

# CAVITÉS RÉSONANTES

## I PRÉLIMINAIRE

1°) a) Écrire les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courants. Comment sont-elles modifiées dans un conducteur ohmique de conductivité  $\sigma$  (la charge volumique restant nulle) ?

1°) b) En déduire l'équation de propagation vérifiée par le champ magnétique dans le vide. Comment est-elle modifiée dans un conducteur ohmique ?

2°) On considère un conducteur ohmique de conductivité  $\sigma$ . Ce conducteur occupe le domaine de l'espace défini par  $x > 0$  (figure 1). On adopte dans cette première partie un point de vue microscopique dans le cadre duquel les charges et les courants sont uniquement décrits par des densités volumiques. Les champs (électrique et magnétique) sont alors continus. On cherche des solutions particulières aux équations de Maxwell dans le conducteur sous forme complexe  $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(kx - \omega t)}$  (Pour la suite, on distinguera les champs réels des champs complexes associés par le fait que ces derniers sont soulignés).  $\omega$  est réel positif.  $k$  est un nombre complexe. On suppose  $\sigma \gg \epsilon_0 \omega$  et la charge volumique est  $\rho = 0$ .

2°) a) Donner une expression approchée de  $k$ . On notera  $\delta$  l'inverse de la partie imaginaire de  $k$  et on exprimera  $\delta$  en fonction de  $\sigma$ ,  $\mu_0$  et  $\omega$ . Décrire l'onde obtenue.

2°) b) La longueur d'onde dans le vide d'une onde ayant la pulsation  $\omega$  est 14 cm.  $\sigma = 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ . La condition  $\sigma \gg \epsilon_0 \omega$  est-elle remplie ? Calculer  $\delta$ . Conclusion ?

2°) c) On impose à la limite entre le vide et le conducteur (dans le plan  $x=0$ ) un champ magnétique  $\vec{B}(x=0) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y$ . Exprimer le champ magnétique en un point quelconque du métal.

2°) d) Que devient l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'approximation  $\sigma \gg \epsilon_0 \omega$  ? En déduire l'expression du champ électrique réel en un point quelconque du conducteur.

2°) e) Déterminer la puissance volumique cédée à la matière par le champ électromagnétique (effet Joule) moyennée par rapport au temps sur un nombre entier de périodes. Calculer la puissance (moyenne) cédée dans un cylindre de section droite  $S$  de longueur infinie ( $x \in [0, +\infty[$ ). Exprimer le résultat en fonction de  $B_0$ ,  $\mu_0$ ,  $S$ ,  $\delta$  et  $\omega$ .

## II FACTEUR DE QUALITÉ D'UNE CAVITÉ ENTRE DEUX PLANS

3°) On considère deux plans conducteurs parfaits ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), parallèles et infinis, distants de  $\ell$  et placés dans le vide (figure 2). On étudie une onde électromagnétique plane  $(\vec{E}(x,t), \vec{B}(x,t))$ , sinusoïdale de pulsation  $\omega$  de polarisation rectiligne :  $\vec{E} // \vec{u}_y$ .

3°) a) Peut-on continuer à considérer que les champs sont continus ? Écrire les conditions vérifiées par les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à la limite entre le vide et un conducteur parfait.

3°) b) Donner l'expression du champ électrique  $\vec{E}(x,t)$  caractérisant cette onde dans le vide entre les conducteurs (on introduira l'amplitude arbitraire ( $E_0$ ) des oscillations du champ électrique).

3°) c) En déduire les pulsations possibles d'une onde électromagnétique existant dans cette cavité (pulsations propres).

3°) d)  $\ell = 7$  cm. Quelle est la fréquence propre minimale de cette cavité ? Quelle est la longueur d'onde correspondante ?

4°) On se place dans un des modes propres définis au 3°).

4°) a) Calculer le champ magnétique  $\vec{B}(x,t)$  dans le vide entre les conducteurs. Donner son expression à la surface de chaque conducteur.

4°) b) Soit  $B_0$  l'amplitude des oscillations de  $\vec{B}$  à la surface d'un conducteur. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique en tout point de la cavité. Quelle est l'énergie totale contenue dans la cavité (dans un cylindre d'axe Ox de section transverse S). Exprimer le résultat en fonction de  $B_0$ ,  $\mu_0$ , S et  $l$

5°) On considère un circuit RLC série alimenté par une source de tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$ .

