attention : $\vec{E} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{B}}{c}$ valable que pour une onde plane !

Atomes piégés dans une onde stationnaire.

Dans un système de coordonnées cartésiennes ($Oxyz$), on considère une onde électromagnétique progressive se propageant dans le vide (sans charges ni courants) dont le champ électrique, dirigé selon Ox, est donné à l'instant t par :

$$\vec{E} = E_{0x}\sin(\omega t - Kz)\vec{u}_x \qquad K \text{ et } \omega \text{ étant des constantes réelles, } \omega \text{ est choisi positif.}$$

1. Quelle est la signification du signe de K ?

2. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide (zone de l'espace sans charges ni courants).

3. On suppose que le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = \vec{B}_0\sin(\omega t - Kz)$. En utilisant une des équations de Maxwell, exprimer le vecteur $\vec{B}_0$ en fonction de K, ω, E_{0x} et des vecteurs unitaires de base.

4. En utilisant les équations de Maxwell, exprimer $|K|$ en fonction de ω et $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$. En déduire, suivant le signe de K, le vecteur $\vec{B}_0$ en fonction de E_{0x} et c.

On note O_1 une onde dont le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_0\sin(\omega t - kz)\vec{u}_x$ caractérisée par $k > 0$ et son amplitude E_0. O_1, venant de la région $z < 0$, rencontre en $z = 0$ un métal (occupant la région $z > 0$) qu'on assimilera à un conducteur parfait. On admet que cela se traduit par le fait qu'apparaît une onde réfléchie O_2 sinusoïdale, de même pulsation que O_1, se propageant dans le sens des z décroissants et qu'en $z = 0$, la somme des champs électriques de O_1 et O_2 est nulle.

5. Établir les expressions des champs électrique et magnétique de l'onde réfléchie O_2 en fonction de E_0, c, z, t et ω.

6. Même question pour l'onde O_3 résultant de la superposition des deux ondes précédentes dans la région $z < 0$.

Un ensemble d'atomes se trouve placé dans le champ de l'onde O_3. Le mouvement d'un électron d'un atome est décrit dans le cadre du modèle classique dit « de l'électron élastiquement lié » : tout se passe comme si l'électron, de masse m et de charge q, était lié au noyau de l'atome (beaucoup plus massif que lui et immobile) par un ressort de raideur κ et était freiné dans son mouvement par une force de frottement proportionnelle à sa vitesse, le coefficient de proportionnalité étant écrit sous la forme $m\omega_0/Q$, en posant $\omega_0^2 = \kappa/m$.

7. Préciser la signification physique des constantes ω_0 et Q.

8. Dans quelle mesure est-il légitime de considérer, qu'en première approximation, on peut négliger l'influence du champ magnétique de l'onde sur le mouvement de l'électron ?

9. Montrer qu'alors, au bout d'un temps suffisant (préciser), la coordonnée x (supposée nulle à l'équilibre) d'un électron peut se mettre sous la forme :

$$x = -\frac{2qE_0}{m\omega_0^2 Z}\sin kz\cos(\omega t - \varphi)$$

Z étant une quantité dont on donnera l'expression en fonction de Q et du paramètre $u = \omega/\omega_0$ et φ un angle dont on exprimera de la même façon le cosinus.

10. Dans une seconde approche, on considère les corrections dues à l'action du champ magnétique de O_3 sur l'électron. Montrer qu'une force $\vec{F}$ de direction Oz s'exerce sur l'électron et donner l'expression de la moyenne temporelle sur une période $< F > = < \vec{F}\cdot\vec{u}_z >$ en fonction de m, ω_0, q, E_0, u, Q, k et z.

11. Montrer que $< F >$ dérive d'une énergie potentielle U dont on donnera l'expression.

12. Représenter graphiquement U en fonction de z et en déduire que, suivant la valeur de u, les atomes ont tendance à s'accumuler au voisinage des noeuds ou des ventres du champ électrique.

Formulaire :

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right] \qquad \sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

2. Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}+\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0$; Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\vec{E}=0$; $\text{div}\,\vec{B}=0$.

