

# Traitement des fumées industrielles par un électrofiltre

I.A.1) Dans une zone non chargée, l'équation de Poisson devient  $\Delta V = 0$  (équation de Laplace).

I.A.2) (a) En symétrie sphérique, le potentiel ne dépend que de la coordonnée cylindrique  $r$ . L'équation de Laplace devient alors  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = 0$  donc  $r \frac{dV}{dr}$  est une constante  $A$  et  $V = A \ln(r) + B$ . On choisit les constantes pour que le potentiel prenne les valeurs 0 en  $r = r_c$  et  $-U$  en  $r = r_e$ .

$$V = -U \frac{\ln(r/r_c)}{\ln(r_e/r_c)}$$

(b)  $\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = \frac{U}{r \ln(r_e/r_c)} \vec{e}_r$  et sa norme vaut  $E_0$  en  $r = r_e$  si  $U_0 = r_e E_0 \ln \left( \frac{r_c}{r_e} \right)$ .

(c)  $U_0 = 26,5 \text{ kV}$

I.A.3) (a)  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\alpha^2 - \beta^2) \frac{1 + \cosh(\alpha x) \cos(\beta y)}{(\cosh(\alpha x) + \cos(\beta y))^2}$  est nul si  $\alpha = \beta$ . Il en serait de même si on avait mis un signe  $-$  devant le cosinus dans la définition de  $f$ . Dans l'expression du potentiel, on est dans le cas où  $\alpha = \frac{\pi}{2s} = \beta$  donc chacun des termes de la somme est de laplacien nul. On peut montrer qu'on peut dériver terme à terme la série (convergence uniforme ...); l'expression proposée est alors à laplacien nul. Elle vérifie donc bien l'équation de Laplace dans la zone sans charges.

(b) Sur les collectrices  $y = \pm s$  donc  $\cos(\pi y/2s) = \cos(\pm\pi/2) = 0$ . Dans la somme donnant le potentiel, chaque terme en logarithme est donc  $\ln(1) = 0$ . L'expression donne donc la bonne valeur (nulle) du potentiel sur les collectrices.

(c) En remplaçant l'indice de sommation  $m$  par  $m+1$  on constate que l'expression donnée est  $2d$ -périodique. Elle conduira à la bonne valeur sur les fils si c'est le cas pour le fil placé en  $x=0, y=0$ . Or, au voisinage de ce fil,  $\cosh\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right)$  tend vers 0 pour  $m=0$  (et seulement pour  $m=0$ ) donc son logarithme diverge et les termes de la somme pour  $m \neq 0$  sont négligeables. En développant à l'ordre 2,  $\cosh\left(\frac{\pi x}{2s}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right) \sim \frac{\pi^2}{8s^2}(x^2 + y^2)$  et le rapport  $\frac{\cosh - \cos}{\cosh + \cos}$  est équivalent à  $\frac{\pi^2}{16s^2}(x^2 + y^2)$  qui prend la valeur constante  $\frac{\pi^2}{16s^2} r_e^2$  à la surface du fil.

Le potentiel prend donc la bonne valeur sur ce fil si  $-U = \frac{U}{\Lambda} \ln\left(\frac{\pi^2 r_e^2}{16s^2}\right)$  c'est-à-dire  $\Lambda = \ln\left(\frac{16s^2}{\pi^2 r_e^2}\right)$ .

(d) Voir la carte de champ en fin de corrigé. La zone étudiée étant vide de charge, le champ est fort là où les tubes de champ se rétrécissent. Il devient même très fort (diverge) là où les sections des tubes de champ tendent vers 0. Ici, avec l'invariance par translation selon Oz, cela correspond à une distance entre ligne de champ dans le plan Oxy tendant vers 0, c'est-à-dire sur les fils.

Le champ électrique est nul, là où passent plusieurs lignes de champ donc à égale distance des fils, en

$$x = (2k+1)d, y = 0$$

(e) On lit sur la figure 2 de l'énoncé que la valeur maximale de  $|E_y|s/U$  est 23,6 donc  $U_0 = E_0 s / 23,6 = 28,8 \text{ kV}$  ce qui est pratiquement identique à la valeur concernant l'électrofiltre tubulaire. Dans la limite des fils très fins, les deux géométries sont très analogues sur le plan électrostatique.

