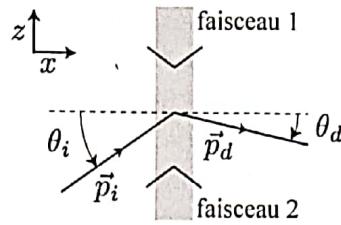


Faire en entier → Mardi 12 Mars



Dans la zone éclairée par les faisceaux, les atomes absorbent et émettent des photons ce qui conduit au phénomène de diffraction. On note  $\theta_i$  l'angle d'incidence des atomes et  $\theta_d$  l'angle d'émergence. On considère que le diamètre des faisceaux lasers est suffisamment grand pour que l'on puisse les décrire par des ondes planes progressives monochromatiques. Le champ électrique de chaque faisceau s'écrit alors en notation complexe :

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(\vec{r}, t) &= E_0 e^{-i(\Omega t + Kz)} \vec{x} \\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) &= E_0 e^{-i(\Omega t - Kz)} \vec{x}\end{aligned}$$

### Approche corpusculaire

Dans un premier temps, nous allons décrire le phénomène de diffraction en utilisant une approche corpusculaire. Le processus de diffraction est alors modélisé de la façon suivante : un atome est diffracté en absorbant un photon de l'onde 1 et en émettant un photon dans l'onde 2.

- Q68.** On rappelle que la quantité de mouvement d'un photon dans une onde plane de vecteur d'onde  $\vec{K}$  est  $\hbar \vec{K}$ . On note  $\vec{p}_i$  la quantité de mouvement initiale de l'atome. Quelle est la quantité de mouvement finale  $\vec{p}_d$  de l'atome après le processus de diffraction ?
- Q69.** On rappelle que l'énergie d'un photon dans une onde plane de pulsation  $\Omega$  est  $\hbar\Omega$ . En faisant un bilan d'énergie, donner une deuxième relation reliant  $\vec{p}_i$  et  $\vec{p}_d$ . On note  $m$  la masse de l'atome.
- Q70.** En déduire qu'un atome ne peut être diffracté que si l'angle d'incidence  $\theta_i$  a une valeur bien précise que l'on exprimera en fonction de  $\hbar$ ,  $K$  et  $p_i$ . Que vaut alors l'angle  $\theta_d$ ? On dessinera les trois vecteurs  $\vec{p}_i$ ,  $\vec{p}_d$  et  $\hbar \vec{K}$  lorsque cette condition est remplie.
- Q71.** On considère le cas particulier  $\theta_i = \pi/2$ . Donner les expressions correspondantes de  $\vec{p}_i$  et  $\vec{p}_d$ .

### Approche ondulatoire

Nous allons maintenant décrire le processus de diffraction par une approche ondulatoire similaire à l'approche utilisée habituellement en optique. Une onde de matière est décrite par un champ scalaire complexe  $\psi(\vec{r}, t)$  qui vérifie l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

où  $V(\vec{r}, t)$  est l'énergie potentielle des particules constituant l'onde de matière, ici les atomes, et  $m$  leur masse.

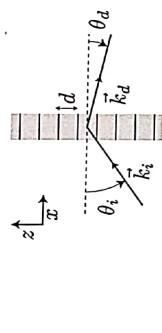
- Q72.** On considère tout d'abord une onde de matière se propageant dans l'espace libre ( $V = 0$ ). On cherche une solution de l'équation de Schrödinger sous la forme  $\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-i\omega t}$ . Quelle est l'équation vérifiée par  $\phi(\vec{r})$  ?

On définit  $\mathcal{I} = \frac{\langle E^2 \rangle}{\omega C}$ ,  $\vec{E} = \hat{E}_0 \cos(\omega t - k_0 z)$   $\Rightarrow \mathcal{I} = \frac{\omega_0}{2} \langle E^2 \rangle$

**Q73.** En déduire que l'équation de Schrödinger admet pour solution des ondes planes progressives monochromatiques dont on donnera la relation de dispersion. Quelle est la différence fondamentale entre ondes de matière et ondes lumineuses ?

