

Les plasmons de surface

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi / 2$.

Les vecteurs notés \vec{u}_i sont unitaires.

Les représentations complexes de fonctions harmoniques sont soulignées.

Si $\vec{E}(\vec{r}, t)$ est un champ vectoriel $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$.

On rappelle les « relations de passage » en présence de courants et charges superficiels :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

On rappelle que :

- Vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

- Masse de l'électron $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

A. — Propagation d'une onde sur un plan métallique.

On considère un plan conducteur infini ($\Pi = xOz$, voir figure 1) plongé dans le vide. Ce plan est parcouru par des ondes de courant caractérisées par une densité surfacique de courant indépendante de x , $\vec{j}_s = j_s^0 \cos(Kz - \omega t) \vec{u}_z$, dont la représentation complexe s'écrit :

$$\vec{j}_s = j_s^0 e^{i(Kz - \omega t)} \vec{u}_z$$

(j_s^0 , ω et K sont des constantes réelles et positives).

□ 1 — En adaptant l'équation locale de conservation de la charge au cas de distributions surfaciques, déterminer la densité surfacique de charge $\sigma(z, t)$ associée à \vec{j}_s .

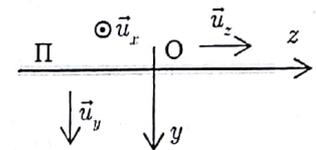


Figure 1 — Géométrie du plan

□ 2 — Montrer que le champ électrique \vec{E} créé par le plan est de la forme

$$\vec{E} = E_y(y, z, t) \vec{u}_y + E_z(y, z, t) \vec{u}_z.$$

□ 3 — Déterminer la limite de la fonction $E_y(y, z, t)$ lorsque $y \rightarrow 0^+$.

□ 4 — On suppose que $K > \omega / c$. Dans la région vide $y > 0$ on cherche $\underline{E}_y(y, z, t)$ sous la forme $f(y)e^{i(Kz - \omega t)}$. Déterminer l'expression de $f(y)$, celle de $\underline{E}_y(y, z, t)$ puis celle de $\underline{E}_z(y, z, t)$ en fonction des paramètres ϵ_0 , j_s^0 , ω , c , K et des variables y , z et t . On imposera que $\underline{E}_y \rightarrow 0$ pour $y \rightarrow +\infty$ et on pourra utiliser la valeur de $\text{div} \vec{E}$.

□ 5 — On se place dans le cas où le plan est un métal infiniment fin contenant des charges libres sous la forme d'électrons (charge $-e < 0$ et masse m). Le nombre de ces électrons par unité de surface est noté N . Il est supposé constant (permanent et uniforme). On fait l'hypothèse que ces électrons peuvent se déplacer sans interaction avec le réseau cristallin constituant le métal, qu'ils restent dans le plan $y = 0$ et que le module de leur vitesse $v = \|\vec{v}\|$ est toujours négligeable devant la célérité de la lumière dans le vide c .

En utilisant la loi de la quantité de mouvement, déterminer l'expression de la vitesse (complexe) d'un électron dans le métal en régime harmonique forcé. On exprimera cette vitesse en fonction de \underline{E}_z dont on donnera la valeur.

□ 6 — En déduire la relation de dispersion reliant ω et K pour des ondes libres se propageant dans le plan métallique. De telles ondes sont appelées plasmons de surface. On introduira la pulsation Ω_s définie par

$$\Omega_s = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0 c}$$

□ 7 — Pourquoi une onde électromagnétique plane progressive harmonique incidente, dans le vide, (donc caractérisée par un vecteur d'onde $k\vec{u}$), ne peut-elle pas exciter un plasmon de surface sur le métal ?

B. — Excitation de plasmons grâce à la réflexion totale.

On considère (figure 2) un demi-cylindre de verre d'indice n .

Une onde électromagnétique d'intensité I_e arrive perpendiculairement au plan tangent en A à la surface du verre. Elle pénètre donc dans le verre en A sans déviation. On suppose de plus qu'elle subit une réflexion en O suivant les lois de Descartes pour ressortir du demi cylindre en B avec une intensité I_r .

On admet qu'au niveau du plan séparant le verre du vide, la composante tangentielle du champ électrique est continue.

□ 8 — On décrit, dans le verre, ces ondes par leur champ électrique :

Pour l'onde incidente $\vec{E}_e = E_e^0 e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{u}_e$ et pour l'onde réfléchie $\vec{E}_r = E_r^0 e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{u}_r$, où (voir la figure 2) \vec{k}_e , \vec{k}_r , \vec{u}_e

et \vec{u}_r , sont dans le plan de la figure avec $\|\vec{k}_e\| = \|\vec{k}_r\| = n \frac{\omega}{c}$.