5°) a) Quelle est la pulsation  $\omega_0$  de résonance d'intensité dans ce circuit ?

On définit le facteur de qualité  $Q$  du circuit par :  $Q = 2\pi \frac{\text{Énergie électromagnétique stockée (dans L et C)}}{\text{Énergie dissipée par effet Joule en une période}}$

(le rapport étant calculé à la pulsation  $\omega_0$ )

5°) b) Calculer  $Q$ . Citer d'autres définitions possibles de  $Q$ .

6°) Calculer, suivant la définition du 5°), le facteur de qualité de la cavité du 4°) encadrée par deux conducteurs non parfaits. Exprimer le résultat en fonction de  $l$  et  $\delta$ . A.N. pour la fréquence calculée au 3°) d).

### III MODES PROPRES D'UNE CAVITÉ PARALLÉLÉPIPÉDIQUE

7°) On considère maintenant une cavité parallélépipédique de côtés parallèles aux axes Ox, Oy et Oz de longueurs  $l_x$ ,  $l_y$  et  $l_z$ . La cavité est vide, sans charges ni courants et limitée par un conducteur parfait (figure 3). On recherche le champ électrique sous la forme :

$$\underline{E}_x = E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t}$$

$$\underline{E}_y = E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t}$$

$$\underline{E}_z = E_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t}$$

7°) a) Quelles sont les valeurs possibles de  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  ? Pourquoi peut-on se restreindre à des valeurs toutes positives ?

7°) b) En déduire les pulsations propres et les fréquences propres de la cavité en fonction de  $l_x$ ,  $l_y$  et  $l_z$ .

7°) c) Quelle est la fréquence propre la plus petite si  $l_x$  et  $l_y$  sont égaux entre eux et plus grands que  $l_z$  ?

7°) d) Les constantes  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  sont elles indépendantes ? Combien d'entre elles sont effectivement indépendantes ?

8°) a) On se place dans un espace de dimension 3 de coordonnées  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ . Où se situent les points qui représentent un mode propre de fréquence comprise entre  $\nu$  et  $\nu+d\nu$  ?

8°) b) On suppose que la fréquence  $\nu$  est très grande. Préciser devant quoi et déterminer dans ce cas le nombre  $dN$  de modes propres de la cavité dont la fréquence est comprise entre  $\nu$  et  $\nu+d\nu$ .

8°) c) Une étude de thermodynamique statistique conduit à considérer que, si la cavité est maintenue à une température  $T$ , chaque mode propre contient une énergie  $nk_B T$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $n$  le nombre de paramètres d'amplitude indépendants étudiés au 7°) d). Quelle est alors l'énergie totale contenue dans la cavité ? Pourquoi ce résultat est-il nommé « catastrophe ultraviolette » ?

## IV RÉSONANCES DE SCHUMANN DE L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE

9°) On modélise l'atmosphère terrestre de la façon suivante :

L'air est un isolant dont les propriétés électromagnétiques sont celles du vide.

Il est compris entre 2 conducteurs sphériques, la surface terrestre de rayon  $R_T = 6400$  km et l'ionosphère située à une altitude  $h = 100$  km. On utilise les coordonnées sphériques  $r, \theta, \phi$  et on suppose que :

- le sol terrestre et l'ionosphère sont assimilables à des conducteurs parfaits
- les champs présentent une symétrie de révolution autour de l'axe Oz (« indépendance par rapport à  $\phi$  »)
- la composante radiale du champ magnétique est nulle
- en notation complexe les différentes composantes des champs dépendent du temps par un facteur du type  $e^{-i\omega t}$
- les champs sont finis en tout point.

9°) a) Montrer que  $B_\theta = 0$ .

9°) b) On pose  $u(r, \theta) = r B_\theta$ . Exprimer les composantes de  $\vec{E}$  en fonction de  $u$ .

9°) c) Compte tenu des conditions aux limites sur les conducteurs, quelles sont les conditions que doit remplir  $u$  en  $r = R_T$  et  $r = R_T + h$  ?

