \frac{2h\pi^2 a^3}{I^2}\left(T - T_e\right)}$ (droite de pente $\frac{\alpha}{\beta I^2}$ passant par le point $\rho = 0$, $T = T_e$).

40. Il y a 3 points de fonctionnement pour des intensités moyennes (droite en trait épais) et un seul pour des intensités fortes ou faibles (pointillés).



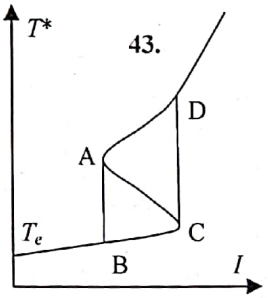
41. L'équation de la question **23** devient, avec T uniforme :

$$\frac{\text{d}T}{\text{d}t} = -\alpha\left(T - T_e\right) + \beta\rho I^2 = \beta I^2\left(-\frac{\alpha}{\beta I^2}\left(T - T_e\right) + \rho\right)$$

Au voisinage de T^* on peut développer $\rho = \rho\left(T^*\right) + \tilde{p}\left(T^*\right)\varepsilon$ où $\tilde{p}$ est la pente de la courbe $\rho\left(T\right)$. Par ailleurs (question **39**) $\frac{\alpha}{\beta I^2} = p$ est la pente de la droite et $p\left(T^* - T_e\right) = \rho(T^*)$. On obtient alors $\boxed{\frac{\text{d}\varepsilon}{\text{d}t} = \frac{\text{d}T}{\text{d}t} = \beta I^2\left(\tilde{p}\left(T^*\right) - p\right)\varepsilon}$.

42. Le point de fonctionnement est stable si le coefficient de ε dans l'équation est négatif donc si la droite est plus pentue que la courbe. Les points de fonctionnement sont stables sauf le point central lorsqu'il y en a 3.

43.



44. La partie de pente négative entre les points A et C correspond aux points instables et est inobservable. L'intensité doit pouvoir devenir inférieure à I_A et supérieure à I_C pour décrire le cycle d'hystérésis ABCDA (dans cet ordre).

45. Si on impose une tension, on impose le produit $U = RI$ donc le produit ρI qui sera noté u. L'équation de la question **41.** devient $\frac{\text{d}T}{\text{d}t} = -\alpha\left(T - T_e\right) + \beta\frac{u^2}{\rho}$. Un point de fonctionnement vérifie $\rho = \frac{\beta u^2}{\alpha\left(T - T_e\right)}$. On trace donc maintenant non pas une droite mais une branche d'hyperbole d'asymptotes $T = T_e$ et $\rho = 0$. Il n'y a plus qu'un seul point de fonctionnement.

46. Si la température est un peu supérieure à celle du point de fonctionnement, la puissance évacuée vers l'air est plus grande et la puissance électrique reçue est plus faible car la résistivité augmentant, $\vec{j} = \vec{E} / \rho$ diminue ($\vec{E}$ est fixé par la tension) et donc $\vec{j} \cdot \vec{E}$ diminue. Le système se refroidit donc. L'état est stable.

ENS groupe Info 2009

QUELQUES REMARQUES

21. L'énoncé demande les équations locales (c'est-à-dire donnant une relation entre des champs appliqués tous en un même point). Par exemple, pour la loi d'Ohm, la réponse correcte est $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (ou $-\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, V$ en régime permanent) et non pas $U = RI$.

32. **La définition d'un équilibre thermodynamique** : on parle *d'équilibre thermodynamique* lorsque, pour chaque grandeur physique extensive X pouvant être échangée ou varier, le paramètre intensif Y associé est uniforme (ou identique pour les sous-systèmes envisagés). Exemples :

X = énergie	→ Y = température	Équilibre *thermique* si	$T_1 = T_2$ ou T uniforme
X = volume	→ Y = pression	Équilibre *mécanique* si	$P_1 = P_2$ ou P uniforme
X = matière	→ Y = potentiel chimique	Équilibre *chimique* si	$\mu_1 = \mu_2$ ou $\Delta_r G = 0$
X = charge	→ Y = potentiel électrostatique	Équilibre *électrique* si	$V_1 = V_2$ ou V uniforme

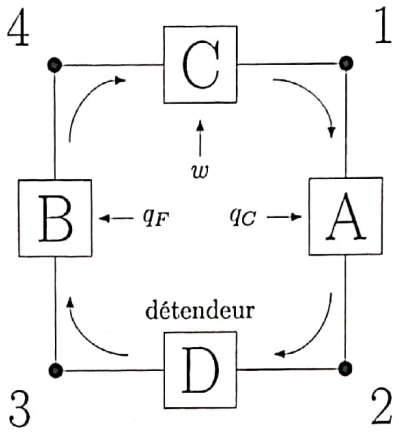
36. L'emploi des complexes pour faire un produit de grandeurs oscillantes de pulsation ω n'est pas direct. Si aux champs $\vec{E}$ et $\vec{j}$ réel on associe les champs complexes $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$ et $\underline{\vec{j}} = \vec{j}_0 e^{i\omega t}$, en aucun cas on ne peut associer à la puissance volumique réelle $\vec{j} \cdot \vec{E}$ le complexe $\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}}$. En effet, $\left(\vec{j} \cdot \vec{E}\right)_{\text{réel}} = \text{Re}\left(\underline{\vec{j}}\right) \cdot \text{Re}\left(\underline{\vec{E}}\right) \neq \text{Re}\left(\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}}\right)$.