Commenter ces expressions.

□ 9 — Une onde se propage alors dans le vide ($y \in [-d, 0]$) sous la forme $\vec{E}_{\text{vide}} = \overline{c(y)} e^{i(K_1 z - \Omega t)}$ où K_1 et Ω sont des constantes et $\overline{c(y)}$ une fonction vectorielle de la seule variable y . Quelles sont les valeurs de K_1 et Ω ? Quelle est l'équation différentielle vérifiée par n'importe laquelle des projections cartésiennes de $\overline{c(y)}$?

□ 10 — On se place dans le cas où l'optique géométrique prévoit une réflexion totale. Préciser la condition sur α pour qu'il en soit ainsi. Montrer qu'il existe une onde évanescente selon y (dépendance exponentielle en y) dans le vide d'épaisseur d entre le métal et le demi-cylindre de verre.

□ 11 — Montrer que cette onde, qui existe alors dans l'espace vide entre le verre et le métal, peut exciter un plasmon dans le métal.

□ 12 — Déterminer l'expression de la pulsation ω de ce plasmon de surface en fonction de α , n et Ω_S .

□ 13 — Comment va se manifester l'excitation de plasmons dans le métal sur la lumière émergent en B ?

□ 14 — Lors d'une expérience on mesure le rapport I_r / I_e pour différentes incidences α et différentes valeurs de d dans le cas d'une plaque en argent, d'un demi-cylindre en verre, et d'un faisceau incident de 633 nm de longueur d'onde. Pour chacune des trois valeurs de d utilisées ($d_1 = 581$ nm ; $d_2 = 918$ nm ; $d_3 = 951$ nm), on a reporté sur la figure 3 la courbe expérimentale. Commenter ces résultats expérimentaux.

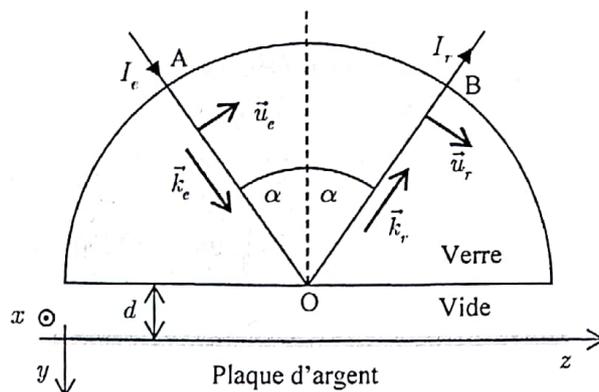


Figure 2 — Excitation des plasmons (configuration de Otto)

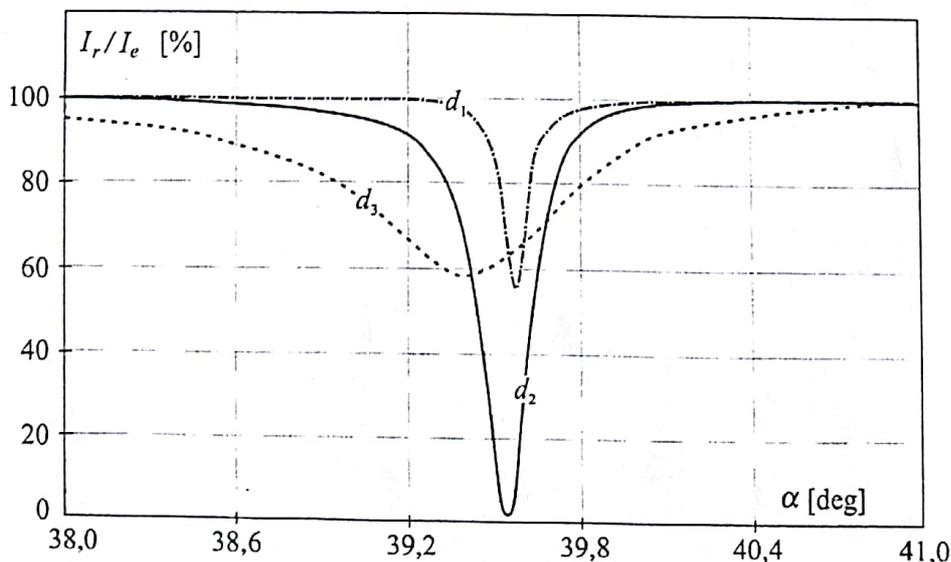


Figure 3 — Proportion d'intensité réfléchie en fonction de l'angle d'incidence. Chaque courbe a été obtenue pour une valeur différente de l'épaisseur de vide d .