I.B.1) Avec  $U > 0$ , le champ électrique est dirigé vers le fil. Les anions se dirigent dans le sens opposé donc s'éloignent du fil. Comme ils véhiculent des charges négatives, le courant est dirigé vers le fil (donc  $j < 0$ ). On écrit que l'intensité  $i$  est égale au flux de  $\vec{j}$  à travers un cylindre de rayon  $r$ , de hauteur  $h$  orienté vers le fil.  $i = -2\pi r h j$

I.B.2) Les ions se déplacent localement tous à la même vitesse. On peut alors utiliser  $j = \rho_m v$  donc

$$\rho = \frac{j}{v} = \frac{i}{2\pi r h b E}$$

I.B.3) L'équation de Poisson ou, de façon équivalente,  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  conduit à la relation  $rE \frac{d}{dr}(rE) = \frac{ir}{2\pi h \epsilon_0 b}$

puisque en symétrie cylindrique,  $\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rE)$ .

I.B.4) Il est alors possible d'intégrer par rapport à  $r$  les deux membres de l'équation précédente pour obtenir

$$(rE)^2 - (r_0 E_0)^2 = \frac{i}{2\pi \epsilon_0 h b} (r^2 - r_0^2) \text{ donc } |E| = \sqrt{\frac{r_0^2}{r^2} E_0^2 + \frac{i}{2\pi \epsilon_0 h b} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)}.$$

I.B.5) Pour  $r$  assez grand devant  $r_0$ ,  $E \sim -\sqrt{\frac{i}{2\pi \epsilon_0 h b}}$  est pratiquement uniforme.  $|E| \approx 200 \text{ kV m}^{-1}$

I.B.6)  $v \approx 62 \text{ m s}^{-1}$  et  $\rho(r = r_c) \approx -1,2 \times 10^{-5} \text{ C m}^{-3}$  soit  $7,4 \times 10^7$  ions par centimètre cube.

II.A.1) (a) Sur la figure en fin de corrigé, les flèches sont associées au mouvement des anions. Les lignes de champ ont l'orientation opposée.

(b) La particule sphérique seule créerait  $\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ . L'accroissement de  $|Q|$  réduit la zone d'où partent les lignes de champ ce qui s'oppose à l'arrivée de nouveaux anions. C'est normal, la charge  $Q < 0$  repousse les anions qui sont aussi des charges négatives.

(c) La limite de la zone où les anions peuvent arriver correspond au changement de signe de  $E_r$  donc à l'annulation de  $E_r$ . Le cas limite correspond à l'annulation en  $\theta = \pi$ . Or, d'après l'expression de  $\vec{E}_t$  donnée par l'énoncé,  $E_r(r = a, \theta = \pi) = -E + E \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} (-2) + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a^2} = -E \left(1 + 2 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right) + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 a^2}$ . cqfd.

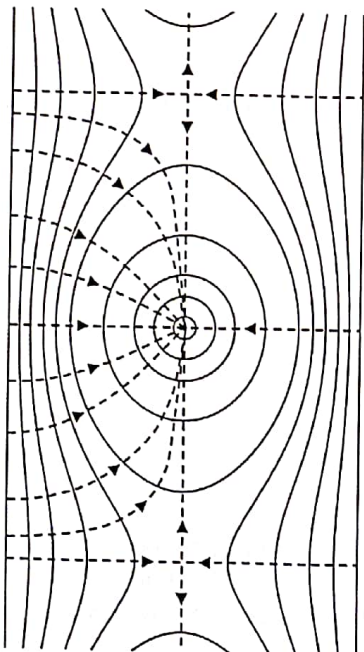
(d)  $Q_{\text{lim}} = -1,4 \times 10^{-16} \text{ C}$ , c'est-à-dire 870 charges élémentaires.