**Q74.** Calculer la vitesse de groupe d'une onde de matière. En déduire une relation entre la quantité de mouvement  $\vec{p}$  des atomes qui constituent l'onde et son vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

On considère maintenant la propagation dans la zone éclairée par les faisceaux lasers. Un atome dans cette région subit une force qui dérive d'un potentiel  $V(\vec{r}) = -\alpha_r/(2\hbar c) I(\vec{r}) + \text{cste}$ , où  $I(\vec{r})$  est l'intensité lumineuse et  $\alpha_r$  la partie réelle de la polarisabilité de l'atome. On supposera  $\alpha_r > 0$ . On note respectivement  $\vec{k}_i$  et  $\vec{k}_d$  les vecteurs d'onde de matière incidente et émergente.



**Q75.** Calculer l'intensité lumineuse  $I(z)$  et l'expression de  $V(z)$  en choisissant la constante de telle sorte que la moyenne spatiale de  $V(z)$  soit nulle. Quelle est la période  $d$  du potentiel qui diffracte les atomes ?

**Q76.** En utilisant vos connaissances sur les phénomènes d'interférence, indiquer les vecteurs d'onde  $\vec{k}_d$  pour lesquels on s'attend à des interférences constructives.

On se restreint maintenant à la situation considérée à la question Q71, c'est-à-dire que l'onde incidente possède un vecteur d'onde  $\vec{k}_i = K\vec{z}$ .

**Q77.** D'après la question précédente, quelle est la valeur de  $\vec{k}_d$  qui correspond au premier ordre diffusé vers le bas ?

**Q78.** On cherche une solution de l'équation de Schrödinger sous la forme  $\psi(z, t) = c_0(t)e^{-i(\omega t - Kz)} + c_1(t)e^{-i(\omega t + Kz)}$ . Que vaut  $\omega$ ? A quelle onde correspond chacun des termes ?

**Q79.** Donner les deux équations vérifiées par  $c_0(t)$  et  $c_1(t)$ . On négligera certains termes et on introduira la quantité  $\beta = \alpha_r E_0^2 / (4\hbar c)$ .

**Q80.** On suppose que les faisceaux lasers sont initialement éteints puis sont allumés à l'instant  $t = 0$ . Quelles sont les conditions initiales vérifiées par  $c_0(0)$  et  $c_1(0)$  ?

**Q81.** En déduire les expressions de  $c_0(t)$  et  $c_1(t)$ . Tracer l'allure de  $|c_0(t)|^2$  et  $|c_1(t)|^2$ .

**Q82.** On appelle  $\tau$  la plus courte durée pendant laquelle il faut allumer les faisceaux pour séparer l'onde incidente en deux ondes d'égale amplitude. On réalise ainsi une lame séparatrice 50/50. Donner l'expression de  $\tau$  en fonction de  $\beta$ .

**Q83.** On suppose que l'on éteint les faisceaux à  $t = \tau$ . Donner l'expression de  $\psi(z, t)$  pour  $t > \tau$ .

**Q84.** Par analogie avec l'optique, on peut dire que cette solution est composée d'une onde transmise et d'une onde réfléchie. Identifier chaque terme dans l'expression de  $\psi(z, t)$ .

La durée pendant laquelle les faisceaux restent allumés est suffisamment courte pour que l'on puisse supposer que la position d'un atome reste inchangée au cours du processus de diffraction. On note  $z_0$  cette position. Pour l'atome considéré, tout se passe comme si l'onde de matière associée à l'atome était réfléchie par un dioptrique plan situé en  $z = z_0$ .

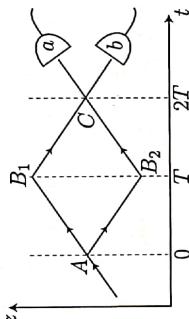
**Q85.** D'après les expressions de l'onde réfléchie et de l'onde transmise identifiées à la question précédente, montrer que le coefficient de réflexion de ce dioptre est  $r_\tau = (1/\sqrt{2}) \exp(-2iKz_0 + i\pi/2)$  et que le coefficient de transmission est  $t_\tau = 1/\sqrt{2}$ .