9°) d) Montrer que  $u$  vérifie l'équation 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u \sin \theta) \right) = 0$$

On montre que cette équation a pour solution des fonctions de la forme  $u(r, \theta) = f(r) g_\ell(\theta)$  avec  $g_\ell$  solution de l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (g_\ell \sin \theta) \right) + \ell(\ell + 1) g_\ell = 0 \quad (\ell \in \mathbb{N}^*)$$

9°) e) Quelle est alors l'équation vérifiée par  $f$  ?

9°) f) On simplifie l'équation vérifiée par  $f$  en remarquant qu'entre le sol et l'ionosphère  $r$  varie peu (en valeur relative) et en remplaçant dans l'équation le facteur  $1/r^2$  par  $1/R_T^2$ . Résoudre alors l'équation approchée.

9°) g) Déterminer alors l'ensemble des fréquences propres de la cavité et montrer que les plus faibles d'entre elles peuvent s'écrire sous la forme  $\nu = \nu_0 \sqrt{\ell(\ell + 1)}$ .

9°) h) Commenter la figure 4 indiquant la puissance du bruit de fond électromagnétique observé dans l'atmosphère en fonction de la fréquence. Identifier les pics associés aux fréquences étudiées au 9°) g) (le pic sortant du cadre est à environ 8 Hz), comparer avec les valeurs théoriques ...

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Figure 1

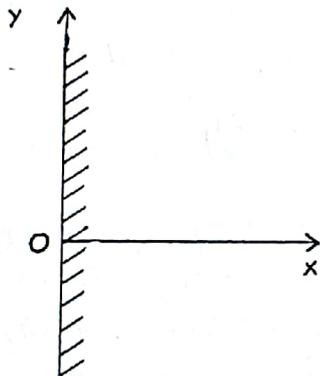


Figure 2

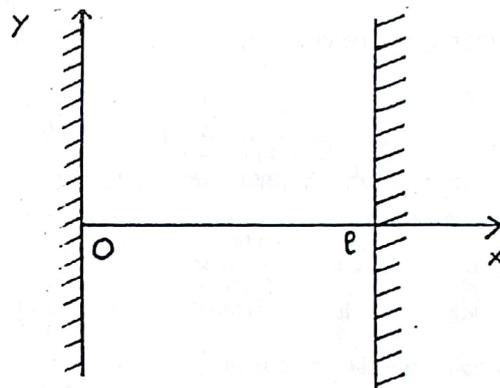


Figure 3

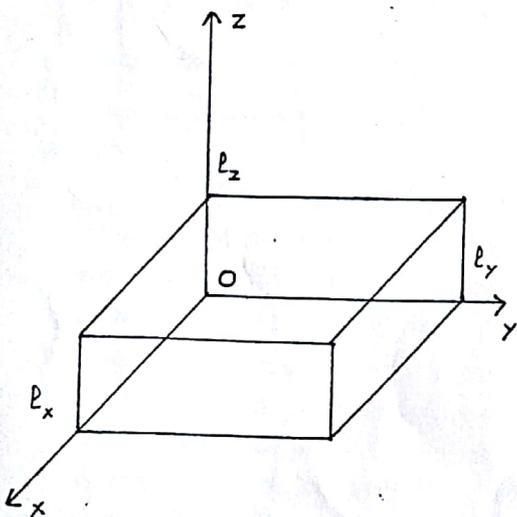
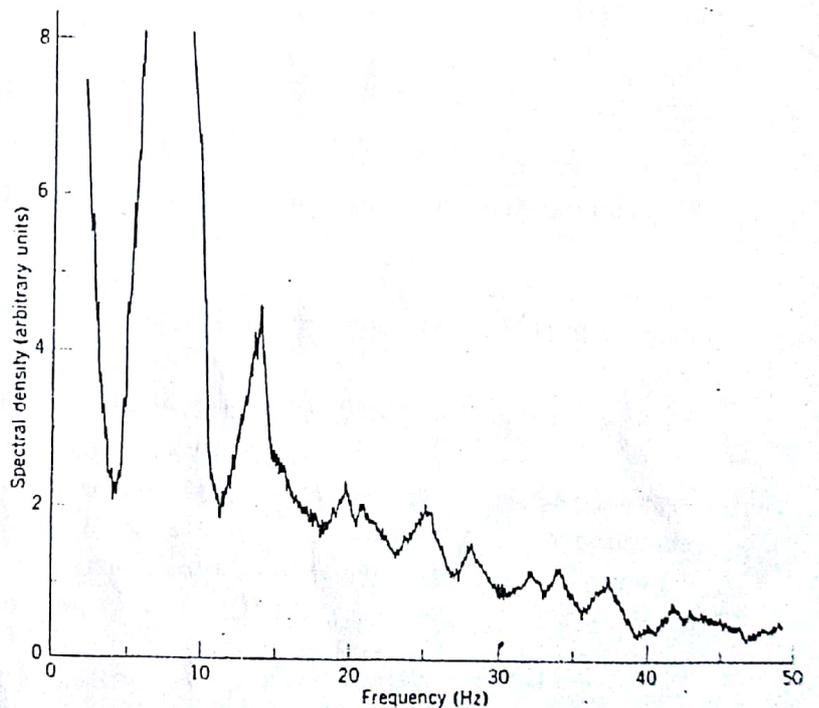


