## Complément théorique

### Conservation de la charge en présence de courants superficiels et volumiques.

On suppose, comme sur la figure 1 de l'énoncé qu'il y a des courants superficiels sur le plan $y = 0$ (c'est-à-dire en fait des courants volumiques très intenses sur une couche d'épaisseur infime $\varepsilon$ selon $y$) mais on envisage en plus la présence de courants volumiques pour $y \neq 0$, ces courants pouvant ne pas être continus en $y = 0$ si, par exemple, il y a un conducteur pour $y < 0$ et un isolant pour $y > 0$. La relation générale permettant de définir la densité superficielle de courant $\vec{j}_S$ est $\vec{j}_S = \int_0^\varepsilon \vec{j}\,\mathrm{d}y$. Dans le cas où on peut considérer que $\vec{j}$ est uniforme sur cette couche, on obtient la définition vue en cours $\vec{j}_S = \varepsilon\vec{j}$.

L'équation universelle de conservation de la charge $\operatorname{div}\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ peut être intégrée par rapport à $y$ sur l'épaisseur $\varepsilon$. On peut permuter intégration et dérivation par rapport à deux variables indépendantes ($y$ est indépendant de $x, y, t$).

Ainsi $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{\partial j_x}{\partial x}\,\mathrm{d}y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\varepsilon j_x\,\mathrm{d}y\right) = \frac{\partial j_{Sx}}{\partial x}$ mais il faut traiter à part la dérivée par rapport à $y$ :

$$\int_0^\varepsilon \frac{\partial j_y}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \left[j_y\right]_0^\varepsilon = j_y(\varepsilon) - j_y(0)$$

L'équation de conservation de la charge devient donc $\dfrac{\partial j_{Sx}}{\partial x} + \dfrac{\partial j_{Sz}}{\partial z} + j_y(\varepsilon) - j_y(0) + \dfrac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\operatorname{div}_{\text{dimension 2}}\left(\vec{j}_S\right) + j_y\left(0^+\right) - j_y\left(0^-\right) + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0}$$

## Onde évanescente

### Complément en liaison avec l'exercice 1 de la feuille « Ondes électromagnétiques ».

Une onde évanescente dans le vide de forme $e^{-y/\delta}\cos(kz - \omega t)$ est régie par la relation de dispersion $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} + \dfrac{1}{\delta^2}$ (exercice 1). Une telle onde est obtenue dans le problème aux question 9–10 à condition de noter $\dfrac{1}{\delta} = \sqrt{K_1^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}}$ avec $K_1 = n\dfrac{\omega}{c}\sin\alpha$. On obtient alors, avec la relation de dispersion $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} + K_1^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2} = K_1^2 = n^2\dfrac{\omega^2}{c^2}\sin^2\alpha$ donc $k = n\dfrac{\omega}{c}\sin\alpha$. La vitesse de phase est $v_\phi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{n\sin\alpha}$ et la vitesse de groupe $v_\phi = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \dfrac{c}{n\sin\alpha}$. Or l'onde évanescente n'existe que si $n\sin\alpha > 1$ (question 10). Alors $v_\phi = v_g = \dfrac{c}{n\sin\alpha} < c$. Tout va bien !

Ces vitesses sont aussi la vitesse de l'énergie ; voir l'exercice 1.