Les plasmons de surface

- 1 Dans l'épaisseur (négligeable) du conducteur, les courants (volumiques) ne peuvent circuler que dans le plan ($j_y = 0$).

L'équation locale de conservation de la charge est alors $\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. En intégrant par rapport à y sur l'épaisseur du conducteur (ou, plus simplement, si on suppose que les champs sont indépendants de y , en multipliant par l'épaisseur), on obtient $\frac{\partial j_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial j_{sz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$ c'est-à-dire $\text{div}_{2D} \vec{j}_s + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$. En notation complexe,

$$iKj_{sz} - i\omega\sigma = 0 \text{ donc } \sigma = \frac{K}{\omega} j_{sz} \text{ d'où, en grandeur réelle : } \sigma = j_s^0 \frac{K}{\omega} \cos(Kz - \omega t)$$

- 2 Tout plan parallèle à yOz est plan de symétrie des charges et des courants. En tout point de l'espace, le champ électrique est donc parallèle à ce plan (et le champ magnétique lui est orthogonal). Par invariance par translation selon x , aucun champ ne dépend de x .

- 3 Le plan $y = 0$ est plan de symétrie des charges et courants donc $E_y(0^-) = -E_y(0^+)$. Par ailleurs la relation de passage pour le champ électrique s'écrit $E_y(0^+) - E_y(0^-) = \sigma / \epsilon_0$.

On en déduit :

$$E_y(0^+) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = j_s^0 \frac{K}{2\epsilon_0\omega} \cos(Kz - \omega t)$$

- 4 Dans le vide, E_y vérifie l'équation de d'Alembert qui, en notation complexe, conduit à $\frac{d^2 f}{dy^2} - K^2 f = -\frac{\omega^2}{c^2} f$ dont la

solution générale est $Ae^{\sqrt{K^2 - \omega^2/c^2} y} + Be^{-\sqrt{K^2 - \omega^2/c^2} y}$. On ne retient que l'expression ne divergeant pas à l'infini $f = Be^{-\sqrt{K^2 - \omega^2/c^2} y}$. Avec le résultat de la question précédente, $\underline{E}_y = j_s^0 \frac{K}{2\epsilon_0\omega} e^{-\sqrt{K^2 - \omega^2/c^2} y} e^{i(Kz - \omega t)}$. Par ailleurs,

$$\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \text{ (pas de charges dans le vide) donc } -\sqrt{K^2 - \omega^2/c^2} \underline{E}_y + iK \underline{E}_z = 0 \text{ soit :}$$

$$\underline{E}_z = -i j_s^0 \frac{\sqrt{K^2 - \omega^2/c^2}}{2\epsilon_0\omega} e^{-\sqrt{K^2 - \omega^2/c^2} y} e^{i(Kz - \omega t)}$$

- 5 Comme dans le cours sur les plasmas, la loi de la quantité de mouvement devient, en notation complexe, en supposant les mouvements de faible amplitude devant la longueur d'onde et en négligeant la force magnétique, $-im\omega \underline{v} = -e \underline{E}$

c'est-à-dire, en projection sur le plan Π , $\underline{v} = -i \frac{e \underline{E}}{m\omega} \underline{u}_z$. Même en présence de charges superficielles, E_z qui est une

composante tangentielle donc continue est définie sur le plan $y = 0$ et y vaut $\underline{E}_z = -i j_s^0 \frac{\sqrt{K^2 - \omega^2/c^2}}{2\epsilon_0\omega} e^{i(Kz - \omega t)}$

(question 4).

- 6 La densité superficielle de courant est $\vec{j}_s = -Ne\vec{v}$ (qui résulte de la relation $\vec{j} = \rho_{\text{mobile}} \vec{v}$ intégrée sur l'épaisseur du

conducteur) donc $\underline{j}_s = i \frac{Ne^2 \underline{E}_z}{m\omega} \underline{u}_z = j_s^0 \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0\omega^2} \sqrt{K^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} e^{i(Kz - \omega t)} \underline{u}_z$. Par comparaison avec l'expression de \underline{j}_s

donnée au début de l'énoncé $\frac{Ne^2}{2m\epsilon_0\omega^2} \sqrt{K^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = 1$ c'est-à-dire $\sqrt{K^2 c^2 - \omega^2} = \frac{2\omega^2}{\Omega_s}$ soit : $K^2 c^2 = \omega^2 + \left(\frac{2\omega^2}{\Omega_s}\right)^2$

- 7 Une onde incidente dans le vide présenterait un terme $\exp i(k_y y + k_z z - \omega t)$ qui pourrait respecter des conditions de passage dans le plan $y = 0$ où règnent des courants en $\exp i(Kz - \omega t)$ à condition que $K = k_z$ mais,

malheureusement, dans le vide $|\vec{k}|^2 = k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k_z \leq \frac{\omega}{c} < K$ donc $K \neq k_z$.

