ÉCOLE POLYTECHNIQUE FILIÈRE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2003

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

***

La glace dans la nature

L'objet de ce problème est l'étude des couverts de glace à la surface de la terre.

Dans une première partie, on étudie la croissance d'une couche de glace lorsque sa température de surface est contrôlée, en utilisant pour cela l'approximation quasi stationnaire. Puis l'on examine les effets d'un manteau de neige sur la formation de la couche de glace à la surface d'un lac. On évoque enfin dans la dernière partie l'évolution saisonnière de la glace arctique.

Toutes les parties sont largement indépendantes les unes des autres. Sauf indication contraire, la pression P est constante et égale à la pression atmosphérique moyenne, soit $1,01325 \times 10^5$ Pa.

Une grande attention devra être apportée aux applications numériques.

Données numériques :

Capacité thermique massique de la glace	$c_G = 2,09 \times 10^3\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$
Capacité thermique massique de l'eau	$c_E = 4,18 \times 10^3\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$
Conductibilité thermique de la glace	$\lambda_G = 2,215\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
Conductibilité thermique de la neige	$\lambda_n = 0,3\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_0 = 1,00 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
Masse volumique de la glace	$\rho_G = 0,915 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
Masse volumique de la neige	$\rho_n = 0,33 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
Enthalpie de fusion de la glace	$L = 0,333 \times 10^6\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$

les données précédentes sont supposées indépendantes de la température.

Température de fusion de la glace	$T_F = 0,00\,°\mathrm{C}$

Bilan radiatif à la surface de la banquise arctique :

Coefficients

$T_J = 15,7\,°\mathrm{C}$	$T_N = -43,3\,°\mathrm{C}$
$B_J = 1,4\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$	$B_N = 1,8\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$

I. Le problème de Stefan

La figure 1 illustre le problème de la formation d'une couche de glace tel qu'il fut formulé dans le travail pionnier de Stefan (1891). La surface d'un volume d'eau initialement à la température de fusion T_F est mis en contact à l'instant $t = 0$ avec une paroi plane, maintenue en position fixe et à température $T_S < T_F$. Une couche de glace apparaît et se développe progressivement au sein du fluide. On note $\xi(t)$ la position de l'interface entre l'eau et la glace ; la glace occupe l'espace $0 \leqslant z \leqslant \xi(t)$. Soit $T_G(z,t)$ le champ de température dans la glace, supposé unidimensionnel. On suppose que $T_G(z=0,t) = T_S$.

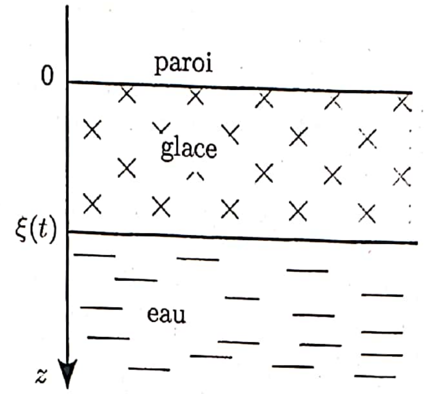


Figure 1

1. La diffusion thermique.

a) Exprimer la loi de Fourier reliant au sein de la glace la densité de courant d'énergie $\vec{J_Q}$ au gradient de température.

b) Effectuer un bilan énergétique sur un volume élémentaire de glace pour obtenir l'équation de la diffusion thermique, dite « de la chaleur ».

c) Quelles sont les conditions aux limites pour le champ de température de la glace ? Permettent-elles de déterminer $T_G(z,t)$?

d) Que peut-on dire de la température au sein de l'eau ?

e) Pourquoi l'eau est-elle mise en mouvement par l'avancée de l'interface ?

2. Soient H_G l'enthalpie massique de la glace et H_E celle de l'eau que l'on suppose indépendantes de la température. On désigne par $v_G = \dot{\xi}(t)$ la vitesse de l'interface et par v_E la vitesse verticale de l'eau.

a) En raisonnant sur un cylindre vertical de section S, exprimer à l'aide de $\dot{\xi}(t)$ la masse d'eau qui s'est transformée en glace entre les instants t et $t + dt$.

b) Effectuer le bilan enthalpique de cette masse entre ces deux instants (on négligera la variation d'énergie cinétique de l'eau qui gèle).

c) En déduire la relation suivante :

$$\lambda_G \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{\xi(t)} = \rho_G L \dot{\xi}(t) \tag{1}$$

3. On suppose que $\dot{\xi}(t)$ est suffisamment faible pour admettre que la distribution de température dans la glace est à tout instant celle de l'état stationnaire pour l'épaisseur de glace formée à cet instant (approximation quasi stationnaire).

a) Pourquoi n'a-t-on jamais rigoureusement de régime permanent ?

b) Que devient l'équation de la chaleur dans l'approximation quasi stationnaire ? En déduire le profil puis le gradient de température au sein de la glace.

c) Déduire alors de l'équation (1) une équation différentielle portant sur $\xi(t)$. Montrer que $\xi(t) = \sqrt{2Dt}$ où D est une constante que l'on explicitera.

d) *Application numérique* : calculer D pour $T_S = -30°C$. Calculer l'épaisseur de glace après un jour, une semaine, un mois, six mois.

