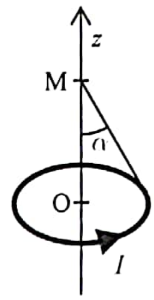
Étude de bobines

Donnée numérique : perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$

I Étude d'une spire

On étudie dans cette partie une spire circulaire de centre O, de rayon R, d'axe de symétrie de révolution Oz, parcourue par un courant permanent d'intensité I.



1. Quelle est la direction du champ magnétique $\vec{B}$ en un point quelconque de l'axe Oz ?

2. En un tel point, de cote $z > 0$, la composante selon z de $\vec{B}$ est $B_z = B_0 \sin^3 \alpha$ où α est l'angle entre l'axe Oz et une droite joignant le point M à un point de la spire (voir dessin) et B_0 une constante dépendant des caractéristiques de la spire. Proposer, par analyse dimensionnelle, une expression possible de B_0.

3. Pour les points M de l'axe Oz avec $z > 0$, tracer sur la feuille réponse l'allure du graphe de la fonction $B_z(z)/B_0$. Afin d'obtenir un tracé réaliste, on calculera les valeurs numériques de B_z/B_0 pour $z \in \{0\ ;\ 0{,}25R\ ;\ 0{,}5R\ ;\ 0{,}75R\ ;\ 1{,}5R\}$. Compléter (après justification) le graphe pour $z < 0$.

4. Tracer sans calculs sur la feuille réponse l'allure du graphe des fonctions dérivées première et seconde de B_z/B_0. Vérifier la présence de points d'inflexion sur le graphe de $B_z(z)/B_0$ et donner une estimation des positions des points M associés en exploitant le fait que la dérivée seconde est nulle en un point d'inflexion.

5. Que vaut le moment magnétique dipolaire de la spire ?

6. Donner un équivalent du champ magnétique créé par la spire en un point de l'axe Oz de cote $z \to +\infty$ en fonction de μ_0, R, I et z. En déduire la valeur de B_0.

7. **A.N.** Calculer le champ magnétique au centre d'une bobine plate constituée par un enroulement de $N = 10$ tours d'un fil parcouru par une intensité $I = 1$ A sur un cercle de rayon $R = 10$ cm.

II Mesure du champ magnétique terrestre.

L'aiguille aimantée d'une boussole est placée sur un pivot d'axe vertical. Elle peut alors pivoter autour de cet axe, son moment magnétique dipolaire restant dans un plan horizontal. À l'équilibre, l'aiguille pointe vers le Nord. La bobine étudiée à la question précédente est maintenant placée (parcourue par une intensité nulle) de façon à ce que l'aiguille soit centrée en O, l'axe Oz étant horizontal, à angle droit de la direction indiquée par la boussole.

8. Montrer que lorsqu'une intensité non nulle est établie dans la bobine, l'aiguille de la boussole a une nouvelle position d'équilibre et que la mesure de l'angle θ entre l'ancienne et la nouvelle position permet de déterminer le champ magnétique terrestre. Faire l'application numérique si $\theta = 70°$ avec les valeurs de la question 7. Quelle est la précision sur la valeur du champ magnétique si la mesure de θ est faite à 1° près alors que les autres grandeurs sont déterminées très précisément.

9. Pourquoi le fait que le champ créé par la spire n'est pas uniforme est-il source d'erreur dans cette mesure ?

La suite du problème étudie des méthodes de production de champ uniforme.

III Étude de deux spires. Bobines de Helmholtz.

On étudie deux spires identiques à celle de la partie **I**, d'axe Oz, centrées en des points de cotes $-z_0$ et $+z_0$.

10. Sur la feuille réponse figurent deux cartes de champ dans lesquelles on a omis d'orienter les lignes de champ magnétique. Ces cartes de champ sont tracées dans un plan contenant l'axe Oz. Les spires sont représentées par leurs intersections avec le plan (2 points A_1,B_1 pour l'une ; A_2,B_2 pour l'autre). L'une des deux cartes correspond au cas où les deux spires sont parcourues par des courants de même intensité, l'autre au cas où les deux intensités sont opposées. Identifier (en le justifiant par au moins deux critères) les deux cartes, orienter toutes les lignes de champ et préciser le sens du courant dans chaque spire.

11. On se place pour la suite dans le cas où les deux intensités sont identiques (de même sens). Tracer l'allure du graphe de $B_z(z)$, valeur de la composante selon Oz du champ magnétique total en un point de cet axe Oz.

Montrer que suivant la valeur de z_0, B_z présente un maximum local ou un minimum local en O.

12. Montrer qu'il existe une valeur critique z_{crit} de z_0 pour laquelle on peut écrire au voisinage de $z = 0$ $B_z = B_z(0) + o(z^3)$ c'est-à-dire qu'avec une excellente approximation B_z est uniforme sur l'axe Oz au voisinage de O. Donner une estimation de la distance entre les spires pour cette configuration (on pourra utiliser la question 4).

On désire pour la suite étudier, le comportement du champ magnétique dans tout un volume au voisinage de O. Les points étudiés sont repérés en coordonnées cylindriques (r,θ,z). On suppose r et z petits et on néglige, dans les expressions des composantes du champ magnétique tout terme d'ordre supérieur ou égal à 4.

13. Justifier que $B_z \approx f(z) + r^2 g(z)$ et que $B_r \approx rF(z) + r^3 G(z)$. Quelle est la signification de $f(z)$?

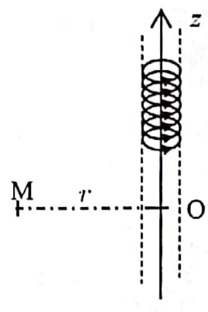
14. Exprimer le flux $\phi(z)$ du champ magnétique à travers un disque de rayon r_0, perpendiculaire à l'axe Oz, centré sur l'axe Oz en un point de cote z. En utilisant le fait que le champ magnétique est à flux conservatif, monter que $F = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ et que $G = -\dfrac{1}{4}\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}$.

15. Exprimer la circulation $C(z)$ du champ magnétique sur un segment de longueur r_0, perpendiculaire à Oz dont une extrémité est sur l'axe Oz à la cote z. En utilisant le théorème d'Ampère, montrer que $g = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$.

16. Que deviennent les résultats des questions précédentes dans la configuration mise en évidence à la question **12** (toujours en négligeant les termes d'ordres supérieur ou égal à 4 en r et z). Quelle particularité remarquable présente cette configuration ?

IV Champ à l'extérieur d'un solénoïde illimité.

Un solénoïde à spires jointives d'axe Oz est constitué avec des spires du type étudié dans la partie **I**. Les spires sont réparties régulièrement avec une densité linéique n. On étudie le champ en un point M situé dans le plan $z = 0$ à une très grande distance r de l'axe Oz.



17. Montrer que le champ magnétique créé en M par la spire de cote z a un module qu'on peut majorer sous la forme $\left\|\vec{B}_{1\,\text{spire}}\right\| \leq \dfrac{A}{\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}$, A étant indépendant de r et de z.

18. En déduire, pour le solénoïde illimité, une majoration du module du champ en M.

19. Montrer que le champ magnétique du solénoïde est nul en tout point à l'extérieur du solénoïde.