**Q86.** On suppose maintenant que l'on éteint les faisceaux à  $t = 2\tau$ . Donner l'expression de  $\psi(z, t)$  pour  $t > 2\tau$ . Quel est l'élément optique ainsi réalisé? Montrer que les coefficients de réflexion et de transmission sont donnés par  $r_{2\tau} = \exp(-2iKz_0 + i\pi/2)$  et  $t_{2\tau} = 0$ .

### Interféromètre atomique

Pour réaliser un interféromètre, on combine trois impulsions lasers : une impulsion de durée  $\tau$  à  $t = 0$ , une impulsion de durée  $2\tau$  à  $t = T$  et une impulsion de durée  $\tau$  à  $t = 2T$ . Comme précédemment, l'onde de matière incidente possède un vecteur d'onde  $K\vec{z}$ .

On peut dessiner dans un diagramme  $(z, t)$  les différentes trajectoires possibles dans l'interféromètre :



On obtient ainsi un tracé analogue au tracé des rayons lumineux dans un interféromètre optique. On suppose que  $\tau$  est négligeable devant la durée  $T$  entre les impulsions, que les atomes rentrent dans l'interféromètre au point  $A$  de coordonnée  $z_A = 0$  et que les atomes ne sont soumis à aucune force entre les impulsions.

On s'intéresse au signal mesuré par le détecteur  $a$ , on note  $\Delta\varphi_a$  la différence de phase entre les deux chemins menant au détecteur. On choisit la convention  $\Delta\varphi_a = \varphi_{A \rightarrow B_2 \rightarrow C} - \varphi_{A \rightarrow B_1 \rightarrow C}$  où chaque terme correspond à la phase accumulée sur le chemin en indice. La phase accumulée sur un chemin est la somme des phases dues à la propagation sur les différents segments qui composent le chemin et des phases dues aux réflexions lors des impulsions lasers.

**Q87.** On suppose que l'onde incidente contient  $N_0$  atomes. Par analogie avec l'optique, proposer une expression pour  $N_a$  le nombre d'atomes détectés en  $a$  en fonction de  $N_0$  et  $\Delta\varphi_a$ . Faire de même pour  $N_b$ .

**Q88.** Reproduire le schéma des trajectoires dans l'interféromètre et indiquer sur chaque segment de trajectoire le vecteur d'onde correspondant.

**Q89.** En utilisant les expressions obtenues en Q85 et Q86, calculer la phase due aux réflexions pour le chemin  $A \rightarrow B_2 \rightarrow C$  en fonction de  $K$ ,  $z_A$  et  $z_{B_2}$ . On fera attention au fait que la valeur de  $K$  qui apparaît dans les expressions obtenues en Q85 et Q86 est une grandeur algébrique qui dépend de la direction de l'onde incidente avant réflexion.

**Q90.** Faire de même pour les atomes qui empruntent le chemin  $A \rightarrow B_1 \rightarrow C$ . En déduire la contribution à  $\Delta\varphi_a$  des phases dues aux réflexions en fonction de  $K$ ,  $z_A$ ,  $z_{B_1}$ ,  $z_{B_2}$  et  $z_C$ .

**Q91.** Proposer une expression pour la phase due à la propagation sur le segment  $A \rightarrow B_1$  puis sur le segment  $B_1 \rightarrow C$ . En déduire la phase totale due à la propagation sur le chemin  $A \rightarrow B_1 \rightarrow C$ . Faire de même pour le chemin  $A \rightarrow B_2 \rightarrow C$ .

Q92. Indiquer, sans détailler les calculs, les coordonnées  $z_{B_1}$ ,  $z_{B_2}$  et  $z_C$ .

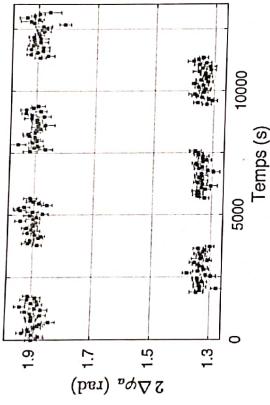
Q93. En déduire que  $\Delta\varphi_a = 0$ . Quel est le nombre d'atomes détectés en  $a$  ?

Q94. On considère maintenant que les atomes sont soumis à la gravité  $-g\hat{z}$  entre les impulsions. Reprendre le diagramme  $(z, t)$  de l'interféromètre et dessiner l'allure des trajectoires.