II. Effet d'une couche de neige

On souhaite étudier l'effet d'un couvert de neige sur la croissance de la glace. On suppose qu'il existe une couche de neige d'épaisseur h_n constante, présente dès l'instant initial sur une très mince couche de glace (figure 2). On note T_{nG} la température à l'interface neige/glace.

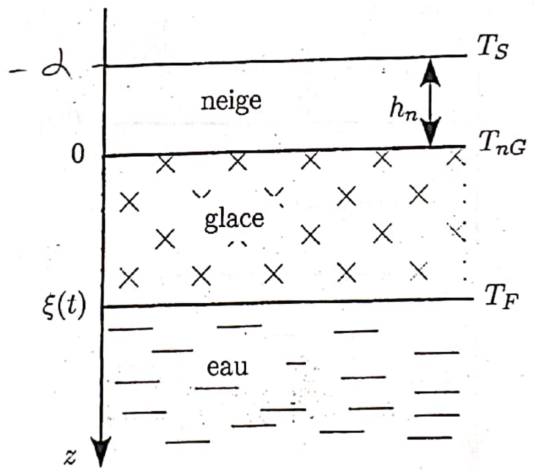


Figure 2

1. Quelle est la forme des profils de température au sein de la neige et de la glace en régime quasi stationnaire ? Quelle condition doit être vérifiée à l'interface neige/glace ?

2. Soit J_{Qz} la composante verticale de la densité de courant d'énergie $\vec{J}_Q$. Exprimer J_{Qz} en fonction de $T_{nG} - T_S$, puis de $T_F - T_{nG}$. Exprimer alors J_{Qz} en fonction de $T_F - T_S$ et de $\xi(t)$.

3. En déduire la nouvelle équation différentielle portant sur ξ. Montrer que la solution satisfaisant aux conditions initiales est :

$$\xi(t) = \sqrt{2Dt + \xi_n^2} - \xi_n$$

où ξ_n est une longueur caractéristique que l'on explicitera.

4. *Application numérique* : Calculer l'épaisseur de glace obtenue après un jour, une semaine, un mois et six mois pour $T_S = -30°\text{C}$ et $h_n = 0,2$ m.

5. La neige joue-t-elle un rôle dans la croissance des couverts de glace ?

III. Variation saisonnière de la glace arctique

Dans cette partie, toutes les températures sont exprimées en degré Celsius et toutes les durées en jour. On admet que l'évolution de la banquise au-delà du cercle polaire est entièrement contrôlée par l'équilibre qu'elle entretient avec l'atmosphère. Un modèle simple prédit que le flux surfacique d'énergie reçue par la banquise est de la forme

$$J_Q(0^-) = B_i(T_i - T)$$

où T est la température de surface de la banquise.

Les paramètres B_i et T_i peuvent prendre deux valeurs suivant la saison. On admettra qu'il n'existe que deux saisons appelées saison chaude J et saison froide N. Chacune dure six mois. On ne prend pas en compte la salinité de l'eau de mer ; on considère que la banquise gèle à 0°C et qu'elle est entièrement caractérisée par sa température de surface $T(t)$ (en contact avec l'air) et son épaisseur $h(t)$ (figure 3). On se place dans l'approximation quasi-stationnaire (cf. **I.3.**) et l'on note $t_{1/2}$ la durée d'une demie année.

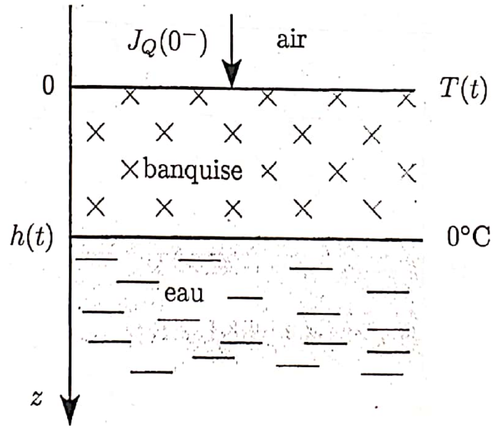


Figure 3

La saison froide

Au début de la saison froide, la banquise a une épaisseur h_0 et une température uniforme de 0°C.