- 8 Il s'agit d'ondes planes progressives harmoniques polarisées rectilignement de célérité $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$.
- 9 Dans le verre, juste à la limite du vide, la dépendance des champs des ondes par rapport à z et t est de la forme $e^{i(\vec{k} \parallel \sin \alpha z - \omega t)}$. Le respect de la continuité de $\vec{E}_{\text{tangential}}$ pour toutes valeurs de z et t impose alors $\Omega = \omega$ et $K_1 = \frac{n\omega}{c} \sin \alpha$. Comme à la question 4, les composantes de $\overline{c(y)}$ vérifient $\frac{d^2 f}{dy^2} - K_1^2 f = -\frac{\Omega^2}{c^2} f$.
- 10 La réflexion totale intervient lorsque $n \sin \alpha > 1$ (on ne peut pas alors trouver d'onde réfractée respectant les lois de Descartes. D'après la question 9, $\frac{d^2 f}{dy^2} = \left(K_1^2 - \frac{\Omega^2}{c^2} \right) f$. Or $K_1^2 - \frac{\Omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 \sin^2 \alpha - 1)$ est alors positif. Donc les solutions de l'équation en f dépendent de y sous forme exponentielle réelle (en l'occurrence exponentielle décroissante ici : onde évanescente).
- 11 C'est le remède au problème rencontré à la question 7 car maintenant la condition $K = k_z = K_1$ peut être remplie puisque $K_1 = \frac{n\omega}{c} \sin \alpha > \frac{\omega}{c}$.
- 12 En remplaçant K dans la relation de dispersion $n^2 \sin^2 \alpha \omega^2 = \omega^2 + \left(\frac{2\omega^2}{\Omega_s} \right)^2$ soit : $\omega^2 = \frac{\Omega_s^2}{4} (n^2 \sin^2 \alpha - 1)$
- 13 Si on tenait compte de phénomènes dissipatifs (inévitables dans un conducteur usuel), la présence de courants y dissiperait de l'énergie qui serait prélevée à partir de l'onde incidente. L'intensité réfléchie ne serait plus égale à l'intensité incidente. On parle de « réflexion totale frustrée ».
- 14 Une valeur inférieure à 100% correspond à l'absorption d'énergie par le plasmon. La question 12 a mis en évidence, à ω fixé, une seule valeur possible de α . En fait, cela reposait sur l'étude de la partie A où le métal était seul. C'était l'analogie du mode propre (pulsation unique) d'un oscillateur harmonique isolé. Tout comme l'excitation d'un oscillateur mécanique à des pulsations proches de celle de son mode propre fait apparaître une courbe de résonance, ici, l'excitation du plasmon fait apparaître une courbe de résonance pour des angles proches de celui de la relation de la question 12. La résonance est d'autant plus aigüe (largeur à mi-hauteur plus faible) que d est plus faible donc que le métal est mieux couplé à l'onde incidente. Le décalage du sommet du pic est comparable à ce qui se produit en mécanique : en présence de frottements, la pulsation de résonance n'est pas tout à fait égale à la pulsation propre. Par contre, le fait que l'amplitude de la résonance ne soit pas fonction monotone de d (elle est plus grande pour d_2) n'est pas compréhensible dans le cadre du modèle étudié ici.

COMPOSITION DE PHYSIQUE – A – (XE)

3 Catapultes électromagnétiques

On considère une catapulte électromagnétique constituée de deux rails en aluminium parallèles de section carrée (de côté a) et de longueur x_{\max} , reliés d'une part à une génératrice G (un groupe de condensateurs) en série avec un interrupteur I et d'autre part à un rail mobile de longueur l et de masse m (de matériau et section identiques aux deux rails parallèles et perpendiculaire à ceux-ci), comme schématisé sur la figure 4. On suppose que le rail mobile se déplace sans frottement dans la direction (Ox) entre les deux rails parallèles et assure un contact électrique parfait au niveau de chaque rail. Le rail mobile est de plus muni d'un support de masse négligeable (non représenté sur le schéma) permettant de pousser un projectile de masse M .

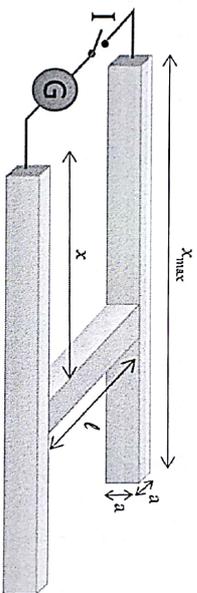


FIGURE 4 – Schéma de la catapulte

Lors de la fermeture de l'interrupteur I , le groupe de condensateurs initialement chargé fournit de l'énergie au circuit, en particulier sous forme d'énergie cinétique fournie à la partie mobile (d'où le nom de catapulte électromagnétique).