Q95. Calculer les nouvelles coordonnées des points  $z_{B_1}$ ,  $z_{B_2}$  et  $z_C$ . On rappelle qu'en  $t = 0$  les atomes sont en  $z = 0$  dans une onde de vecteur  $K\hat{z}$  et que la vitesse des atomes s'inverse lors d'une réflexion.

Q96. On admet que les phases dues à la propagation se compensent même en présence de la gravité. Le valeur de  $\Delta\varphi_a$  est donc toujours donnée par l'expression obtenue en Q90. En déduire que  $\Delta\varphi_a = -2KgT^2$ .

Q97. En 2008, une équipe de chercheurs de l'Université de Florence a utilisé un tel interféromètre pour mesurer  $G$  à partir de la méthode proposée dans la partie II. Dans leur expérience, le déplacement de la masse  $M$  induit une modification de la pesanteur  $\delta g = 7 \times 10^{-8} g$ . Calculer la variation correspondante du déphasage sachant que la longueur d'onde des faisceaux lasers est de 780 nm et que  $T = 160$  ms. Dans leur expérience, les chercheurs comparent les résultats de deux interféromètres atomiques et mesurent donc  $2\Delta\varphi_a$ . La courbe ci-dessous présente le résultat de cette mesure lorsque la masse  $M$  est déplacée périodiquement.



Fin de l'épreuve

\* \*

# ENS Ulm PC 2013

Quelques résultats (parties I et II : mécanique)

Q4.  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \simeq 7,31 \times 10^{-3}$

Q5.  $\alpha_g = \frac{Gm_e m_p}{hc} \simeq 3,23 \times 10^{-42}$

Q10.  $k\theta = \frac{2(GMm)}{d^2}$        $\theta = 1,17 \times 10^{-3}$  rad

Q13. On peut déterminer la constante de torsion en mesurant la période  $\tau$  des oscillations angulaires.

$$r^2 = 4\pi^2 \frac{2m\ell^2}{k} \text{ et } G = 4\pi^2 \frac{\hbar\ell^2\ell}{r^2 M}$$

Q14. Alors  $M_T = \frac{M}{\theta} \frac{R_{T\tau}^2}{d^2 P^2}$

Q17.  $a_n = 2GM/P_n(\cos\gamma)$  si  $n$  est pair ( $a_n = 0$  sinon).

Q18.  $Q = \frac{2M}{R^3}$

Q19.  $q = 2mr^2 = I$  (moment d'inertie du pendule par rapport à Oz)

Q24.  $\vec{\Gamma} = -2mr^2\dot{\omega}\vec{u}_z$

Q26.  $I\ddot{\omega} + \frac{3}{2}GqQ \sin(2\phi) = 0$  avec  $\phi = \omega_0 t + \int_0^t \delta\omega(u)du$ .

Q27. À l'ordre 0,  $\delta\omega = 0$  et  $\phi = \omega_0 t$ . À l'ordre 1,  $\delta\omega = \frac{3}{4} \frac{GqQ}{I\omega_0} \cos(2\omega_0 t)$ .

Q28.  $G = \frac{4}{3} \frac{I\omega_0 \delta\omega_0}{qQ} = \frac{4}{3} \frac{\omega_0 \delta\omega_0 R^3}{2M}$

Q32.  $\delta\omega_0 \simeq 8,655 \times 10^{-6}$  rad s $^{-1}$

Q33. La précision relative sur  $R$  est la moins bonne. L'incertitude relative sur  $G$  est alors donnée par  $\frac{\delta R}{R} \simeq 1,8 \times 10^{-5}$ . L'incertitude absolue est  $0,00012 \times 10^{-11}$  SI.

Q37.  $\|\vec{a}_1 - \vec{a}_2\| = GM \left( \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} \right)$ . Il faut que  $M \simeq 7500$  kg. C'est la masse d'une sphère de rayon 50 cm, de densité de l'ordre de 10.

Q38.  $g = 2\pi G\sigma$

Q39.  $\Delta g = 2\pi G\rho h \simeq 8,39 \times 10^{-6}$  m s $^{-2}$

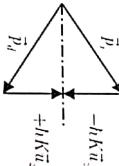
Q44. Les mesures interférométriques sont les plus appropriées pour la précision métrologique.