1. Première phase. On admet que la banquise ne fait que se refroidir et son épaisseur reste égale à h_0. On modélise à tout instant la distribution de température de 0°C à $T(t)$ dans la banquise par une loi linéaire.

a) Quelle quantité d'énergie (par unité de surface) doit-on fournir à la banquise quand sa température de surface change de dT ?

b) En déduire l'équation d'évolution de $T(t)$.

c) On admet que cette phase dure tant que le flux thermique dans la banquise calculé dans ce modèle reste inférieur au flux surfacique. À quelle température T_0 a-t-on égalité des densités de courant thermique en surface ? unitaires ?

d) Au bout de quelle durée t_0 la température de surface a-t-elle atteint T_0 ?

On introduira $\tau_0 = \dfrac{\rho_G c_G h_0}{2B_N}$, $h_N = \dfrac{\lambda_G}{B_N}$.

e) *Application numérique* : calculer h_N puis T_0, τ_0 et t_0 pour une épaisseur initiale h_0 de 1 m, 3 m et 5 m.

2. Deuxième phase : la couche de glace se met à croître ; on suppose toujours la distribution de température linéaire mais avec un flux thermique égal à celui imposé à la surface.

a) Exprimer la densité de courant thermique au sein de la banquise en fonction de $T(t)$ et de $h(t)$. Montrer que la condition d'égalité des flux détermine T en fonction de h ; exprimer T en fonction de h à l'aide de T_N et de h_N.

b) Reprendre dans le cadre de ce modèle l'équation (1).

On pose $\tau_N = -\dfrac{\rho_G L h_N^2}{2\lambda_G T_N} = -\dfrac{\rho_G L \lambda_G}{2B_N^2 T_N}$. Montrer que, pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1/2}$,

$$h(t) = h_N \left[\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau_N} + \left(1 + \frac{h_0}{h_N}\right)^2} - 1\right]$$

c) *Application numérique* : calculer l'épaisseur de la banquise $h_{1/2}$ et sa température de surface $T_{1/2}$ à la fin de la saison froide pour une épaisseur initiale h_0 de 1 m, 3 m et 5 m.

La saison chaude

L'apparition du soleil change le bilan thermique au niveau de la surface de la banquise. Il devient positif et la banquise va se réchauffer avant de fondre en surface.

3. Troisième phase. La banquise commence d'abord par se réchauffer jusqu'à ce que toute sa masse atteigne 0°C. On adopte le même modèle qu'en **III.1.**

a) On pose $\tau_1 = \dfrac{\rho_G c_G h_{1/2}}{2B_J}$. Montrer que la durée t_1 de ce réchauffement s'écrit $t_1 = \tau_1 \ln\left(1 - \dfrac{T_{1/2}}{T_J}\right)$.

b) *Application numérique* : calculer t_1 pour une épaisseur initiale h_0 de 1 m, 3 m et 5 m.

4. Quatrième phase. La banquise fond par sa surface au contact de l'air.

a) Montrer que, dans cette étape, l'épaisseur de la banquise décroît linéairement avec le temps.

b) *Application numérique* : calculer les épaisseurs obtenues à la fin de la saison chaude pour un couvert en début de saison froide h_0 de 1 m, 3 m et 5 m.

À partir des résultats numériques, montrer que ce modèle rend plausible pour $h(t)$ l'existence d'une solution périodique de période un an.

* *
*

/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE CONCOURS D'ADMISSION 2003 FILIÈRE MP

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

La glace dans la nature

I Le problème de Stefan

1. a) La loi de Fourier $\vec{J}_Q = -\lambda_G \overrightarrow{\text{grad}}(T_G)$ devient, pour ce problème unidimensionnel, $J_{Qz} = -\lambda_G \dfrac{\partial T_G}{\partial z}$.

b) L'équation de bilan local d'enthalpie (on est ici à pression constante, sans sources volumiques d'enthalpie) est $\text{div}(\vec{J}_Q) + \rho_G c_G \dfrac{\partial T_G}{\partial t} = 0$. En la combinant avec la loi de Fourier, on obtient $\boxed{\lambda_G \Delta(T_G) = \rho_G c_G \dfrac{\partial T_G}{\partial t}}$ (λ_G est uniforme). À une dimension, $\lambda_G \dfrac{\partial^2 T_G}{\partial z^2} = \rho_G c_G \dfrac{\partial T_G}{\partial t}$.

