DS1

Influence de charges en mouvement lent selon la normale à un conducteur

L'objet de ce problème est d'étudier les phénomènes qui se produisent dans un conducteur lorsqu'un faisceau de particules chargées (issu d'un accélérateur) atteint une cible conductrice.

Propriétés des conducteurs

Nous admettrons les propriétés suivantes des conducteurs électriques usuels (les métaux par exemple) :

- En régime permanent ou en régime lentement variable la densité volumique de charge est nulle en tout point de l'intérieur d'un conducteur.
- Il est néanmoins possible qu'un conducteur soit chargé. Dans ce cas, les charges sont présentes uniquement à la surface du conducteur et on peut les décrire par une densité surfacique de charge $\sigma(\mathrm{P})$ qui peut dépendre du point P considéré, situé à la surface du conducteur.
- Si le champ électrique n'est pas nul dans un conducteur, il existe des courants électriques suivant la loi d'Ohm locale : la densité volumique de courant en tout point M à l'intérieur du conducteur est donnée par la loi $\vec{j}(\mathrm{M}) = \gamma\vec{E}(\mathrm{M})$. La constante γ, nommée conductivité électrique, caractérise le matériau conducteur.
- Lorsque le milieu extérieur au conducteur ne comporte que des charges immobiles, alors il s'établit quasi instantanément un régime permanent dans lequel aucun courant ne circule dans le conducteur ($\vec{j} = 0$ en tout point) et, d'après le point précédent, le champ électrique est nul en tout point de l'intérieur du conducteur. Le potentiel est alors uniforme dans tout le volume du conducteur (et à sa surface).

Résultats d'électromagnétisme

On rappelle les résultats suivants qui pourront être utilisés sans démonstration dans ce problème :

- En présence d'une distribution superficielle de charges, le champ électrique n'est pas défini sur les points de la surface chargée. On peut par contre définir les limites du champ de part et d'autre de la surface et ces limites vérifient la *relation de passage* : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$
- En posant $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $r = \| \vec{r} \|$, le champ électrique créé par un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ placé à l'origine O de l'espace vérifie

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right)$$

Théorème d'unicité

On utilisera dans ce problème le résultat mathématique suivant :

On considère un domaine (volume) de l'espace (V) qui constitue l'intérieur d'une surface fermée (Σ). Dans ce volume, le champ électrostatique vérifie les deux équations $\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$.

La solution de ce système d'équations est unique si on impose en chaque point de (Σ) la valeur de la composante normale de $\vec{E}$ ou bien la valeur du potentiel électrostatique.

Certaines parties de (Σ) peuvent être rejetées à *l'infini*. L'unicité est garantie dans ce cas si on impose de plus que le potentiel électrostatique est nul (en fait tend vers 0) pour les points de (Σ) situés à l'infini.

Données numériques

Permittivité du vide	ε_0	$\approx$	$9 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$
Masse de l'électron	m	$\approx$	$10^{-30}\,\mathrm{kg}$
Charge élémentaire	e	$\approx$	$1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

L'étude est faite dans un référentiel galiléen. On note $Oxyz$ le repère cartésien. La distance d'un point quelconque à l'axe Oz est notée r.

La partie I permet de montrer des résultats intermédiaires qui pourront être utilisés dans les parties suivantes.

I Étude de champs électrostatiques

I.1

Deux charges ponctuelles immobiles $(+q)$ en $(0,0,+Z)$ et $(-q)$ en $(0,0,-Z)$ créent un champ électrostatique. Calculer ce champ en tout point du plan Oxy. Exprimer le résultat en fonction des données et de r, distance à l'axe Oz. Que vaut le potentiel électrostatique sur le plan Oxy ?

I.2

Dans une situation indépendante, un dipôle électrique de moment dipolaire $\overrightarrow{p} = p\overrightarrow{u_z}$ est placé sur l'axe Oz au point (0,0,$-Z$), avec $Z > 0$. Calculer en tout point du plan Oxy la composante E_z selon $\overrightarrow{u_z}$ du champ électrique créé par le dipôle. Écrire le résultat sous la forme $K\frac{f(r,Z)}{(r^2+Z^2)^{5/2}}$ où K est une constante (à préciser) et $f(r,Z)$ un polynôme de degré 2 en Z et r à préciser également.

Comment est modifié le résultat si le même dipôle est placé en (0,0,$+Z$) ?

I.3

On envisage maintenant une répartition filiforme de charge sur l'axe Oz. La densité linéique est $+\lambda$ pour $z > 0$ et $-\lambda$ pour $z < 0$ où λ est une constante. Calculer en tout point du plan Oxy, sauf en O, le vecteur champ électrique. Commenter la valeur du module de ce champ.

I.4

On s'intéresse maintenant à une répartition continue de dipôles électriques placés sur l'axe Oz entre les points O ($z = 0$) et A ($z = L > 0$). Cette répartition est décrite ainsi : tout intervalle δz se trouvant sur le segment OA se comporte comme un dipôle de moment dipolaire $\delta\overrightarrow{p} = P\,\delta z\,\overrightarrow{u_z}$ où P est une constante.

(a) P est la densité linéique de moment dipolaire (ou moment dipolaire par unité de longueur). Quelle est sa dimension ?