## ENS Ulm 2013 PC    Partie IV    Gravimètre atomique

68. Par conservation de la quantité de mouvement du système (isolé) atome-photon,  $\vec{p}_i - \hbar K \vec{u}_z = \vec{p}_d + \hbar K \vec{u}_z$ , donc  $\vec{p}_d = \vec{p}_i - 2\hbar K \vec{u}_z$ .

69. Par conservation de l'énergie du système atome-photon (choc élastique, les particules sont identiques avant et après le choc) et du fait que le photon partant a la même énergie que le photon incident, il faut que l'énergie cinétique de l'atome soit inchangée. Or  $E_c = \frac{p^2}{2m}$ . Il faut donc que  $(\vec{p}_d)^2 = (\vec{p}_i)^2$ .

70. Avec 68 et 69, on obtient alors  $-4\hbar K \vec{p}_i \cdot \vec{u}_z + 4\hbar^2 K^2 = 0$  c'est-à-dire  $p_i \sin \theta_i = \hbar K$ . En projetant l'équation de 68 sur  $\vec{u}_z$ , il vient  $p_d \sin \theta_d = p_i \sin \theta_i - 2\hbar K$  et donc  $p_d \sin \theta_d = -\hbar K$ . Comme  $p_i = p_d$  (69), il faut que  $\theta_d = -\theta_i$ .



71.  $\vec{p}_i = +\hbar K \vec{u}_z$  et  $\vec{p}_d = -\hbar K \vec{u}_z$

72. On étudie un état stationnaire vérifiant donc « *l'équation de Schrödinger indépendante du temps* » (avec  $V = 0$ )

$$\hbar \omega \phi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi.$$

73. Avec l'équation de 72, on peut trouver des solutions sous forme d'onde plane progressive ( $\phi = \phi_0 e^{i\omega t}$ ) à condition que  $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ . La vitesse de phase de ces ondes est  $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$ . Contrairement au cas des ondes lumineuses, la vitesse de phase ne vaut pas  $c$  et elle n'est même pas indépendante de  $k$  (dispersion).

74. La vitesse de groupe est  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$ . Alors, le vecteur d'onde  $\vec{k} = k \vec{u}_z$  vérifie  $\hbar \vec{k} = m v_g \vec{u}_z$ . On identifie la vitesse de groupe de l'onde (point de vue ondulatoire) à la vitesse de la particule (point de vue corpusculaire). Alors  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  (relation de de Broglie qui peut aussi être écrite  $p = \hbar / \lambda$ ).

75.  $E_x = E_{1x} + E_{2x} = 2E_0 e^{-i\Omega t} \cos Kz$ . En revenant au champ réel,  $\vec{E}_{\text{real}} = 2E_0 \cos \Omega t \cos Kz \vec{u}_z$  et  $\langle E^2 \rangle = 2E_0^2 \cos^2 Kz$ . Alors  $V = -\alpha_e E_0^2 [\cos^2 Kz + \text{cste}] = -\frac{\alpha_e E_0^2}{2} \cos 2Kz$  (de valeur moyenne nulle). Le potentiel est de période  $d = \frac{\pi}{K}$ .

76. Soit  $\lambda = \frac{2\pi}{K}$  la longueur d'onde de l'onde de matière. Le potentiel de période  $d$  se comporte pour la matière comme un réseau de période  $d$ . Les directions d'interférences constructives sont alors données par la relation fondamentale des réseaux  $\sin \theta_i - \sin \theta_d = p \frac{\lambda}{d} = p \frac{2\pi}{K}$ . On obtient donc  $k \sin \theta_i - k \sin \theta_d = p 2K$  c'est-à-dire  $(\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \vec{u}_z = p 2K$ . Pour  $p = 1$  (et  $p = \hbar k$ ) c'est pratiquement la relation de la question 68.

77. Pour  $p = 1$ , la question précédente donne  $k_{iz} = -K$  exactement comme en 71.  $\vec{k}_d = -K\vec{u}_z$  si on suppose que le module de  $\vec{k}$  ne change pas au cours de la diffraction.