c) Les conditions aux limites sont : $\forall\ t > 0 \quad T_G(0,t) = T_S$ et $T_G(\xi(t),t) = T_F$. Elles ne permettraient de déterminer T_G que si on connaissait la fonction $\xi(t)$ (il n'y a pas lieu d'introduire de conditions initiales car, à $t = 0$, ξ est nul ; il n'y a pas de glace).

d) La phase liquide est en contact thermique avec un système plus froid (la glace). Elle ne peut alors que se refroidir. Mais, étant au départ à T_F sous la pression d'équilibre correspondante, elle ne peut se refroidir qu'en se solidifiant. La partie non solidifiée ne s'est donc pas refroidie et est restée à la température uniforme T_F. La densité de courant d'énergie thermique est donc nulle dans la phase liquide (utile pour **2.b.**).

e) Le volume massique de la glace est plus élevé que celui du liquide. Une masse donnée solidifiée occupe donc plus de place qu'avant sa solidification. Comme la paroi est fixe, le liquide est repoussé dans le sens z croissant. L'eau a une vitesse uniforme perpendiculaire à la paroi fixe.

2. a) Entre t et $t + \mathrm{d}t$ la masse de glace a augmenté de $\boxed{\mathrm{d}m = \rho_G S \dot{\xi}(t)\mathrm{d}t}$.

b) Pour la masse $\mathrm{d}m$ (système fermé), la solidification à la température de fusion s'accompagne d'une variation d'enthalpie $-L\mathrm{d}m$ qui (à pression constante et sans travail autre que celui des forces de pression) est égale à l'énergie thermique reçue. Cette dernière intervient uniquement en $z = \xi(t)$ (à travers la surface S) car le courant thermique dans le liquide en $z = \xi(t + \mathrm{d}t)$ est nul (voir **1.d.**). Alors $-L\mathrm{d}m = -S\,\mathrm{d}t\lambda_G \left.\dfrac{\partial T_G}{\partial z}\right|_{\xi(t)}$.

c) On remplace $\mathrm{d}m$ par l'expression du **2.a)** pour obtenir :

$$\boxed{\rho_G L \dot{\xi}(t) = \lambda_G \left.\frac{\partial T_G}{\partial z}\right|_{\xi(t)}} \qquad (1)$$

3. a) On ne peut atteindre un régime permanent car :

i) la condition limite $T = T_F = Constante$ est imposée en une position ξ variable au cours du temps.

ii) $T_F \neq T_S$ (donc la solution permanente T_G uniforme égale à T_S n'est pas possible ici).

b) Si on annule la dérivée temporelle dans l'équation de la chaleur, on en déduit que $\dfrac{\partial^2 T_G}{\partial z^2}$ est nulle donc que T_G est fonction affine de z. Avec les conditions aux limites $T_G = T_S + \dfrac{z}{\xi}(T_F - T_S)$. Alors $\dfrac{\partial T_G}{\partial z} = \dfrac{T_F - T_S}{\xi}$.

c) L'équation (1) conduit à $\lambda_G \dfrac{T_F - T_S}{\xi} = \rho_G L\dot{\xi}$. On pose $D = \lambda_G \dfrac{T_F - T_S}{\rho_G L}$. L'équation s'écrit $\boxed{\xi\dot{\xi} = D}$ qui, compte tenu de la nullité de ξ à $t = 0$, s'intègre en $\xi^2 = 2Dt$. L'évolution de x en $\sqrt{t}$ est classique dans un problème de diffusion. Ici, D n'est pas le coefficient de diffusion thermique de la glace mais il joue un rôle analogue.

d) *Application numérique :* $D = 2{,}18 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Durée	un jour	une semaine	un mois (30 jours)	six mois (182,6 jours)
Épaisseur	19 cm	51 cm	1,06 m	2,62 m

II Effet d'une couche de neige

1. Comme au **I.3.b)**, la température est fonction affine de z dans chaque phase. La densité de courant d'énergie (normale) est continue à l'interface neige/glace.

2. $J_{Qz} = \lambda_n \dfrac{T_S - T_{nG}}{h_n} = \lambda_G \dfrac{T_{nG} - T_F}{\xi}$. Avec la seconde égalité on calcule $T_{nG} = \dfrac{T_S \dfrac{\lambda_n}{h_n} + T_F \dfrac{\lambda_G}{\xi}}{\dfrac{\lambda_n}{h_n} + \dfrac{\lambda_G}{\xi}}$ (analogue thermique de la relation de Millmann) et, avec la première, on en déduit $\boxed{J_{Qz} = \dfrac{T_S - T_F}{\dfrac{\xi}{\lambda_G} + \dfrac{h_n}{\lambda_n}}}$.

Remarque 1 : Cette dernière expression s'obtient plus rapidement avec le concept de résistance thermique : le dénominateur correspond à l'association en série des deux résistances surfaciques $\dfrac{\xi}{\lambda_G}$ (glace) et $\dfrac{h_n}{\lambda_n}$ (neige).

