

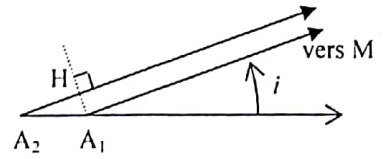
Problème d'optique (mesure de déformation d'un miroir)

I. Préliminaire

$$1. \Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}(A_2M - A_1M) + \varphi_0, \quad p = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{(A_2M - A_1M)}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi}$$

$\Delta\varphi(M) = 0 \Leftrightarrow M \in$ nappe d'hyperboloïde de révolution de foyers A_1 et A_2 .

$A_2M - A_1M = A_2H = \overline{A_2A_1} \cos i$ (car $L_{HM} = L_{A_1M}$; raisonnement classique pour



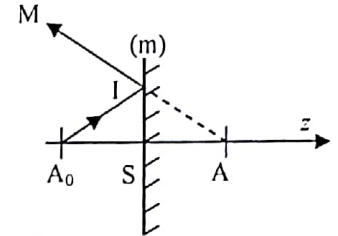
les interférences « à l'infini »)

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{A_2A_1} \cos i + \varphi_0$$

2. L'image A est symétrique de A_0 par rapport à (m).

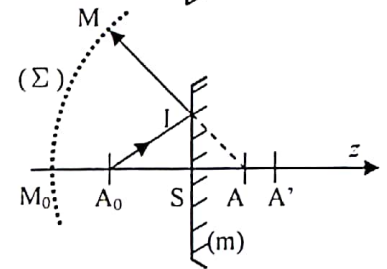
Le chemin optique réel est $L_{A_0M} = L_{A_0I} + L_{IM} = A_0I + IM = AI + IM = AM$. Ce chemin optique (et donc aussi la phase) se comporte comme si on avait une source en A, sans déphasage par rapport à A_0 .

Si le miroir se déplace, A se déplace de $2 S_1 S_2$.



$$3.1. \frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA_0}} = \frac{2}{\overline{SC}} \Rightarrow \overline{SA} = \frac{\overline{SA_0} \overline{SC}}{2 \overline{SA_0} - \overline{SC}} = \frac{-\overline{SA_0}}{1 - 2 \frac{\overline{SA_0}}{\overline{SC}}}$$

$$3.2. \overline{AA'} = \overline{SA'} - \overline{SA} = -\overline{SA_0} + \frac{\overline{SA_0}}{1 - 2 \frac{\overline{SA_0}}{\overline{SC}}} \approx 2 \frac{\overline{SA_0}^2}{\overline{SC}} \quad A \text{ est à gauche de } A'$$



3.3. Après réflexion sur (m), les rayons semblent venir de A. Les surfaces d'onde sont donc (théorème de Malus) des sphères centrées sur A. Soit (Σ) celle qui passe en M et M_0 son intersection avec l'axe Oz. La phase (retard) en M est

alors égale à celle en M_0 . Avec le trajet réel A_0SM_0 , $\varphi_{M_0} = \varphi_{A_0} + \frac{2\pi}{\lambda}(\overline{A_0S} + \overline{M_0S})$. Or $\overline{M_0S} = \overline{AS} + \overline{M_0A}$,

$\overline{M_0A} = \overline{MA}$ et $\overline{A_0S} = \overline{SA'}$ donc $\varphi_M = \varphi_{A_0} + \frac{2\pi}{\lambda}(\overline{SA'} + \overline{AS} + \overline{M_0A}) = \varphi_{A_0} + \frac{2\pi}{\lambda} \overline{AA'} + \frac{2\pi}{\lambda} \overline{MA}$.

Tout se passe comme si on avait une source en A avec un retard de phase sur A_0 valant $\frac{2\pi}{\lambda} \overline{AA'}$.

II. Application : mesure interférométrique de la déformation d'un miroir.

1.1. D'après I.2 $A_2A_1 = 2 S_1 S_2 = 2e$ et A_1 et A_2 sont en phase. D'après I.1 $p = \frac{A_2A_1}{\lambda} \cos i = \frac{2e}{\lambda} \cos i$

1.2. On pose $p_0 = \frac{2e}{\lambda} \in \mathbb{N}$. $n = p_0 - p = \frac{2e}{\lambda}(1 - \cos i) \sim \frac{ci^2}{\lambda} \Rightarrow i_n = \sqrt{n \frac{\lambda}{e}}$

1.3. $n_{\max} = \frac{e}{\lambda} (i_{\max})^2 \sim \frac{e}{\lambda} \left(\frac{r_{\max}}{f'}\right)^2$. AN : $n_{\max} = 4$ anneaux brillants.