Figure 4



Typical noise power spectrum at low frequencies (integrated over 30s) observed at Lavangsdalen, Norway on June 19, 1965.

# CAVITÉS RÉSONANTES

## Corrigé

1°) Équations de Maxwell : voir le cours Équation de propagation :  $\Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$  ou  $\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

2°a) Avec l'équation du 1°) on trouve  $k^2 = i\mu_0 \sigma \omega (1 - i\epsilon_0 \omega / \sigma)$   $k \approx \frac{1+i}{\delta}$  avec  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$   $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\frac{x}{\delta} - \omega t)}$  Il s'agit d'une onde progressive atténuée exponentiellement.

b)  $\epsilon_0 \omega / \sigma = 1,2 \cdot 10^{-8} \ll 1$   $\delta = 3,44 \mu\text{m} \ll \lambda$  et les dimensions à notre échelle. L'onde ne pénètre presque pas dans le conducteur.

c) Compte tenu de la valeur imposée au champ magnétique en  $x = 0$ , l'amplitude complexe  $\vec{B}_0$  doit être égale à  $B_0 \vec{u}_y$  et le champ magnétique réel est  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_y e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta)$ .

d)  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \sigma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \approx \mu_0 \sigma \vec{E}$  permet de calculer le champ électrique :  $\vec{E} = \frac{B_0}{\mu_0 \delta \sigma} \vec{u}_z e^{-\frac{x}{\delta}} \left( \sin(\omega t - \frac{x}{\delta}) - \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \right)$

e) La puissance volumique dissipée est  $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2$  dont la valeur moyenne temporelle est :

$$\left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-\frac{2x}{\delta}} = \frac{B_0^2 \omega}{2\mu_0} e^{-\frac{2x}{\delta}}. \text{ La puissance demandée est } \langle P \rangle = S \int_0^\infty \left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle dx. \text{ On obtient } \langle P \rangle = \frac{B_0^2 \omega S \delta}{4\mu_0}.$$

3°a) Le passage à la limite du conducteur parfait correspond à  $\delta \rightarrow 0$ . On renonce alors à étudier ce qui se passe à l'échelle microscopique pour utiliser une modélisation surfacique. En particulier, le champ magnétique est alors discontinu :  $\vec{B}_{\text{vide}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$  à la limite du conducteur.

b) Entre les conducteurs, on observe une onde stationnaire et, par continuité de la composante tangentielle du champ électrique, il faut que  $E_y$  soit nul à la limite des conducteurs. Donc  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_y \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin(\omega t + \varphi)$ .

c) Cette expression vérifie l'équation de propagation à condition que  $\omega = n\pi c / \ell$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

d) Alors la fréquence est  $\nu = n \frac{c}{2\ell}$   $\nu_{\min} = c / 2\ell = 2,14 \text{ GHz}$   $\lambda = 2\ell = 14 \text{ cm}$

4°a) L'équation de Maxwell-Faraday permet alors de calculer le champ magnétique :  $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \vec{u}_z \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos(\omega t + \varphi)$  qui, à la surface des conducteurs a pour amplitude  $B_0 = E_0 / c$ .

b) La densité volumique d'énergie est  $\frac{dW}{d\tau} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$   $\frac{dW}{d\tau} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \left( \cos^2 \frac{n\pi x}{\ell} \cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell} \sin^2(\omega t + \varphi) \right)$ . Comme la largeur de la cavité est un multiple de la demi-longueur d'onde,  $W = S \int_0^\ell \frac{dW}{d\tau} dx = S \ell \left\langle \frac{dW}{d\tau} \right\rangle_x$  d'où  $W = \frac{B_0^2}{4\mu_0} S \ell$ .