Remarque 2 : L'expression obtenue est la même que celle utilisée à la question **I.3.c)** au remplacement près de $\dfrac{\xi}{\lambda_G}$ par $\dfrac{\xi}{\lambda_G} + \dfrac{h_n}{\lambda_n}$ c'est à dire qu'on remplace ξ par $\xi_{\text{eff}} = \xi + \xi_n$ avec $\boxed{\xi_n = h_n \dfrac{\lambda_G}{\lambda_n}}$. ξ_n représente l'épaisseur de glace qui offrirait la même résistance thermique que la couche de neige.

3. La remarque 2 précédente et le fait que $\dot{\xi} = \dot{\xi}_{\text{eff}}$ permettent d'utiliser directement les résultats du **I.3.c)**. L'équation d'évolution $\xi_{\text{eff}}\dot{\xi}_{\text{eff}} = D$ a pour solution (avec la condition $\xi_{\text{eff}}(0) = \xi_n$) $\xi_{\text{eff}}^2 = 2Dt + \xi_n^2$ d'où, en revenant à ξ : $\boxed{\xi = \sqrt{2Dt + \xi_n^2} - \xi_n}$.

4.

Durée	un jour	une semaine	un mois (30 jours)	six mois (1/2 an)
Sans neige	19 cm	51 cm	1,06 m	2,62 m
Avec neige	1,3 cm	8,7 cm	34 cm	1,53 m

5. La neige, en ajoutant une couche peu conductrice, rend beaucoup moins efficace la croissance de la glace tant que celle-ci n'est pas d'épaisseur grande devant $\xi_n = 1{,}48$ m, c'est à dire pendant plusieurs mois.

III Variation saisonnière de la glace arctique

Suivant les instructions de l'énoncé, les températures seront exprimées en degré Celsius. En particulier, T_F sera, dans la suite, systématiquement remplacé par 0.

1. a) La température dans la glace est $T_G(z,t) = T(t)\left(1-\dfrac{z}{h_0}\right)$. La couche de cote z, de section S et d'épaisseur $\mathrm{d}z$ subit une variation d'enthalpie $\rho_G c_G S\,\mathrm{d}z\left(1-\dfrac{z}{h_0}\right)\mathrm{d}T$ donc la variation totale d'enthalpie par unité de surface est $\displaystyle\int_0^{h_0}\rho_G c_G \mathrm{d}z\left(1-\frac{z}{h_0}\right)\mathrm{d}T = \rho_G c_G\frac{h_0}{2}\mathrm{d}T$.

b) En identifiant cette variation d'enthalpie au transfert thermique surfacique $B_N\left(T_N - T\right)\mathrm{d}t$ on obtient l'équation $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}T}{T-T_N} = -\dfrac{\mathrm{d}t}{\tau_0}}$ avec $\boxed{\tau_0 = \dfrac{\rho_G c_G h_0}{2B_N}}$ qui s'intègre en $\ln\dfrac{T-T_N}{-T_N} = -\dfrac{t}{\tau_0}$ donc $\boxed{T = T_N\left(1-e^{-t/\tau_0}\right)}$.

c) Le flux thermique dans la banquise est, par unité de surface, $-\lambda_G\dfrac{\partial T_G}{\partial z} = \dfrac{\lambda_G}{h_0}T$. Il devient égal au flux à l'interface air-banquise lorsque $\dfrac{\lambda_G}{h_0}T = B_N\left(T_N - T\right)$ c'est à dire $\boxed{T = T_0 = \dfrac{T_N}{1+h_N\,/\,h_0}}$. $\boxed{h_N = \dfrac{\lambda_G}{B_N}}$ représente l'épaisseur de glace qui aurait la résistance thermique associée à l'interface air-banquise (coefficient conducto-convectif B_N).

d) D'après la question **b)** T vaut T_0 lorsque $t = t_0 = \tau_0\ln\dfrac{-T_N}{T_0-T_N}$ c'est à dire que $\boxed{t_0 = \tau_0\ln\left(1+\dfrac{h_0}{h_N}\right)}$.

e) $\boxed{h_N = 1{,}23\text{ m}}$. Voir le tableau à la fin du corrigé pour les autres applications numériques. Le temps caractéristique τ_0 est proportionnel à l'épaisseur initiale et la durée de cette première phase augmente plus vite que h_0.