II.A.2) (a)  $\tau_Q$  doit avoir la dimension d'un temps. D'après la définition de  $b$ ,  $[v] = [b][E] = [b] \frac{[Q]}{[\epsilon_0]L^2} = [b] \frac{[\rho]L}{[\epsilon_0]}$  donc  $[b] = \frac{[\epsilon_0][v]}{[\rho]L} = \frac{[\epsilon_0]}{[\rho]T}$ . Donc, en tenant compte du facteur 4 donné par l'énoncé,  $\tau_Q = \frac{4\epsilon_0}{|\rho|b}$ .

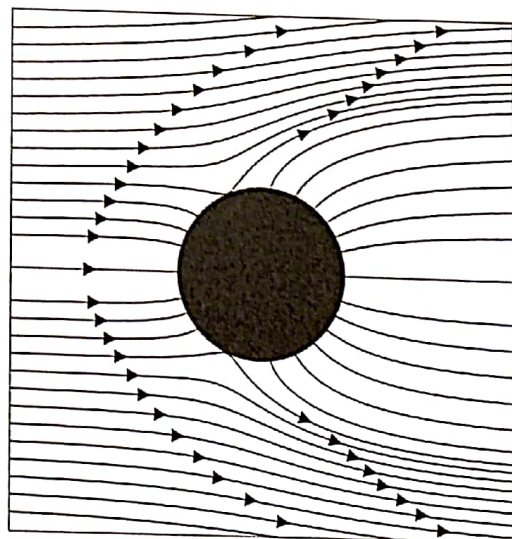
(b)  $t_{90} = 9\tau_Q = 21 \text{ ms}$

(c) La durée de traversée des poussières est  $L/u_0 = 10 \text{ s}$ . Elle est très grande devant la durée nécessaire pour atteindre presque la charge limite. On peut considérer que la charge limite est atteinte pratiquement dès l'entrée de la fumée poussiéreuse dans l'électrofiltre.

Question I.A.3 (d)



Question II.A.1 (a)



# Influence de charges en mouvement lent selon la normale à un conducteur

## I Étude de champs électrostatiques

I.1. Le plan  $Oxy$  est un plan d'antisymétrie des charges donc également de  $\vec{E}$ . En tout point du plan, le champ est donc normal au plan. Par invariance par rotation autour de l'axe  $Oz$ , il ne dépend que de la distance  $r$  à l'axe. On calcule la composante utile  $E_z$  en superposant les composantes (identiques selon  $Oz$ ) des champs créés par chaque charge.  $\vec{E} = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{(Z^2 + r^2)^{3/2}} \vec{u}_z$ .

Les points du plan  $Oxy$  sont à égale distance des deux charges opposées. Le potentiel est alors nul en tout point de ce plan.

I.2. On utilise l'expression rappelée par l'énoncé qu'on projette sur  $\vec{u}_z$  avec, pour les points du plan  $Oxy$ ,  $\vec{r} = Z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$  pour obtenir  $E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0(r^2 + Z^2)^{3/2}} \left( 3\frac{pZ^2}{r^2 + Z^2} - p \right) = \frac{p(2Z^2 - r^2)}{4\pi\epsilon_0(r^2 + Z^2)^{5/2}}$ . C'est de la forme souhaitée avec  $K = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}$  et  $f(r, Z) = 2Z^2 - r^2$ .

Le fait de placer le dipôle en  $+Z$  ne fait que changer  $Z$  en  $-Z$  ce qui ne change pas  $E_z$ .

I.3. Le plan  $Oxy$  est un plan d'antisymétrie pour les charges donc aussi pour le champ électrique. En tout point du plan  $Oxy$ , le champ est donc normal au plan. Seule la composante  $E_z$  est non nulle. On la calcule en superposant les contributions d'éléments de longueur  $dZ$  situés en  $Z$  et  $-Z$  et donc de charges  $q = \lambda dZ$  et  $-q$ . D'après la première question, chaque contribution vaut  $dE_z = -\frac{2\lambda dZ}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{(Z^2 + r^2)^{3/2}}$ . Il reste à sommer pour  $Z$  allant de  $0$  à  $+\infty$  pour obtenir  $E_z = -\frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ -(Z^2 + r^2)^{-1/2} \right]_{Z=0}^{Z=\infty} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ . C'est le même module que pour une droite complète de charge linéique  $\lambda$  mais dans notre cas le champ est axial à la place de radial.