2.1. Avant déformation $p = 0$ partout ; l'éclairement est uniforme (« teinte plate », « contact optique »). Il y a interférence partout parfaitement constructive (ce serait une erreur de dire « il n'y a pas d'interférences » : on peut juste dire qu'on ne s'aperçoit pas du fait qu'il y a interférence car on ne voit pas de « franges »).

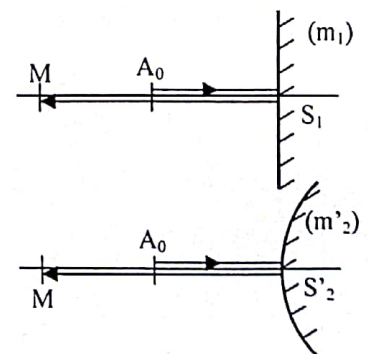
2.2. On applique I.1 avec $\overline{A_2A_1} = -2 \frac{D^2}{R}$ (formule du I.3.2 ; attention au signe, A_2 est plus proche de l'écran que A_1)

et $\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{A_1A_2}$ (déphasage du I.3.3) pour obtenir $p' = 2 \frac{D^2}{R\lambda} (1 - \cos i)$.

On est satisfait de trouver dans des cas particuliers prévisibles sans calcul $p' = 0$ pour $R \rightarrow \infty$ et aussi si $i = 0$ (sur le dessin ci-contre, $L_{A_0S_1M} = L_{A_0S_2M}$ si M est sur la droite A_0S_1 puisque $S_1 = S_2$).

2.3. $p' = 3$ pour $\tan i = \frac{3 \text{ cm}}{1 \text{ m}}$. La relation de la question précédente permet de

calculer $R = 24 \text{ m}$. On visualise donc ainsi très facilement une déformation très faible (grand rayon de courbure \Leftrightarrow faible déformation).



Mesure d'une faible différence de phase en optique

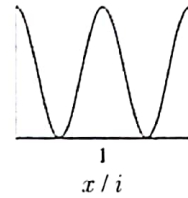
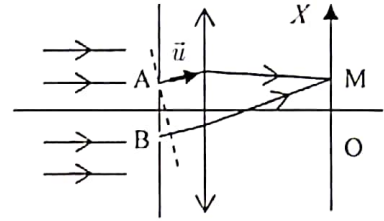
1. a. $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{BA} \cdot \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda} 2a \frac{X}{f'}$ (loi du retour inverse et théorème de Malus).

$I = I_{\max}$ pour ϕ multiple de 2π donc $X = \frac{\lambda f'}{2a} \times \text{entier}$. $i = \frac{\lambda f'}{2a} = 25 \mu\text{m}$

b. La petitesse de l'interfrange nécessite l'emploi d'un oculaire micrométrique pour observer les franges.

c. Formule de Fresnel : $I = \frac{I_1}{2}(1 + \cos \phi) = I_1 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$ avec $I_1 = 4a_0^2$.

d. $I = 0,96 I_1$ si $\cos \frac{\phi}{2} = \sqrt{0,96} \approx 1 - \frac{\phi_1^2}{8}$. On obtient alors $\phi_1 \approx 0,4 \text{ rad}$.



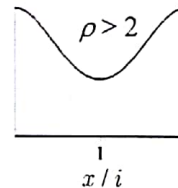
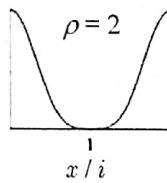
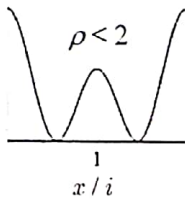
2. a. Comme $\overline{BC} = \overline{CA} = \overline{BA} / 2$, le déphasage entre les ondes issues de B et de C (et aussi entre celles issues de C et A) vaut $\phi/2$. L'amplitude complexe est alors