2. a) D'après la loi de Fourier, la densité de courant thermique est $J_{Qz} = \lambda_G\dfrac{T}{h}$. Elle est égale au flux imposé en surface donc $\lambda_G\dfrac{T}{h} = B_N\left(T_N - T\right)$ qui conduit à $T = \dfrac{T_N}{1+h_N\,/\,h}$ (relation analogue à celle du **1.c.**)

b) On en déduit $J_{Qz} = \lambda_G\dfrac{T_N}{h+h_N}$. Comme dans la partie **II**, on se ramène à la partie **I** (question **3.c.**) en remplaçant ξ par $h+h_N$, T_S par T_N et avec la contrainte initiale que h vaut h_0 à $t = t_0$. L'équation d'évolution est $\left(h+h_N\right)\dot{h} = D$.

Donc $\boxed{\left(h+h_N\right)^2 = 2D\left(t-t_0\right)+\left(h_0+h_N\right)^2}$ avec ici $D = -\dfrac{\lambda_G T_N}{\rho_G L}$ qui peut s'écrire $D = \dfrac{h_N^2}{2\tau_N}$ en utilisant la constante de temps τ_N introduite par l'énoncé. $\left(h+h_N\right)^2 = h_N^2\dfrac{t-t_0}{\tau_N}+\left(h_0+h_N\right)^2$ d'où :

$$\boxed{h = h_N\left(\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau_N}+\left(1+\frac{h_0}{h_N}\right)^2}-1\right)}$$

c) Voir le tableau en fin de corrigé ($h_{1/2}$ est obtenu en remplaçant t par 6 mois, $T_{1/2}$ l'est à l'aide du **III.2.a.**). L'épaisseur n'augmente notablement pendant la nuit arctique que si elle est au départ inférieure à 3 m.

3.a) Le problème est exactement le même qu'à la question **III.1.b)** en remplaçant (B_N, T_N) par (B_J, T_J) et h_0 par $h_{1/2}$.

$\dfrac{\mathrm{d}T}{T-T_J} = -\dfrac{\mathrm{d}t}{\tau_1}$ s'intègre avec la condition initiale $T(0) = T_{1/2}$ en $\ln\left(\dfrac{T-T_J}{T_{1/2}-T_J}\right) = -\dfrac{t}{\tau_1}$. La date t_1 est obtenue lorsque T est nulle donc $\boxed{t_1 = \tau_1 \ln\left(1-\dfrac{T_{1/2}}{T_J}\right)}$.

b) Voir le tableau en fin de corrigé. t_1 est à peu près proportionnel à l'épaisseur de banquise $h_{1/2}$ (influence de τ_1).

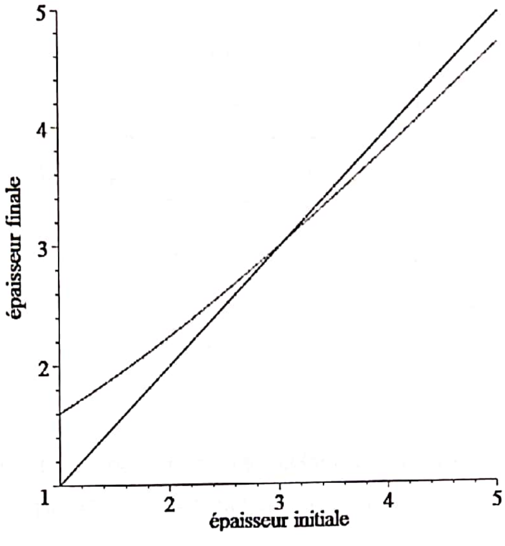
4.a) Le seul flux thermique reçu par la banquise l'est à sa surface supérieure qui est à la température de changement d'état $T_F = 0$ sous la pression constante de 1 atmosphère. Si on suppose que l'eau liquide est évacuée, le flux surfacique vaut $B_J\left(T_J - T_F\right)$ et est constant. Le bilan enthalpique $\rho_G L\left(-\dot{h}\right) = B_J T_J$ montre que l'épaisseur de la banquise décroît à la vitesse constante $-\dfrac{B_J T_J}{\rho_G L}$ (qui vaut 6,23 mm par jour) donc $\boxed{h = h_{1/2} - \dfrac{B_J T_J}{\rho_G L}\left(t-t_1\right)}$.

b) Voir le tableau en fin de corrigé. L'épaisseur finale est fonction croissante de l'épaisseur initiale. La pente de cette fonction est inférieure à 1. La suite des épaisseurs prises d'année en année convergera donc vers la valeur stationnaire qui vérifie $h_{\text{finale}} = h_{\text{initiale}}$ et qui est très proche de 3 m. Ceci suppose bien sûr que les conditions météorologiques se reproduisent à l'identique d'année en année.