I.4. (a) La dimension de  $P$  est celle d'un moment dipolaire ( $[Q]L$ ) divisé par une longueur. C'est donc une charge.

(b) On découpe le segment  $OA$  en morceaux de longueur (choisie aussi petite qu'on veut)  $\delta z$ . Chaque morceau porte un dipôle de moment dipolaire  $P\delta z$  qu'on peut considérer comme un doublet comportant une charge  $-P$  à l'extrémité inférieure et une charge  $+P$  à l'extrémité supérieure (pour avoir la bonne valeur du moment dipolaire). Alors, sur le segment  $OA$ , les charges aux extrémités de deux morceaux successifs se neutralisent et il ne reste qu'une charge  $-P$  en  $O$  et une charge  $+P$  en  $A$ .

(c) Le point  $A$  tend vers l'infini, le champ que crée la charge  $P$  en  $A$  tend vers  $0$  en tout point. Il ne reste que le champ créé par la charge  $-P$  placée en  $O$ . Les lignes de champ sont les demi-droites issues de  $O$ .

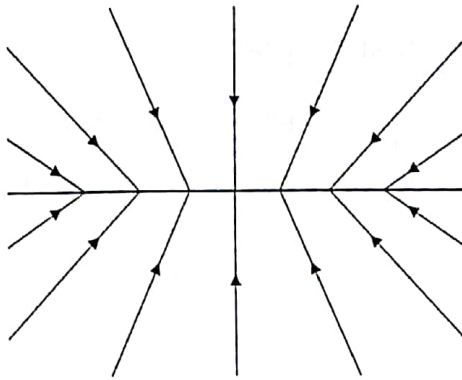
## II Charge ( $q$ ) immobile sur l'axe $Oz$

II.1. Considérons les deux problèmes : d'un côté le conducteur au potentiel nul occupant le demi-espace  $z < 0$  en présence de la charge  $q$  en  $(0,0,Z)$ , de l'autre le système des deux charges étudié en I.1. Dans les deux cas les équations locales vérifiées par  $\vec{E}$  dans le demi-espace  $z > 0$  sont les mêmes (les champs scalaires  $\rho$  sont identiques si on modélise la charge ponctuelle en  $(0,0,Z)$  par une boule et le potentiel est le même sur la surface  $(\Sigma)$  entourant ce domaine (nul sur le plan  $Oxy$  et nul à l'infini). D'après le théorème d'unicité, le champ est le même pour  $z > 0$  dans les deux problèmes.

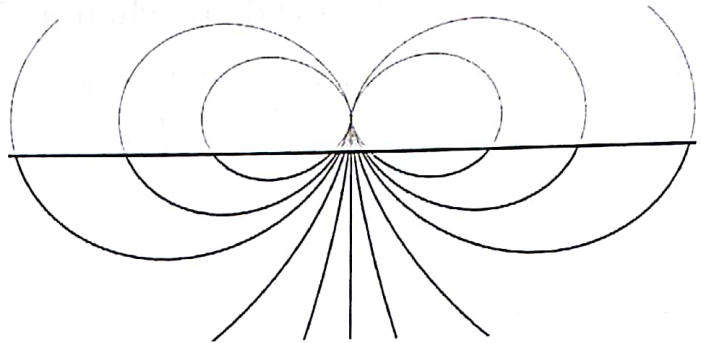
II.2. Dans le problème du I.1, le champ électrique était continu sur le plan  $Oxy$ . Sa limite lorsqu'on tend vers le plan dans le domaine  $z > 0$  était donc la valeur calculée en  $z = 0$ . D'après la question précédente, c'est alors aussi la limite du champ lorsque  $z$  tend vers  $0^+$  dans le cas du problème avec le conducteur. Par contre, dans le cas du conducteur, la limite lorsque  $z$  tend vers  $0^-$  est nulle (le champ est nul dans le conducteur). La relation de passage permet alors de dire que la charge superficielle du conducteur est  $\sigma = \epsilon_0(E_z(0^+) - E_z(0^-)) = \epsilon_0 E_z \text{ question I.1} = -\frac{q}{2\pi} \frac{Z}{(Z^2 + r^2)^{3/2}}$ .