On considère le circuit dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Le groupe de condensateurs est équivalent à un condensateur de capacité notée C . On note $L(x)$ l'inductance propre du circuit lorsque le conducteur mobile se trouve à la position x (voir figure 4). L'ensemble des parties résistives du système est assimilable à une résistance $R(x)$ en série avec la capacité C et l'inductance $L(x)$. On note $i(t)$ l'intensité dans le circuit.

12. Rappelez l'expression de l'énergie magnétique à l'instant t d'un circuit d'inductance L parcouru par un courant d'intensité i , ainsi que la force électromotrice s'exerçant sur un circuit déformable. En effectuant de deux manières un bilan de la puissance fournie par la source au circuit, montrer que le module de la force exercée sur la partie mobile s'écrit :

$$F = \frac{1}{2} \frac{dL}{dx}.$$

Faire un schéma montrant la direction du champ magnétique dans le plan situé à égale distance des deux conducteurs parallèles ainsi que la direction de la force agissant sur la partie mobile.

13. La figure 5 indique quelques valeurs de $L(x)$ pour différentes valeurs de x et pour quelques valeurs de a et l . Expliquer pourquoi $L(x)$ varie en bonne approximation linéairement en fonction de la distance x .

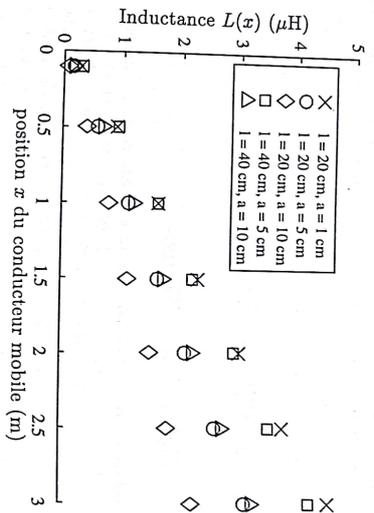


FIGURE 5 - Valeur de l'autoinductance $L(x)$ du circuit constituant la catapulte en fonction de la distance x , pour diverses valeurs des paramètres géométriques l et a .

- dans l'hypothèse où x est grand devant l'écart l entre les deux barres parallèles. On notera $L_x = \frac{dL}{dx}$, valeur qui sera dans toute la suite de l'énoncé supposée constante.
14. En supposant que le plan de la catapulte est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, et en supposant un courant constant de valeur i_0 dans le circuit, établir la relation littérale entre i_0 et la vitesse $v(x)$ de la partie mobile de masse $m + M$ après un parcours de longueur x , et une position initiale en $x = 0$.

15. Déduire à partir de la figure 5 les valeurs des paramètres géométriques l et a (parmi ceux proposés) qui vont minimiser le courant requis pour atteindre une vitesse donnée. On suppose dans toute la suite que l et a sont fixés à ces valeurs.

AN 16 Déterminer un ordre de grandeur du courant i_0 (toujours supposé constant) nécessaire pour catapulter un ballon de football, de masse $M = 450$ g à 50 m/s avec une catapulte de longueur $x_{\max} = 1$ m, pour les paramètres géométriques de conducteur mobile les plus favorables déterminés à la question précédente. La masse volumique de l'aluminium est $\rho_{Al} \sim 2700$ kg m⁻³. Dans toute la suite, la longueur x_{\max} de la catapulte est fixée à 1 m.

AN 17 En déduire une ordre de grandeur de la charge nécessaire à la production d'un tel courant pendant le catapultage.

18. Dans ce qui précède, on a supposé que le courant était constant pour l'estimation des ordres de grandeur. En réalité, le courant est initialement nul avant la fermeture de l'interrupteur, et ne peut donc être constant lors du fonctionnement de la catapulte. Le groupe de condensateur de capacité équivalente C est initialement chargé avec une charge notée Q_0 . Rappelez l'équation différentielle qui régit le courant $i(t)$.

On suppose l'inégalité suivante vérifiée :

$$\frac{L(x)}{R(x)} \ll R(x)C$$

Interpréter cette inégalité en précisant le sens de chacun des termes, et déduire une description en deux phases du fonctionnement de la catapulte une fois l'interrupteur fermé.