5°) Cours de MPSI  $LC\omega_0^2 = 1$  Si la charge du condensateur est  $q = q_0 \cos \omega_0 t$ , l'intensité est  $I = -q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t$  et l'énergie stockée est  $W = \frac{1}{2} \left( \frac{q^2}{C} + LI^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} (\cos^2 \omega_0 t + LC\omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$ . La puissance Joule est  $P_j = RI^2 = Rq_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t$  donc l'énergie dissipée en une période est  $W_j = \frac{2\pi}{\omega_0} \langle P_j \rangle = \pi R q_0^2 \omega_0$  et le facteur de qualité vaut  $Q = 1 / RC\omega_0 = L\omega_0 / R$ . Le facteur de qualité peut être défini par l'acuité de la résonance ; c'est aussi le facteur de surtension ... voir le cours de MPSI.

6°) A la question 2°), le champ électrique en  $x = 0$  était de l'ordre de  $B_0 / \mu_0 \delta \sigma$ . Or ceci est très petit devant la valeur typique rencontrée pour les ondes planes  $B_0 c$  (car  $\sigma \gg \epsilon_0 \omega$ ). Ceci permet d'utiliser dans la cavité entre des conducteurs non parfaits le champ électrique utilisé aux questions 3°) et 4°) qui était, pour sa part, nul sur la surface des conducteurs. On calcule donc

$Q = \frac{\omega \text{ Énergie stockée calculée en 4°) b)}}{2 \text{ Puissance moyenne calculée au 2°) e)}} (le facteur 2 au dénominateur vient de la présence de deux conducteurs non$

parfaits dans lesquels l'énergie est dissipée.  $Q = \ell / 2\delta \approx 10^4$  (valeur beaucoup plus élevée que celles qu'on rencontre usuellement en électrocinétique ou en mécanique).

7°a) Pour respecter la continuité de la composante tangentielle du champ électrique à la surface du conducteur, il faut que cette composante s'y annule. Ceci impose alors que  $k_i = n_i \pi / \ell_i$  pour  $i \in \{x, y, z\}$  avec  $(n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{N}^3$ . Au moins 2 des entiers  $n_i$

doivent être non nuls car sinon le champ électrique est partout nul. Changer de signe  $k_x$  revient simplement à changer de signe  $E_2$  et  $E_3$  et ne change donc pas la structure de l'onde étudiée.

b) En écrivant que le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert, on obtient que 
$$v = \frac{c}{2\pi} \left[ \left( \frac{n_x \pi}{\ell_x} \right)^2 + \left( \frac{n_y \pi}{\ell_y} \right)^2 + \left( \frac{n_z \pi}{\ell_z} \right)^2 \right]^{1/2}$$

c) La valeur minimale est atteinte pour  $(n_x, n_y, n_z) = (1, 1, 0)$  et vaut  $v_{\min} = \frac{c}{\sqrt{2}\ell_x}$ .

d) En écrivant que  $\text{div } \vec{E} = 0$ , on obtient  $n_x E_1 / \ell_x + n_y E_2 / \ell_y + n_z E_3 / \ell_z = 0$ . Il n'y a donc que deux constantes indépendantes.

8°a) L'expression de  $v$  ci-dessus montre que la distance à l'origine de  $(k_x, k_y, k_z)$  est comprise entre  $2\pi v/c$  et  $2\pi(v+dv)/c$ . Les points qui représentent un mode sont donc compris entre les sphères de rayons  $2\pi v/c$  et  $2\pi(v+dv)/c$ .

b) Ceci correspond à un volume  $dV = \frac{1}{8} 4\pi \left( \frac{2\pi}{c} \right)^3 v^2 dv$  (le facteur 1/8 vient du fait qu'on ne garde que les points de coordonnées positives). Or les points sont distant de  $\frac{\pi}{\ell_i}$  sur l'axe  $i$  donc à chaque mode est associé un volume  $v = \frac{\pi^3}{\ell_x \ell_y \ell_z}$ . En passant du

discret au continu, ce qui est légitime si les écarts entre les points sont petits c'est à dire si  $\frac{\pi}{\ell_i} \ll \frac{2\pi v}{c}$ , le nombre de mode est