épaisseur initiale h_0	1,0 m	3,0 m	5,0 m
T_0 (°C)	–19,4	–30,7	–34,7
τ_0 (jours)	6,1	18,4	30,7
t_0 (jours)	3,7	22,8	49,9
$h_{1/2}$ (m)	2,60	3,93	5,55
$T_{1/2}$ (°C)	–29,4	–33,0	–35,4
t_1 (jours)	21,7	35,1	51,9
épaisseur finale (m)	1,60	3,01	4,74

Compléments

- La courbe représentant h_{finale} en fonction de h_0 est dessinée ci-contre. Elle coupe la diagonale $h_{\text{finale}} = h_0$ au point d'abscisse $h_0 = 3{,}04$ m avec une pente inférieure à 1. Le point fixe est stable.
- L'utilisation de lois affines pour $T_G(z)$ (régime quasi-permanent) peut être justifiée par le calcul du temps caractéristique d'établissement du régime permanent dans une couche d'épaisseur h : $\tau_{\text{perm}} = \dfrac{h^2}{\pi^2 D_G}$ où D_G est la diffusivité thermique de la glace $D_G = \dfrac{\lambda_G}{\rho_G c_G}$. L'application numérique pour $h = 1$ m conduit à un temps caractéristique de l'ordre de 1 jour qui est assez petit devant les durées considérées ici.



X 2003 MP Formation de la banquise

Remarques après correction

Qualité de la rédaction :

L'énoncé de ce problème donnait les résultats de pratiquement toutes les questions importantes. Cela peut paraître confortable aux candidats car cela leur permet de contrôler et corriger leurs résultats ou bien, s'ils ne savent pas faire une question, de ne pas être bloqués et de poursuivre.

Mais cela peut réserver de très mauvaises surprises en ce qui concerne la note attribuée. En effet, si le résultat est donné, toute la notation porte sur la qualité de la rédaction et du raisonnement. Si les arguments décisifs sont absents ou bien mal mis en évidence, le correcteur pourra très bien n'attribuer aucun crédit à la réponse !

Il faut être très vigilant (soin, précision, rigueur…) lors de la résolution d'une question dont la réponse est donnée.

Variantes du premier principe :

Pour un système fermé, les deux versions les plus utiles du premier principe sont (dans les cas simples) :

i. $\Delta U = W + Q$ *ii.* À pression constante, $\Delta H = Q$

Dans ce problème, il fallait privilégier la seconde version pour deux raisons. La première est que, la glace ayant un volume massique plus grand que l'eau liquide, les volumes des systèmes fermés étudiés varient et il y a donc un travail (W) non nul des forces de pression. La seconde est que, au cours d'un changement d'état liquide–solide, c'est la variation d'enthalpie qui est simple à exprimer (à partir de l'enthalpie de fusion).

Bilans enthalpiques :

Dans les arguments utilisés, il ne faut pas confondre ce qui relève des propriétés de H et ce qui relève du premier principe de la thermodynamique. Ainsi, pour les trois propositions suivantes :

i. À température constante, lors d'un changement d'état $\Delta H = L \times m$

ii. À pression constante, sans changement d'état $\Delta H = C_p \Delta T$

iii. À pression constante, sans variation d'énergie macroscopique et sans autre travail que celui des forces de pression $\Delta H = Q$

i. et *ii.* sont simplement des propriétés de la fonction d'état H. *iii.*, pour sa part, est l'expression du premier principe.

Dans la même veine, l'équation $\lambda_G \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{\xi(t)} = \rho_G L \dot{\xi}(t)$ de la question **I.2.c** est l'expression du premier principe (le membre de gauche est proportionnel à δQ et celui de droite à $\mathrm{d}H$). Ce n'est pas une condition de continuité de J_Q.

Régime quasi-stationnaire :

L'énoncé définit fort bien l'approximation quasi-stationnaire (page **3** question **I.3**) :

« *La distribution de température dans la glace est à tout instant celle de l'état stationnaire pour l'épaisseur de glace formée à cet instant* ».

« *distribution de température…* » signifie que la fonction $T(z)$ est la même qu'en régime stationnaire.

Le raisonnement à faire figurer sur la copie n'est alors pas « <u>en régime quasi-stationnaire</u> $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ est proche de 0 (négligeable) donc $\Delta T = 0$ ». Ceci n'a, en effet, pas de signification. Dire que quelque chose est proche de 0 n'a pas de sens. Il faut avoir un élément de comparaison. Or ici, il n'y en a pas qui soit visible directement.