19. Dans le cadre de l'inégalité précédente, établir l'équation approchée décrivant l'évolution temporelle du courant dans le circuit pendant la phase de catapultage correspondant à la décharge du groupe de condensateurs, en supposant constante la résistance totale R du circuit.

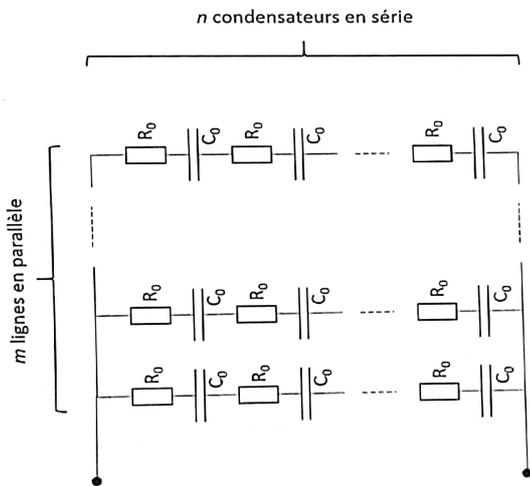


FIGURE 6 - Association de $n \times m$ condensateurs formant le générateur G de la catapulte électromagnétique.

20. On peut trouver sur le marché des condensateurs de très forte valeur de capacité C_0 (plusieurs milliers de Farads), mais limités à des tensions de charge ΔV_0 relativement basses (quelques Volts). Ces condensateurs présentent en général également des pertes, modélisables par une résistance de perte R_0 associée en série avec la partie capacitive. On considère un groupement de $m \times n$ condensateurs associés comme sur la figure 6. Etablir les valeurs de capacité et de résistance équivalentes à un tel groupe de condensateurs dans une représentation (R,C) en série, ainsi que la charge maximale que peut fournir le groupe de condensateurs et la tension correspondante à laquelle on doit le soumettre pour le charger.

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= (R_0 + \frac{q}{C_0}) \\
 I_{eq} &= \frac{\Delta V}{R_0 + \frac{q}{C_0}} \\
 J &= \frac{R_0 + \frac{q}{C_0}}{R_0 + \frac{q}{C_0}} \\
 &= \frac{R_0 + \frac{q}{C_0}}{R_0 + \frac{q}{C_0}}
 \end{aligned}$$

21. En supposant négligeable la résistance liée aux rails en aluminium, établir en fonction de C_0 , ΔV_0 , R_0 , n et m l'expression du courant de décharge dans le circuit. Avec $C_0 = 3000 \text{ F}$, $\Delta V_0 = 3 \text{ V}$ et $R_0 = 0,3 \text{ m}\Omega$, montrer que $m = 3$ et $n = 10$ permet de fournir un courant d'intensité et des temps caractéristique de décharge compatibles avec toutes les hypothèses effectuées et les valeurs numériques trouvées dans les questions précédentes. La conductivité électrique de l'aluminium vaut $\gamma_{Al} \approx 38 \times 10^8 \text{ S m}^{-1}$.

22. Estimer un ordre de grandeur de l'élévation de température dans les rails d'aluminium pendant la durée utile de la projection. La capacité thermique de l'Aluminium vaut $c_{Al} \sim 900 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$.

23. Estimer l'efficacité de la catapulte en comparant l'énergie "utile" aux autres formes d'énergie mises en jeu. Quel peut être alors l'intérêt de ce genre de dispositif de projection en pratique ?

* * *

X 2017 PC Physique A partie 3 : Catapultes électromagnétiques

- 12 - $W_m = \frac{1}{2} Li^2$ et la loi de Faraday donne $e = -\frac{d\phi}{dt}$. Ici ϕ est le flux magnétique propre $\phi = Li$ donc $e = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt}$. Considérons que le générateur se comporte comme une source de tension de force électromotrice E . La force électromotrice totale du circuit est $e + E$ et la loi de Pouillet $e + E = Ri$ conduit à $E = Ri + L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt}$. En multipliant par i on obtient le bilan énergétique

$$Ei = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} + i^2\frac{dL}{dt} = Ri^2 + \frac{dW_m}{dt} + \frac{1}{2}i^2\frac{dL}{dt}$$

Or, la puissance fournie par le générateur sert à augmenter l'énergie interne de la résistance où à fournir de l'énergie sous forme thermique à l'extérieur (effet Joule, terme Ri^2), à augmenter l'énergie magnétique W_m et à augmenter l'énergie cinétique E_c du rail mobile. Par identification, $\frac{1}{2}i^2\frac{dL}{dt} = \frac{dE_c}{dt}$. Or $\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt}$ et, d'après le théorème de l'énergie cinétique, $\frac{dE_c}{dt} = F_x\frac{dx}{dt}$ donc $F_x = \frac{1}{2}i^2\frac{dL}{dx}$.