**II.3.** Dans le domaine  $z > 0$ , d'après II.1, le champ créé par l'ensemble conducteur et  $q$  en  $(0,0,Z)$  est le même que celui créé par l'ensemble  $-q$  en  $(0,0,-Z)$  et  $q$  en  $(0,0,Z)$ . Donc, le champ créé par le conducteur (c'est à dire par les charges à sa surface est le même que celui créé par  $-q$  placée en  $(0,0,-Z)$  (lignes de champ rectilignes).

Dans le domaine  $z < 0$  le champ est nul donc le champ créé par le conducteur est l'opposé de celui créé par  $q$  placée en  $(0,0,Z)$  (lignes de champ rectilignes se coupant cette fois en  $(0,0,Z)$ ). On aurait aussi pu le déterminer en exploitant le fait que le champ créé par ce plan est symétrique par rapport au plan. Voir la carte de champ ci-dessous à gauche.



Question II.3



Question III.3

### III Charge ( $q$ ) en mouvement sur l'axe $Oz$

**III.1.** Avec l'expression de la question II.2 où maintenant  $Z$  est fonction de  $t$ ,  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{qV}{2\pi} \frac{2Z^2 - r^2}{(Z^2 + r^2)^{5/2}}$ . La charge étant une grandeur conservatrice, sur un élément de surface  $dS$  du plan  $Oxy$  la charge  $\sigma dS$  ne peut varier que si des charges arrivent en se déplaçant dans le conducteur donc par en dessous de  $dS$ . La charge par unité de temps (débit arrivant sur  $dS$ ) est alors le flux de  $\vec{j}$  c'est-à-dire  $j_z dS$  donc  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} dS = j_z dS$  et  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = j_z(z = 0^-)$ .

**III.2.** D'après la loi d'Ohm  $j_z = \gamma E_z$  donc  $E_z(z = 0^-) = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{qV}{2\pi\gamma} \frac{2Z^2 - r^2}{(Z^2 + r^2)^{5/2}}$ . C'est exactement le résultat trouvé en I.2 pour le champ d'un dipôle tel que  $\frac{p}{4\pi\epsilon_0} = \frac{qV}{2\pi\gamma}$  placé en  $(0,0,Z)$  ou bien en  $(0,0,-Z)$ . On prend donc  $p = \frac{2qV\epsilon_0}{\gamma}$ .

**III.3.** Le conducteur est localement neutre ( $\rho = 0$ ; voir le début de l'énoncé) donc, pour trouver le champ pour  $z < 0$ , on doit résoudre les équations  $\text{div} \vec{E} = 0$  et  $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$  avec les conditions aux limites donnant la valeur de la composante normale  $E_z$  sur le plan  $Oxy$  et le potentiel nul à l'infini. Ces conditions garantissent l'unicité et sont les mêmes pour le dipôle placé en  $(0,0,Z)$  (mais pas pour le dipôle placé en  $(0,0,-Z)$  car, dans ce cas, il y a des charges en  $(0,0,-Z)$  donc  $\text{div} \vec{E}$  n'y est pas nul. Le champ dans le conducteur est donc le même que celui du dipôle.

La carte de champ est donc dipolaire. Voir le dessin ci-dessus à droite. Seule la partie  $z < 0$  (en traits épais) est pertinente. La partie  $z > 0$  (en grisé) n'a été dessinée que pour rappeler l'allure d'ensemble du champ dipolaire « centré » sur  $(0,0,Z)$ .

**III.4.** Le fait de s'appuyer dans les calculs sur un champ nul alors qu'il ne l'est pas en réalité ne modifie que peu la valeur de  $\sigma$  si le champ non nul est négligeable devant  $\sigma/\epsilon_0$  donc si (pour un ordre de grandeur typique de  $E_z$  on prend  $r = 0$ ),  $\frac{|qV|}{2\pi\gamma} \frac{2}{Z^3} \ll \frac{|\sigma|}{\epsilon_0} \approx \frac{|q|}{2\pi\epsilon_0 Z^2}$  c'est-à-dire  $2|V|\epsilon_0 \ll \gamma Z$  (facteur 2 non significatif).