3. Avec l'équation de Maxwell-Faraday : $\vec{B}_0=\dfrac{K}{\omega}E_{0x}\vec{u}_y$

4. Avec l'équation de Maxwell-Ampère : $|K|=\omega/c$ $\quad \vec{B}_0=\pm\dfrac{E_{0x}}{c}\vec{u}_y$; signe + (respectivement –) si propagation dans le sens z croissant (respectivement décroissant).

5. Le champ électrique de l'onde réfléchie doit contenir un terme du type $\sin(\omega t-k'z+\varphi)$ avec $k'=-\omega/c$ et dont l'amplitude et la phase sont imposées par la condition d'annulation de $\vec{E}_{total}$ en $z=0$. On obtient $\vec{E}_2=-E_0\sin(\omega t+\omega z/c)\vec{u}_x$ puis, en utilisant 4) avec $E_{0x}=-E_0$, $\vec{B}_2=\dfrac{E_0}{c}\vec{u}_y\sin(\omega t+\omega z/c)$.

6. $\vec{E}_3=\vec{E}_1+\vec{E}_2=-2E_0\cos\omega t\sin\left(\omega z/c\right)\vec{u}_x$ $\quad \vec{B}_3=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\dfrac{2E_0}{c}\sin\omega t\cos\left(\omega z/c\right)\vec{u}_y$

7. ω_0 est la pulsation des oscillations non amorties de l'électron et Q le facteur de qualité des oscillations amorties.

8. Le rapport des amplitudes de E et B est de l'ordre de c. La force magnétique est alors négligeable devant la force électrique si la vitesse de l'électron est faible devant c.

9. L'équation du mouvement est $\ddot{x}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2x=-\dfrac{2qE_0}{m}\sin kz\cos\omega t$ dont on peut trouver une solution en notation complexe de la forme $\tilde{x}=-\dfrac{2qE_0}{m(\omega_0^2+i\omega_0\omega/Q-\omega^2)}\sin kz\, e^{i\omega t}$ dont la partie réelle (représentant le régime permanent obtenu pour un temps grand devant Q/ω_0) se met sous la forme proposée par l'énoncé si :

$$Z=\left|1+iu/Q-u^2\right|=\sqrt{\left(1-u^2\right)^2+\left(u/Q\right)^2}\quad \text{et}\quad \varphi=\arg\left(1+iu/Q-u^2\right)=\arccos\frac{1-u^2}{Z}.$$

10. Le mouvement ayant lieu essentiellement selon x et le champ magnétique étant selon y, la force magnétique est selon z et vaut $F=q\dot{x}B_y=\omega\dfrac{4q^2E_0^2}{m\omega_0^2cZ}\sin kz\cos kz\sin\omega t\sin(\omega t-\varphi)$. La valeur moyenne de $\sin\omega t\sin(\omega t-\varphi)$ est $(\cos\varphi)/2$ donc $\langle F\rangle=\dfrac{q^2E_0^2}{m\omega_0}\dfrac{u}{c}\dfrac{\cos\varphi}{Z}\sin 2kz=\dfrac{q^2E_0^2}{m\omega_0}\sin 2kz\dfrac{u(1-u^2)}{cZ^2}$

11. $\langle F\rangle=-\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}$ avec $\boxed{U=\dfrac{q^2E_0^2}{2m\omega_0^2}\cos 2kz\dfrac{1-u^2}{Z^2}=\dfrac{q^2E_0^2}{2m\omega_0^2}\cos 2kz\dfrac{1-u^2}{\left(1-u^2\right)^2+\left(u/Q\right)^2}}$

12. Les positions d'équilibre stables vis à vis du mouvement selon z correspondent aux minima de U. Si $u>1$ cela signifie $\cos 2kz=1$ donc $\sin kz=0$ c'est à dire les nœuds de E. Si $u<1$ cela signifie $\cos 2kz=-1$ donc $|\sin kz|=1$ c'est à dire les ventres de E. Les atomes s'accumulent alors en ces positions.