37. Cette question ne nécessite pas une nouvelle application du second principe. Il ne s'agit que d'une simple manipulation algébrique $\text{d}S = \dfrac{\delta Q}{T_e} + \delta S_c = \dfrac{\delta Q}{T_e} + \delta S_c + \dfrac{\delta Q}{T} - \dfrac{\delta Q}{T} = \dfrac{\delta Q}{T} + \delta S_c - \left(\dfrac{\delta Q}{T} - \dfrac{\delta Q}{T_e}\right)$ qui donne le résultat demandé avec $\delta S_c^{\text{int}} = \delta S_c - \delta Q\left(\dfrac{1}{T} - \dfrac{1}{T_e}\right)$ qui doit être suivie de l'interprétation physique : en enlevant le terme d'entropie créée dû à l'échange thermique (si $T \neq T_e$) avec l'extérieur, on ne garde dans δS_c^{int} que les causes internes d'irréversibilité.

42. Raisonnement graphique classique ! La recherche graphique d'un point de fonctionnement par intersection de deux courbes se poursuit par la discussion sur la stabilité du point de fonctionnement. La discussion conduit pratiquement toujours à comparer les positions des deux courbes l'une par rapport à l'autre au voisinage du point d'intersection.

Cycle frigorifique utilisant CO_2

Q1. La détente de Joule-Kelvin se fait à enthalpie massique constante donc est représentée par le trait vertical $2 \to 3$. Les étapes A et B sont iobares donc correspondent aux traits horizontaux $1 \to 2$ et $3 \to 4$. La température finale en 2 (20 °C) est plus élevée qu'en 4 (−10 °C) donc $1 \to 2$ correspond à l'étape A et $3 \to 4$ à l'étape B.



Q2.

Point	P	T	h	s
1	80 bar	80 °C	490 kJ kg^{-1}	1925 J kg^{-1} K^{-1}
2	80 bar	20 °C	247 kJ kg^{-1}	
3	26 bar	−11 °C	247 kJ kg^{-1}	
4	26 bar	−10 °C	437 kJ kg^{-1}	1910 J kg^{-1} K^{-1}

Q3. Voir la question Q1. $T_C = 20\,°C$ et $T_F = -10\,°C$

Q4. On applique pour chaque étape le premier principe pour un système ouvert. Sans variation d'énergie macroscopique, $w + q = h_{\text{sortie}} - h_{\text{entrée}}$. Pour les étapes A et B, il n'y a pas de travail massique puisqu'il s'agit d'un simple contact thermique avec l'extérieur, sans pièces mobiles. Pour l'étape C, il n' a pas d'échange thermique (adiabatique) donc $q_F = h_4 - h_3 = 190\,\text{kJ kg}^{-1}$, $q_C = h_2 - h_1 = -243\,\text{kJ kg}^{-1}$ et $w = h_1 - h_4 = 53\,\text{kJ kg}^{-1}$.

Q5. w est positif et q_C est négatif. Il s'agit donc d'une pompe à chaleur dont l'efficacité est $e = \dfrac{q_C}{w} = 4,6$. L'efficacité maximale d'un cycle ditherme utilisant les même sources de chaleur est (cycle de Carnot) $e_{\text{Carnot}} = \dfrac{T_C}{T_C - T_F} = 9,8$. Le cycle étudié est moins efficace car il n'est pas réversible (voir la question suivante).

Q6. On applique le second principe au système ouvert décrivant le cycle (entrée en 1, parcours -2-3-4- et sortie en 1). Alors $\Delta s = \dfrac{q_C}{T_C} + \dfrac{q_F}{T_F} + s_{\text{créée}}$ avec $\Delta s = s_1 - s_1 = 0$ donc $s_{\text{créée}} = -\dfrac{q_C}{T_C} - \dfrac{q_F}{T_F} = 107\,\text{J kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$.

On peut aussi raisonner étape par étape. Par exemple, pour $1 \to 2$, $s_2 - s_1 = \frac{q_C}{T_C} + s_{\text{créée}12}$ d'où on détermine $s_{\text{créée}12} = 50{,}4\,\text{J kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$. De même $s_{\text{créée}34} = s_4 - s_3 - \frac{q_F}{T_F} = 4{,}6\,\text{J kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$. Pour les étapes $2 \to 3$ et $4 \to 1$, $q = 0$ donc $s_{\text{créée}} = \Delta s$. $s_{\text{créée}23} = 37\,\text{J kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$ et $s_{\text{créée}41} = 15\,\text{J kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$. On peut vérifier que la somme vaut bien $107\,\text{J kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$.

Les deux principales contributions sont celles de l'étape A où il y a un très fort *déséquilibre thermique* entre le fluide de la source chaude au début (80 °C contre 20 °C) et de l'étape D où il y a un très fort *déséquilibre mécanique* interne au fluide dans la détente de Joule-Kelvin de 80 bar à 26 bar. Ces étapes sont fortement irréversibles.