**III.5.**  $\frac{\epsilon_0 |V|}{\gamma} \approx 9 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

L'approximation est donc bonne sauf si l'électron est à une distance d'ordre de grandeur atomique du conducteur (vraiment très proche!).

## IV Faisceau homocinétique sur l'axe Oz

**IV.1.** On considère les deux problèmes : d'un côté le conducteur au potentiel nul occupant le demi-espace  $z < 0$  en présence de la demi-droite chargée  $\lambda$ , de l'autre le système des deux demi-droites étudié en I.3. Par le même argument qu'en II.1, le champ est le même pour  $z > 0$  dans les deux problèmes (mêmes équations locales et potentiel nul sur la frontière du domaine étudié).

On calcule  $\sigma$  comme en II.2.  $\sigma = \epsilon_0(E_z(0^+) - E_z(0^-)) = \epsilon_0 E_z \text{ question I.3} = -\frac{\lambda}{2\pi r}$ .

**IV.2.** En un point (fixe) de la demi-droite  $x = 0, y = 0, z > 0$ , pendant  $\delta t$ , passe la charge contenue sur la longueur  $|V|\delta t$  soit  $\delta Q = \lambda|V|\delta t$ . Le débit de charge est donc  $I = \delta Q/\delta t = \lambda|V| = -\lambda V$  (intensité comptée positivement vers le bas).

En régime permanent, la charge ne pouvant disparaître en O il doit y avoir un courant qui continue dans le conducteur à partir de O (loi des nœuds).

$\sigma$  (calculé en IV.1) étant constant, on doit avoir  $0 = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = j_z(z = 0^-)$  (voir III.1).

**IV.3.** On a vu en III.3 que le fait qu'une charge  $q$  placée en  $(0,0,Z)$  se déplace à la vitesse  $V$  créait dans le conducteur un champ électrique identique à celui d'un dipôle placé au même point avec  $p = \frac{2qV\epsilon_0}{\gamma}$ . Par superposition, une répartition linéique de charges de vitesse  $V$ , de densité  $\lambda$  crée dans le conducteur un champ identique à celui d'une répartition linéique de dipôles de densité  $P = \frac{2\lambda V\epsilon_0}{\gamma}$ . Or, en I.4, on a vu que le champ créé par cette répartition de dipôles était celui d'une charge ponctuelle placée en O de valeur

$$-P = -\frac{2\lambda V\epsilon_0}{\gamma}. \text{ Donc } \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = -\frac{2\lambda V}{4\pi\gamma} \frac{\vec{u}_r \text{ sphérique}}{r^2}.$$

Les lignes de champ sont radiales.  $\lambda V > 0$  correspond à un faisceau incident d'électrons.  $I < 0$  et  $\vec{j}$ , dans le conducteur, est dirigé vers le point O.

On peut vérifier que le flux de  $\vec{j}$  à travers la demi-sphère de rayon  $r$  de centre O vaut  $-\lambda V$  qui est l'intensité  $I$  apportée par les charges en mouvement (voir IV.2). La conservation de la charge est assurée.

**IV.4.** Le champ électrique radial calculé à la question précédente ne peut être créé que par la charge ponctuelle  $-P = -\frac{2\lambda V\epsilon_0}{\gamma}$  placée en O.

Pour  $z > 0$ , le champ est la superposition de celui obtenu en IV.1 (qui serait créé par les demi-droites de charges linéiques  $\lambda$  et  $-\lambda$  du I.3) et de celui créé par la charge ponctuelle placée en O.

**IV.5.** Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie des courants donc d'antisymétrie du champ magnétique. Le champ magnétique est donc, sur ces plans, orthogonal au plan. Il est donc orthoradial. L'invariance par rotation autour de Oz montre que  $B_\theta$  ne dépend pas de  $\theta$  et l'application du théorème d'Ampère à un cercle de rayon  $r$  d'axe Oz orienté par  $\vec{u}_\theta$  conduit à :

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_{\text{enlacée}} \text{ avec } I_{\text{enlacée}} = -I = \lambda V \text{ pour } z > 0 \text{ et } I_{\text{enlacée}} = \lambda V \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right) \text{ pour } z < 0$$