78. Le choix de  $\omega$  est arbitraire car il y a de toute façon une dépendance temporelle dans  $c_0$  et  $c_1$ . On choisit  $\omega = \frac{\hbar K^2}{2m}$  qui permet d'assurer que  $c_0$  et  $c_1$  seraient des constantes si  $V$  était nul (ondes de de Broglie). En présence d'un potentiel perturbateur  $c_0$  et  $c_1$  vont devenir lentement variables si  $V$  n'est pas trop grand. Le premier terme correspond à une onde progressive dans le sens  $+\vec{u}_z$  et l'autre est progressive dans le sens  $-\vec{u}_z$ .

79. On reporte l'expression dans l'équation de Schrödinger avec  $V = -\frac{\alpha E_0^2}{4} (e^{2ikz} + e^{-2ikz})$ .

$$\frac{\hbar^2 K^2}{2m} (c_0 e^{ikz} + c_1 e^{-ikz}) - \frac{\alpha E_0^2}{4} (e^{2ikz} + e^{-2ikz}) (c_0 e^{ikz} + c_1 e^{-ikz}) = i\hbar (-i\omega c_0 + c_1') e^{ikz} + i\hbar (-i\omega c_1 + c_0') e^{-ikz}$$

On remplace  $\omega$  par sa valeur (68) ; on identifie les termes en  $e^{ikz}$  entre eux, les termes en  $e^{-ikz}$  entre eux (indépendance linéaire des fonctions exponentielles) et on suppose que les termes en  $e^{\pm ikz}$  disparaîtraient avec des termes correctifs de la même forme qu'on aurait pu introduire dans  $\psi$ . Il vient alors  $i \frac{\alpha E_0^2}{4\hbar} c_1 = c_0'$  et  $i \frac{\alpha E_0^2}{4\hbar} c_0 = c_1'$  c'est-à-dire, en posant  $\beta = \frac{\alpha E_0^2}{4\hbar}$ ,  $c_0' = i\beta c_1$  et  $c_1' = i\beta c_0$ . On peut en déduire que  $c_0'' = -\beta^2 c_0$ .

80. L'onde de matière est initialement progressive dans le sens  $+\vec{u}_z$  donc  $c_1 = 0$  (et, d'après 79,  $c_0' = 0$ ). On choisit arbitrairement  $c_0 = 1$  (la valeur de  $c_0$  fixe juste le flux incident).

81. L'équation en  $c_0$  a alors pour solution  $c_0 = \cos \beta t$  et  $c_0' = i\beta c_1 \Rightarrow c_1 = i \sin \beta t$ .

$|c_0|^2 = \cos^2 \beta t$     $|c_1|^2 = \sin^2 \beta t$ . L'onde de matière oscille à la pulsation  $2\beta$  entre les deux sens de propagation ; sauf aux dates où un des coefficients est nulle, elle est à la fois dans les deux sens de propagation !

82. Avec  $\beta\tau = \frac{\pi}{4}$ , l'onde de matière est transformée à  $t = \tau$  en deux ondes de même amplitude, de sens opposés.

83. Pour  $t > \tau$ ,  $\beta$  est nul,  $c_0$  et  $c_1$  restent constants (79),  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $c_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}$ .  $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{ikz} + i e^{-ikz}) e^{-i\omega t}$ .

84. L'onde transmise est  $\psi_t = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kz - \omega t)}$ . L'onde réfléchie est  $\psi_r = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-(Kz + \omega t)}$ .

85. On définit le coefficient de réflexion par  $r_\tau = \frac{\psi_r(z = z_\tau)}{\psi_t(z = z_\tau)}$ . On obtient, avec 84,  $r_\tau = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-2ikz_0}$ . On définit le coefficient de transmission par  $t_\tau = \frac{\psi_t(z = z_\tau)}{\psi_t(z = z_0)}$ . On obtient alors  $t_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

86. Si on éteint plutôt les faisceaux à  $t = 2T$ , à cette date  $c_0 = 0$  et  $c_1 = i$  et ils restent ensuite constants. L'onde devient, pour  $t > 2T$ ,  $\psi_r = i e^{-i[kz+\omega t]}$ . Il n'y a qu'une onde réfléchie. On a réalisé un miroir à atomes et le coefficient de réflexion, défini par  $r_T = \frac{\psi_r(z=z_0)}{\psi_r(z=z_0)}$  vaut  $r_T = i e^{-2Kz_0}$ . Bien entendu  $i_{2T} = \psi_r(z=z_0)$ .