La rédaction correcte est « <u>En régime permanent,</u> $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta T_{\text{permanent}} = 0$ ». Cela permet de calculer $T_{\text{permanent}}$ (ici une fonction affine de z) et on dit ensuite « En régime quasi-stationnaire $T(z,t)_{\text{quasi-stat.}} \approx T(z)_{\text{permanent}}$ » ce qui a la signification suivante : la différence entre $T(z,t)_{\text{quasi-stat.}}$ et $T(z)_{\text{permanent}}$ est négligeable par rapport aux écarts de température typiques du problème, par exemple ici $T_N - T_F$.

Un petit point technique :

À plusieurs reprises, il fallait résoudre une équation de la forme $\dot{\xi}\xi + \dot{\xi}h = K$. La façon la plus efficace pour la suite est de remarquer que le membre de gauche est $\dot{\xi}\xi + \dot{\xi}h = \dot{\xi}(\xi + h) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\xi + h)^2$ donc la solution unique de cette équation vérifiant $\xi(t = 0) = \xi_0$ est $(\xi + h)^2 = 2Kt + (\xi_0 + h)^2$. Alors, directement, $\xi + h = \sqrt{2Kt + (\xi_0 + h)^2}$.
Il n'a pas été nécessaire ici de de trouver les racines d'un polynôme de degré 2.

À signaler : d'après le rapport, les correcteurs ont considéré comme non valide la méthode consistant à simplement vérifier (**I.3.c, II.3, III.2.b**) que l'expression proposée par l'énoncé était bien solution de l'équation différentielle car cette méthode ne montre pas que c'est la forme nécessaire de la solution. (Pour faire bref : on n'est plus en classe de terminale !).

Le concept de résistance thermique :

Il permettait de traiter très rapidement certaines parties. Il est utilisable en régime quasi-stationnaire. Ainsi, en partie **II**, Il suffisait d'écrire $T_S - T_F = R_{Th}P_{Th} = R_{Th}J_Q S$ où R_{Th} est la résistance thermique des couches de neige et de glace en série donc $R_{Th} = \frac{h_n}{\lambda_n S} + \frac{\xi}{\lambda_G S}$. Cette méthode n'était pas mise en avant dans ce problème car les programmes de l'époque (2003) n'insistaient pas autant que ceux de 2014 sur le concept de résistance thermique.

Les questions qui n'ont pas toujours été comprises ⇒ lecture attentive du corrigé pour tous :

I.1.d. Ici l'eau liquide est complètement immobile. La convection ne joue aucun rôle.

I.2.c. La conclusion de la question **I.1.d** (température uniforme dans l'eau liquide) doit être mentionnée comme argument pour justifier qu'aucun transfert thermique n'a lieu entre la glace et l'eau encore liquide.

Une subtilité à l'interface de fusion $z = \xi(t)$:

Le flux thermique normal n'est, exceptionnellement, pas continu à l'interface. En effet la « réaction de solidification » s'y produisant est responsable d'un « terme source » dans le bilan enthalpique. C'est l'analogue surfacique du terme volumique associé à une réaction chimique $p = -v\Delta_r H^\circ$. Il est responsable d'une discontinuité du courant thermique qui peut être écrite de façon générale $\vec{j}_{th} \cdot \vec{n}_2 - \vec{j}_{th} \cdot \vec{n}_1 = \rho L\dot{\xi}$. C'est tout à fait analogue à la relation de passage de l'électrostatique $\vec{E} \cdot \vec{n}_2 - \vec{E} \cdot \vec{n}_1 = \sigma / \varepsilon_0$.

Un exemple à ne pas suivre :

L'énoncé utilise le terme « eau » par opposition à « glace », c'est-à-dire pour signifier « eau liquide ». Cela prête à confusion puisque la glace est aussi de l'eau, sous forme solide ! Il est de loin préférable, dans une situation où l'eau peut-être dans plusieurs états d'utiliser l'expression « eau liquide » (ou bien « vapeur d'eau » si l'état vapeur » intervient).

La dernière question ; but de tout le problème et de ses applications numériques :

III.4. L'existence et la stabilité du régime périodique étaient l'aboutissement de tous les raisonnements précédents. Les résultats numériques donnaient deux informations :

i. L'existence d'un régime périodique : en partant de $h_0 = 3\ \mathrm{m}$, on retrouvait la même hauteur un an plus tard.

ii. La stabilité du régime périodique : en partant d'une valeur différente de $3\ \mathrm{m}$, on retrouvait un an plus tard une valeur plus proche de $3\ \mathrm{m}$, que l'on parte de $1\ \mathrm{m} < 3\ \mathrm{m}$ ou de $5\ \mathrm{m} > 3\ \mathrm{m}$.

Ces deux informations étaient nécessaires pour montrer qu'un régime périodique pouvait s'établir et donc être observable. Parmi ceux qui ont terminé les calculs numériques, très peu en ont tiré les conclusions.