$\vec{a} = a_0(\rho + e^{i\phi/2} + e^{-i\phi/2}) = a_0(\rho + 2\cos(\phi/2))$ d'où $I = \frac{I_1}{4}(\rho + 2\cos(\phi/2))^2$

b. si $\rho \geq 2$ $I_{\max} = \frac{I_1}{4}(\rho + 2)^2$ atteint si $\phi = 4\pi p$ donc et $I_{\min} = \frac{I_1}{4}(\rho - 2)^2$ si $X = \frac{\lambda f'}{a}\left(p + \frac{1}{2}\right)$.

si $\rho < 2$ $I_{\max \text{ principal}} = \frac{I_1}{4}(\rho + 2)^2$ pour $X = \frac{\lambda f'}{a}p$ $I_{\max \text{ secondaire}} = \frac{I_1}{4}(\rho - 2)^2$ pour $X = \frac{\lambda f'}{a}\left(p + \frac{1}{2}\right)$ et $I_{\min} = 0$

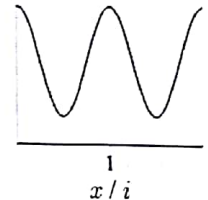
c. si $\rho = 2$ il n'y a que des maxima principaux et $I_{\min} = 0$. Pour se placer dans ce cas, il suffit de prendre une fente centrale deux fois plus large (principe d'Huygens-Fresnel : amplitude proportionnelle à l'aire élémentaire).



3. Un chemin optique de $\lambda/4$ correspond à un retard de phase de $\pi/2$ donc à une multiplication de l'amplitude complexe par l'imaginaire pur $-i$. L'amplitude complexe devient alors

$\vec{a} = a_0(-\rho i + 2\cos(\phi/2))$ et l'intensité $I = \frac{I_1}{4}(\rho^2 + 4\cos^2(\phi/2))$. Cela revient, par rapport à la

question 1 à ajouter une terme constant $I_1 \rho^2 / 4$ à l'intensité. Les franges sont au même endroit mais l'intensité minimale n'est plus nulle. Le contraste est diminué.



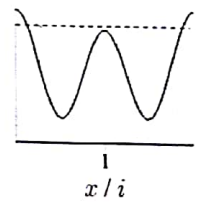
4. a. Le terme de déphasage est $e^{-i(\pi/2 - \epsilon)} = e^{-i\pi/2} e^{i\epsilon} \approx -i(1 + i\epsilon) = -i + \epsilon$.

Alors $\vec{a} = a_0(-\rho i + \rho\epsilon + 2\cos(\phi/2))$ et $I = \frac{I_1}{4}(\rho^2 + (\rho\epsilon + 2\cos(\phi/2))^2)$. L'expression ressemble à celle du 2b.. On a juste en plus un terme constant $I_1 \rho^2 / 4$ et on remplace ρ par $\rho\epsilon (< 2)$.

$I_{\max \text{ principal}} = \frac{I_1}{4}(\rho^2 + (2 + \rho\epsilon))^2$ et $I_{\max \text{ secondaire}} = \frac{I_1}{4}(\rho^2 + (2 - \rho\epsilon))^2$

b. $\frac{\Delta I_{\max}}{I_1(\rho^2 + 4)/4} = \frac{8\rho\epsilon}{\rho^2 + 4} = \frac{4\epsilon}{\rho/2 + 2/\rho}$. Ceci est maximal si $\frac{\rho}{2} = 1$ c'est-à-dire $\rho = 2$.

c. Alors l'écart relatif vaut 4% lorsque $\epsilon = 0,02 \text{ rad}$ ce qui est beaucoup plus faible que ϕ . On détecte ainsi un très petit déphasage.



5. Un tel déphasage correspond, sur une longueur ℓ à une variation d'indice δn telle que $\frac{\ell \delta n}{\lambda} = \frac{\epsilon_1}{2\pi}$ c'est-à-dire $\delta n = 1,6 \times 10^{-9}$! Pour l'air $n - 1 \approx 3 \times 10^{-4}$. La stabilité relative sur la masse volumique doit alors être meilleure que la variation relative $\frac{\delta(n-1)}{n-1} \approx 5 \times 10^{-6}$ (La proportionnalité entre $n - 1$ et la masse volumique entraîne l'égalité des variations relatives). Ces conditions de stabilité sont draconiennes !