87.  $N_0$  joue ici le même rôle qu'une intensité  $I_0$  en optique. En  $a$ , en optique, on recombinerait deux faisceaux d'intensités identiques  $I_0/4$  et la formule de Fresnel donnerait  $I_a = 2 \times \frac{I_0}{4} (1 + \cos \varphi)$ . Ici l'analogie nous conduit à  $N_a = \frac{N_0}{2} (1 + \cos \Delta\varphi_a)$ . Par conservation de la matière,  $N_0 = N_0 - N_a = \frac{N_0}{2} (1 - \cos \Delta\varphi_a)$ .

$$88. \text{ Pour } A \rightarrow B_2 \rightarrow C, \varphi_{\text{réflex}} = \frac{\pi}{2} - 2Kz_A + \frac{\pi}{2} + 2Kz_{B_2}.$$

$$90. \text{ Pour } A \rightarrow B_1 \rightarrow C \rightarrow a, \varphi_{\text{réflex}} = \frac{\pi}{2} - 2Kz_A + \frac{\pi}{2} + 2Kz_C \text{ donc :}$$

$$\Delta\varphi_{a \text{ réflex}} = 2K(z_{B_2} + z_{B_1} - z_A - z_C).$$

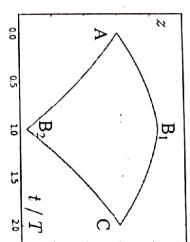
91. Pour chaque segment  $\varphi$ , qui est un retard de phase (convention  $e^{i\varphi-\omega t}$ ) vaut  $K \times \text{distance}$  donc :

$$\varphi_{\text{prop},1} = K(z_{B_1} - z_A + z_{B_1} - z_C) = K(2z_{B_1} - z_A - z_C) \quad \varphi_{\text{prop},2} = K(z_A - z_{B_2} + z_C - z_{B_2}) = K(z_A + z_C - 2z_{B_2})$$

92. Soit  $v$  la vitesse initiale classique des atomes,  $z_{B_1} = vT$ ,  $z_{B_2} = -vT$ ,  $z_C = 0$ .

93. Avec 90 et 91,  $\Delta\varphi_a = \Delta\varphi_{a \text{ réflex}} + \varphi_{\text{prop},2} - \varphi_{\text{prop},1} = 0$  donc  $N_a = N_0$ . Tous les atomes vont du côté  $a$ .

94. Les courbes deviennent paraboliques.



95. De  $A$  à  $B_1$ ,  $z = vt - \frac{gt^2}{2}$  donc  $z_{B_1} = vt - \frac{gT^2}{2}$  et la vitesse en  $B_1$  vaut  $v - gT$  qui devient, après rebond,

$$gT - v. \text{ Ensuite, de } B_1 \text{ à } C, z = vT - g\frac{T^2}{2} + (gT - v)(t - T) - \frac{g(t-T)^2}{2} \text{ et } z_C = 0.$$

Sur l'autre trajet, ce sont les mêmes formules en remplaçant  $v$  par  $-v$  donc  $z_{B_2} = -vT - \frac{gT^2}{2}$  et  $z_C = 0$  !

$$96. \text{ Avec 90 et 95, } \Delta\varphi_{a \text{ réflex}} = 2K(z_{B_2} + z_{B_1} - z_A - z_C) = -2KgT^2.$$

97.  $K = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{laaser}}}$  donc la phase varie de  $4\pi \frac{\delta gT^2}{\lambda}$  = 0,283 rad. Le double est 0,57 rad qui est en parfait accord avec la variation  $1,90 - 1,33 = 0,57$  visible sur les courbes expérimentales. L'accord avec deux chiffres significatifs montre que la méthode permet de détecter des variations de  $7 \times 10^{-8} g$  et de mesurer ces variations à au moins 1% près.