

École Polytechnique 2003 MP Microscopie à force électrostatique

I – Oscillateur mécanique

I.1.a) La loi de la quantité de mouvement conduit à $m\ddot{\delta} + \beta\dot{\delta} + k\delta = ka_0 \cos \omega t$.

b) En régime harmonique forcé, $(mj\omega + \beta + k / j\omega)\dot{\delta} = kA \exp j\omega t$ d'où $\frac{B}{A} = \frac{k}{(mj\omega + \beta + k / j\omega)}$

ce qui permet d'écrire $H(\omega) = \frac{1}{(1 + mj\omega / \beta + k / \beta j\omega)} = \frac{1}{\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$.

c) C'est la forme canonique d'un filtre passe-bande d'ordre 2 de pulsation de résonance ω_0 et de facteur de qualité Q . Les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 à -3 dB vérifient $Q(\omega / \omega_0 - \omega_0 / \omega) = \mp 1$ ce qui mène à $\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q}$. Comme $Q \gg 1$, $\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} \approx 1 \mp \frac{1}{2Q}$. L'acuité de la résonance est ici très grande (ω_1 et ω_2 sont très proches de ω_0). Le filtre est très sélectif.

d) L'argument $\varphi = \arctan Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)$ décroît de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$.

Il passe en fait de $+\frac{\pi}{4}$ à $-\frac{\pi}{4}$ sur le très petit intervalle $[\omega_1, \omega_2]$

(donc au voisinage de ω_0) et $\left.\frac{d\varphi}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{2Q}{\omega_0}$.

I.2.a) $u_S(t) \propto \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}[\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]$.

La composante continue est proportionnelle à $\cos \varphi$ et peut être isolée par un filtre passe-bas de fréquence de coupure bien inférieure à 2ω (par exemple, circuit RC de sortie sur C). $\cos \varphi$ présente un maximum en ω_0 et varie donc peu au voisinage de ω_0 . On ne peut donc pas déterminer avec précision ω_0 par l'étude de $\cos \varphi$.

b) La dérivation de $\delta(t)$ pour obtenir $\dot{\delta}(t)$ correspond (en régime harmonique) à un déphasage égal à $\pi / 2$. En utilisant δ , la composante continue devient proportionnelle à $\sin \varphi$ qui varie rapidement au voisinage de $\varphi = 0$. La mesure devient nettement plus précise.

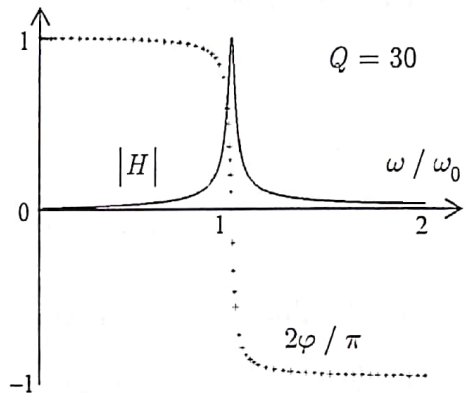
c-d) Avec le calcul de dérivée de IId, en valeur absolue, $\delta\varphi = \frac{2Q}{\omega_0} \delta\omega \Rightarrow \frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} \delta\varphi = 2 \times 10^{-5}$.

L'incertitude relative sur la fréquence propre est la même que sur la pulsation donc $\delta\nu_0 \approx 1,2$ Hz.

I.3.a) À l'ordre 1 en δ , on ajoute une force $F_C(z) = F_C(z_0) + F_C'(z_0)\delta$ ce qui revient à augmenter la raideur du ressort de $\delta k = -F_C'(z_0)$.

b) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc (différentielle logarithmique) $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{\delta k}{k}$.

c) Avec I2c on obtient $\frac{\delta k}{k} = 2 \frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \delta\varphi$. La grande valeur du facteur de qualité est très utile ici.



II – Mesure de forces capacitives

II.1.a) Question de cours $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z$.

b) En superposant les champs créés par les deux armatures de densités de charges $+\sigma$ et $-\sigma$, le champ entre les armatures est $-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$ soit le double du champ créé par la seule armature inférieure.

c) Alors, $\vec{F}_{\text{capa}} = Q_{\text{haute}} \vec{E}_{\text{créé par basse}} = Q_{\text{haute}} \vec{E}_{\text{total}} / 2$. Or $U = \int_l^0 E_z dz = -E_z \ell = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ell = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \ell$

On en déduit bien $F_{\text{capa}} = Q \times \frac{E}{2} = \frac{S\varepsilon_0 U}{\ell} \times \frac{-U}{2\ell} = -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2\ell^2}$. La force est attractive (vers le bas).

d) On utilise I3a : $\delta k = -F_C'(z_0) = -\frac{dF_{\text{capa}}}{d\ell} = -\varepsilon_0 \frac{SU^2}{\ell^3}$ puis I3b : $\delta\omega_{\text{capa}} = -\frac{\varepsilon_0 SU^2 \omega_0}{\ell^3 2k}$.