La carte de champ magnétique est sans intérêt pour déterminer la direction de la force. Par symétrie des courants par rapport au plan du circuit électrique la force est dans ce plan. Les forces de Laplace élémentaires sont proportionnelles à l'intensité et au champ magnétique (qui lui même est proportionnel à l'intensité). Elle sont donc proportionnelles au carré de l'intensité. Le plan à égale distance des conducteurs fixes est un plan d'antisymétrie des courants mais, compte tenu du caractère quadratique de la force, c'est un plan de symétrie pour la force. La force est dans ce plan aussi et est donc, en conclusion, colinéaire à Ox .

- 13 - Pour x assez grand (devant ℓ), le champ magnétique entre les rails est pratiquement invariant par translation selon x sauf au voisinage du rail mobile (effet de bord) mais cette zone proche du rail mobile a le même comportement quel que soit x . Lorsqu'on augmente x de δx c'est donc comme si on ajoutait à la surface utilisée pour calculer le flux une bande de largeur δx dans la zone où le champ est indépendant de x . On ajoute donc un flux proportionnel à δx . Le flux est donc fonction affine de x . Pour x assez grand (devant ℓ toujours), le terme constant dans la fonction affine va devenir négligeable et la fonction affine est quasi linéaire.
- 14 - La force de pesanteur dérive de l'énergie potentielle $E_p = (m + M)gz = E_p = (m + M)gx \sin \alpha$. La force magnétique est constante. Son travail est donc Fx . En l'absence de frottements, le théorème de l'énergie cinétique mène à $\frac{1}{2}L_x i_0^2 x = \frac{1}{2}(m + M)v^2 + (m + M)gx \sin \alpha$ c'est-à-dire $\frac{L_x}{m+M} i_0^2 x = v^2 + 2gx \sin \alpha$.
- 15 - À v et x fixés, pour rendre minimum i_0^2 , il faut maximiser $\frac{L_x}{m+M}$. Parmi les valeurs proposées, $\ell = 20$ cm, $a = 1$ cm correspondent à la plus grande valeur de L_x mais aussi aux plus petites valeurs de ℓ et a , donc à la plus petite valeur de m . C'est donc le cas optimal.
- 16 - Pour les valeurs choisies à la question précédente, $m = \ell a^2 \rho_{Al} = 54$ g et, d'après la figure de l'énoncé, on peut estimer que $L_x = 1,5 \mu\text{H m}^{-1}$. On obtient alors, pour $\alpha = 0$, $i_0 = 29$ kA ≈ 30 kA.
- 17 - Le mouvement étant uniformément accéléré, la vitesse moyenne est $v_{\text{finale}}/2$. La durée est donc $\tau = \frac{x_{\text{max}}}{v/2}$ soit 4×10^{-2} s. La charge nécessaire est $Q = i_0 \tau = 1200$ C.
- 18 - On note Q la charge de l'armature du condensateur choisie de telle sorte que $\frac{dQ}{dt} = -i$. La loi des mailles s'écrit $\frac{Q}{C} = Ri + L\frac{di}{dt}$. (Attention ! Ici L , qui n'est pas une constante, ne peut pas être sorti de la dérivée). En dérivant par rapport au temps,

$$i + RC\frac{di}{dt} + C\frac{d^2}{dt^2}(Li) = 0$$

L'inégalité proposée par l'énoncé signifie que le temps caractéristique de décharge des condensateurs est très grand devant le temps d'établissement du courant dans le circuit inductif. Il y a donc deux phases :

- (a) Une étape rapide d'établissement du courant pendant laquelle les condensateurs restent pratiquement avec leur charge initiale et la tension à leurs bornes vaut Q_0/C . Le rail mobile ne bouge que très peu. L et R sont alors constants. La loi des mailles $\frac{Q_0}{C} = Ri + L\frac{di}{dt}$ conduit à $i = \frac{Q_0}{RC} (1 - \exp(-\frac{R}{L}t))$. On arrive rapidement à $i = \frac{Q_0}{RC}$. On note i_0 cette valeur.
- (b) Les condensateurs se déchargent assez lentement pour que l'intensité reste élevée pendant la durée de la propulsion.