$dN = \frac{dV}{v}$  soit  $dN = 4\pi v^2 dv \ell_x \ell_y \ell_z / c^3$ .

c) À ces modes est associée une énergie  $dW = 2dN k_B T$  (le facteur 2 a été mis en évidence au 7° d))  $dW = \frac{8\pi k_B T \ell_x \ell_y \ell_z}{c^3} v^2 dv$

L'énergie totale s'obtient en sommant  $dW$  sur toutes les fréquences et est infinie car l'intégrale diverge aux hautes fréquences (côté ultraviolet). Cette « catastrophe » n'a pu être évitée qu'au début du XX<sup>e</sup> siècle par l'introduction de la quantification de l'énergie qui permet alors de trouver la loi de Planck du rayonnement d'équilibre thermique.

9°a) L'équation de Maxwell-Flux  $\text{div } \vec{B} = 0$  avec  $B_r = 0$  et dérivées nulles par rapport à  $\phi$  conduit à  $B_\theta \sin \theta$  indépendant de  $\theta$ .  $B_\theta \sin \theta = F(r)$ . Or, lorsque  $\theta$  est nul à  $r$  fixé, il faut que  $B_\theta \sin \theta$  soit nul puisque  $B_\theta$  est fini. Ceci impose  $F(r) = 0$  donc  $B_\theta = 0$ .

b) L'équation de M.-Ampère  $\text{rot } \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}$  permet de calculer  $\vec{E} = \frac{ic^2}{\omega} \left( \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u \sin \theta), -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, 0 \right) e^{-i\alpha x}$ .

c) A la surface des conducteurs,  $\vec{B}_r$ ,  $\vec{E}_\theta$  et  $\vec{E}_\phi$  doivent être nuls ce qui impose comme seule contrainte que  $\partial u / \partial r$  doit être nul en  $r = R_T$  et  $R_T + h$ .

d) En écrivant l'équation de Maxwell-Faraday on parvient à l'équation de l'énoncé  $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u \sin \theta) \right) = 0$ .

e) En remplaçant dans l'équation précédente, il vient :  $\frac{d^2 f}{dr^2} + f \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) = 0$ .

f) L'équation approchée est  $\frac{d^2 f}{dr^2} + f \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{R_T^2} \right) = 0$  dont les solutions de dérivées nulles en  $r = R_T$  et  $R_T + h$  sont de la forme

$f = f_0 \cos k(r - R_T)$  avec  $k = n\pi/h$  ( $n$  entier positif ou nul) et  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{R_T^2}$ .

g) Alors les fréquences possibles vérifient  $v = \frac{c}{2\pi R_T} \sqrt{\ell(\ell+1) + \left( \frac{n\pi R_T}{h} \right)^2}$  qui devient  $v = v_0 \sqrt{\ell(\ell+1)}$  avec  $v_0 = \frac{c}{2\pi R_T}$  pour les plus petites valeurs de fréquence (qui sont associées à  $n = 0$  car  $R_T \gg h$ ).

| valeur de $\ell$                      | $\ell = 1$           | $\ell = 2$                          | $\ell = 3$                           | $\ell = 4$                            | $\ell = 5$                            |
|---------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
|                                       | $v_1 = v_0 \sqrt{2}$ | $v_2 = v_0 \sqrt{6} = v_1 \sqrt{3}$ | $v_3 = v_0 \sqrt{12} = v_1 \sqrt{6}$ | $v_4 = v_0 \sqrt{20} = v_1 \sqrt{10}$ | $v_5 = v_0 \sqrt{30} = v_1 \sqrt{15}$ |
| $v$ calculé avec $v_1 = 8 \text{ Hz}$ | 8 Hz                 | 14 Hz                               | 20 Hz                                | 25 Hz                                 | 31 Hz                                 |

Le graphique expérimental fait effectivement apparaître des pics à ces fréquences. La loi en  $\sqrt{\ell(\ell+1)}$  est bien vérifiée jusqu'à  $\ell = 5$ . Par contre la valeur théorique  $v_1 = \frac{c\sqrt{2}}{2\pi R_T} = 10,5 \text{ Hz}$  est trop grande de 30%. (C'est peut-être dû au caractère non parfait des conducteurs qui est visible par la grande largeur des raies observées donc par leur petit facteur de qualité).