II.2.a) Entre les deux positions, ℓ varie de $\delta\ell = -h$ qui est petit donc (calcul différentiel) $\frac{1}{\ell^3}$ varie de $\frac{3}{\ell^4} h$

et on obtient alors $\delta\omega_h = -\frac{3\varepsilon_0 SU^2 \omega_0}{2k\ell^4} h$.

b) Application numérique : $\frac{\delta\omega_h}{\omega_0} = -\frac{3\varepsilon_0 SU^2}{2k\ell^4} h = -4,6 \times 10^{-5}$. Cette variation est détectable (supérieure au seuil vu en I2c).

c) Par calcul différentiel à partir de IIIc, $\delta F_{\text{capa}} = \frac{S\varepsilon_0 U^2}{\ell^3} \delta\ell = -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{\ell^3} h$

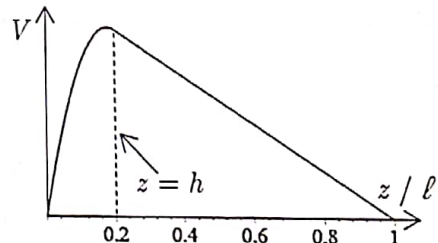
d) Cela déplace la position d'équilibre de $\delta z = \frac{\delta F_{\text{capa}}}{k} = -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{k\ell^3} h = -2,5 \times 10^{-12}$ m. Ce décalage est négligeable devant h , ce qui légitime l'hypothèse simplificatrice du préambule de I3 (on néglige la variation de la position d'équilibre).

III – Mesure de charges

III.1.a) L'équation de Poisson devient ici $\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ pour $z \in]0, h[$ et $\frac{d^2V}{dz^2} = 0$ pour $z \in]h, \ell[$.

b) La solution de classe C^1 , nulle en $z = 0$ et $z = \ell$ est :

- pour $z \in]0, h[$, $V = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left[-z^2 + hz \left(2 - \frac{h}{\ell} \right) \right]$
- pour $z \in]h, \ell[$, $V = \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0 \ell} (\ell - z)$.



Pour $z \in]h, \ell[$, $E_z = -\frac{dV}{dz} = \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0 \ell}$ (champ uniforme).

III.2. L'équation de Poisson est inchangée. Si on ajoute à la solution précédente, une solution de l'équation de Laplace vérifiant $V = 0$ en $z = 0$ et $V = U$ en $z = \ell$ ($V = Uz / \ell$), on obtiendra (par linéarité du laplacien) une solution de l'équation de Poisson vérifiant les nouvelles conditions aux limites.

III.3.a) Le champ électrique $E(\ell)$ est la superposition de $\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0 \ell}$ et de $-\frac{U}{\ell}$: $E(\ell) = \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0 \ell} - \frac{U}{\ell}$ et il vaut

(condition de passage) $-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ donc $\sigma = \frac{\varepsilon_0 U}{\ell} - \frac{\rho h^2}{2\ell}$.

b) Le champ $E(\ell)$ est en partie créé par l'armature supérieure. Le champ créé par cette armature supérieure est $-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ c'est-à-dire la moitié de $E(\ell)$. Les autres charges (armature basse et charges volumiques) créent donc

l'autre moitié et exercent donc la force $Q \frac{E(\ell)}{2} = \sigma S \frac{E(\ell)}{2} = -\varepsilon_0 S \frac{E(\ell)^2}{2} = -\frac{\varepsilon_0 S}{2} \left[\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0 \ell} - \frac{U}{\ell} \right]^2$.

$$F = -\frac{\varepsilon_0 S}{2\ell^2} \left[U - \frac{qh}{2\varepsilon_0 S} \right]^2$$

c) En négligeant les termes d'ordre 2 en q , $F \approx -\frac{\varepsilon_0 S}{2\ell^2} U^2 + \frac{qhU}{2\ell^2}$ ce qui conduit à une force supplémentaire

due à la charge q valant $F_q = \frac{qhU}{2\ell^2}$. D'après la partie I, $\delta\omega_q = \frac{1}{2} \omega_0 \frac{\delta k}{k} = -\frac{\omega_0}{2k} F_q = +\frac{\omega_0}{2k} \frac{qhU}{\ell^3}$.

d) L'effet de relief est proportionnel au carré de U alors que l'effet de charge est linéaire par rapport à U . Il change de sens par exemple si on inverse la polarité du générateur.

III.4.a) $\frac{\delta\omega_q}{\omega_0} = \frac{qhU}{2k\varepsilon_r \ell^3}$ vaut 2×10^{-5} (voir I2d) pour $q_{\min} = 2,0 \times 10^{-18}$ C soit 13 charges élémentaires ! La méthode de mesure est très sensible.

b) Avec les questions III4a et II2a $\frac{\delta\omega_q}{\delta\omega_h} = -\frac{q\ell}{3\varepsilon_0 S U \varepsilon_r}$. Or $Q_M = \frac{\varepsilon_0 S U}{\ell}$ donc $\frac{\delta\omega_q}{\delta\omega_h} = -\frac{q}{3Q_M \varepsilon_r}$. Pour

améliorer la visibilité du terme de charges (par rapport à celui dû à h), il faut diminuer Q_M donc s'éloigner de la surface du matériau.

IV – Analyse de résultats expérimentaux

IV.1. $\frac{\delta\omega_q}{\delta\omega_h} = -\frac{q\ell}{3\varepsilon_0 S U \varepsilon_r}$ est expérimentalement positif alors que U est négatif donc $q > 0$.

IV.2. D'après les courbes $R = 0,93$ donc $q = -R \frac{3\varepsilon_0 S U \varepsilon_r}{\ell} = 3,5 \times 10^{-17}$ C et $n_q = 220$.