- 19 - Lors de la seconde phase, on note τ_2 le temps caractéristique (sans doute assez grand) de l'évolution. On va négliger le terme $C \frac{d^2}{dt^2}(Li)$ car son ordre de grandeur est $\frac{LC}{\tau_2^2} i$ et on suppose $\tau_2^2 \gg LC$ (évolution lente; à contrôler à la fin). Alors $i + RC \frac{di}{dt} = 0$ dont la solution (avec $i = i_0$ à $t = 0$) est $i = i_0 \exp(-t/RC)$. On obtient $\tau_2 = RC$ dont le carré est effectivement grand devant LC (hypothèse de l'énoncé). En conclusion, avec la valeur de i_0 obtenue à la question précédente,

$$i = \frac{Q_0}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

- 20 - Les règles d'association étudiées en MPSI montrent que chaque ligne est équivalente à une résistance nR_0 en série avec un condensateur de capacité C_0/n . En associant en parallèles m telles lignes, l'ensemble est équivalent à une résistance $R_{\leftrightarrow} = nR_0/m$ en série avec un condensateur de capacité $C_{\leftrightarrow} = mC_0/n$.

La charge maximale que le système est capable de fournir est celle qui est stockée sur les m armatures supérieures. Or chaque condensateur ne peut porter plus de $C_0 \Delta V_0$ donc $Q_{\max} = mC_0 \Delta V_0 = 27000 C$. Lorsque cette charge est stockée, chaque condensateur est soumis à une tension ΔV_0 donc la tension globale est $n \Delta V_0$.

- 21 - On utilise les résultats établis à la question 18 à 20. $i_0 = \frac{Q_{\max}}{R_{\leftrightarrow} C_{\leftrightarrow}} = \frac{m \Delta V_0}{R_0} = 30 \text{ kA}$. C'est la valeur trouvée à la question 16.

$R_{\leftrightarrow} = 1 \text{ m}\Omega$. La résistance des rails en aluminium est au plus $R = \frac{1}{\gamma_{\text{Al}}} \frac{2x_{\max} + \ell}{a^2} \simeq 6 \times 10^{-4} \Omega$ qui est plus petit que R_{\leftrightarrow} et négligeable au moins lorsque x est assez petit. Le temps caractéristique de décharge est $R_{\leftrightarrow} C_{\leftrightarrow} = R_0 C_0 = 0,9 \text{ s}$. Il est assez grand devant la durée de catapulture calculée à la question 17 pour permettre de considérer que l'intensité est constante pendant la décharge.

Enfin, en prenant L de l'ordre au plus de $1 \mu\text{H}$ (figure 5) on trouve $L/R_{\leftrightarrow} \approx 1 \text{ ms}$ qui est bien très petit devant la durée de catapulture τ (question 17) et $R_{\leftrightarrow} C_{\leftrightarrow}$.

- 22 - Lorsque le courant passe, la puissance Joule dans une portion de rail de longueur δx est $R_{\delta x} i_0^2$ avec $R_{\delta x} = \frac{1}{\gamma_{\text{Al}}} \frac{\delta x}{a^2}$. Sa capacité thermique étant $\delta C = c_{\text{Al}} \rho_{\text{Al}} \delta x a^2$, son élévation de température par unité de temps sera, si on ne tient pas compte d'échanges thermiques, $R_{\delta x} i_0^2 / \delta C = \frac{i_0^2}{\gamma_{\text{Al}} \rho_{\text{Al}} c_{\text{Al}} a^4} = 1000 \text{ K s}^{-1}$. Avec une durée maximale de passage de courant (pour une partie de rail placée au début du rail) de $4 \times 10^{-2} \text{ s}$, l'élévation maximale de température sera 40 K . C'est acceptable à condition de laisser refroidir la catapulte entre deux tirs.

- 23 - L'énergie utile est l'énergie cinétique du projectile $\frac{1}{2} M v^2 = 560 \text{ J}$.

On peut la comparer à l'énergie stockée $\frac{1}{2} m n C_0 \Delta V_0^2 = 405 \text{ kJ}$. L'efficacité semble à peine dépasser 1%. Néanmoins, seule une partie de l'énergie stockée est utilisée pendant la décharge. La charge qui valait au départ $27000 C$ (question 20) ne baisse que de $1200 C$ (question 17). Il reste donc une énergie stockée $\frac{1}{2} \frac{Q_{\text{reste}}^2}{C_{\leftrightarrow}} = 370 \text{ kJ}$. L'énergie dépensée n'est que 35 kJ (elle est dépensée essentiellement en effet Joule). Le rendement est alors de $\frac{560}{35000} = 1,6\%$. Cela reste bien faible!

Le dispositif présente une grande simplicité mécanique ce qui simplifie grandement son entretien et son utilisation. Néanmoins, la zone qui assure le contact électrique entre le rail mobile et les rails fixes est source de frottements donc de pertes d'énergie et d'usure.

Le système présente aussi l'avantage de permettre un réglage simple de la vitesse d'éjection en ajustant la tension de charge des condensateurs ou la valeur de m .