(b) Montrer que cette répartition de dipôles crée, dans tout l'espace hors du segment OA, le même champ que deux charges ponctuelles que l'on précisera, l'une placée en O et l'autre placée en A.

(c) En déduire le champ au voisinage de O lorsque L tend vers l'infini. Faire un dessin des lignes de champ dans ce cas.

Dans toute la suite du problème, le demi-espace ($z < 0$) est un milieu conducteur de conductivité γ s'étendant à l'infini où le potentiel est pris égal à 0. En statique, le potentiel est alors nul en tout point du conducteur.

On pourra considérer qu'une charge ponctuelle (q) est équivalente à une très petite boule (chargée avec une densité volumique uniforme) de charge totale q.

II Charge (q) immobile sur l'axe Oz

En plus du conducteur mentionné ci-dessus, on place une charge ponctuelle (q) sur l'axe Oz au point (0,0,Z) avec $Z > 0$. Dans cette partie **II** elle est immobile.

II.1

Justifier que, dans le demi-espace ($z > 0$), le champ électrostatique est le même que celui du système de deux charges étudié en **I.1.**

II.2

En utilisant le fait qu'ici le champ électrique est nul dans le conducteur, en déduire la densité surfacique de charge $\sigma(r)$ nécessairement présente à la surface du conducteur (plan $z = 0$).

II.3

Décrire le champ que créerait la distribution de charge $\sigma(r)$ seule : en dessiner les lignes de champ (dans tout l'espace, aussi bien $z > 0$ que $z < 0$).

III Charge (q) en mouvement sur l'axe Oz

Dans cette partie **III**, la charge (q) est en mouvement lent le long de l'axe Oz. On note $Z(t)$ sa position et $V = \frac{dZ}{dt}$ sa vitesse.

Cette vitesse est assez faible pour que le champ électrique vérifie $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0}$ et pour que les résultats de la partie **II** soient à chaque instant de bonnes approximations du champ électrique pour $z > 0$ et de la densité surfacique de charge sur le plan $z = 0$.

En revanche, il va falloir étudier le problème du champ dans le conducteur (zone $z < 0$).

III.1

Calculer $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ en tout point du plan Oxy. Montrer qu'il existe nécessairement dans la région $z < 0$ une densité volumique de courant dont la composante $j_z(z = 0^-)$ est reliée simplement à $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$.

III.2

Montrer que, juste sous la surface du plan Oxy, la composante normale du champ électrique est bien approchée par l'expression $E_z(z = 0^-) = \frac{qV}{2\pi\gamma} \frac{2Z^2 - r^2}{(Z^2 + r^2)^{5/2}}$. Reconnaître en $E_z(z = 0^-)$ la composante du champ créé par un dipôle dont on précisera le moment dipolaire et les deux positions possibles.

III.3

En déduire le champ électrique dans tout le conducteur (en expliquant pourquoi une seule des deux positions envisagées est acceptable). Représenter les lignes de champ de $\vec{E}$ et ($\vec{j}$) dans le conducteur.

III.4

On veut évaluer la validité de la solution obtenue. La démarche adoptée est approchée puisque l'expression de σ utilisée avait été obtenue en **II** en supposant le champ électrique nul dans le conducteur alors qu'on vient de lui trouver une valeur non nulle.

En utilisant les valeurs de $E_z(z = 0^+)$, $E_z(z = 0^-)$ et σ/ε_0, déterminer la condition de validité du modèle et montrer qu'elle conduit à $\varepsilon_0|V| \ll \gamma Z$.

III.5

$\gamma = 10^5\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$. Calculer $\frac{\varepsilon_0|V|}{\gamma}$ pour un électron animé d'une vitesse $V = -10^7\,\mathrm{m\,s}^{-1}$. Commenter.

IV Faisceau homocinétique sur l'axe Oz

La milieu conducteur occupant l'espace ($z < 0$) est mainteant la cible d'un faisceau de particules qui arrivent avec une vitesse $V < 0$ le long de l'axe Oz. Le faisceau est considéré comme filiforme, la charge linéique λ est uniforme. La vitesse V des particules reste constante jusqu'à leur impact en O sur le conducteur. Cette situation est alors un *régime permanent* (statique).

Le modèle étudié présente une singularité en O. On ne s'en inquiètera pas ; il suffirait en fait tenir compte de la largeur (faible mais non nulle) du faisceau pour rendre calculables les grandeurs divergentes.

IV.1

Suivant le même principe que dans la partie **II**, déterminer la densité surfacique de charge qui apparaît sur le conducteur (dans le plan Oxy).

IV.2

Calculer l'intensité du faisceau. Montrer qu'il y a nécessairement un courant dans le conducteur. Montrer que ce courant doit pouvoir être décrit (sauf en O) par une densité volumique de courant telle que $j_z(z = 0^-) = 0$.

IV.3

Par une démarche analogue à celle adoptée en partie **III**, déterminer $\vec{E}$ et $\vec{j}$ dans le conducteur. Faire un dessin dans le cas $\lambda V > 0$.

IV.4

Montrer la présence d'une charge en O et donner sa valeur. Que vaut le champ électrique pour $z > 0$?

IV.5

Calculer le champ magnétique dans le vide pour $z > 0$, puis dans le conducteur.

Physique-chimie 1

PSI 2017

CONCOURS CENTRALE·SUPÉLEC

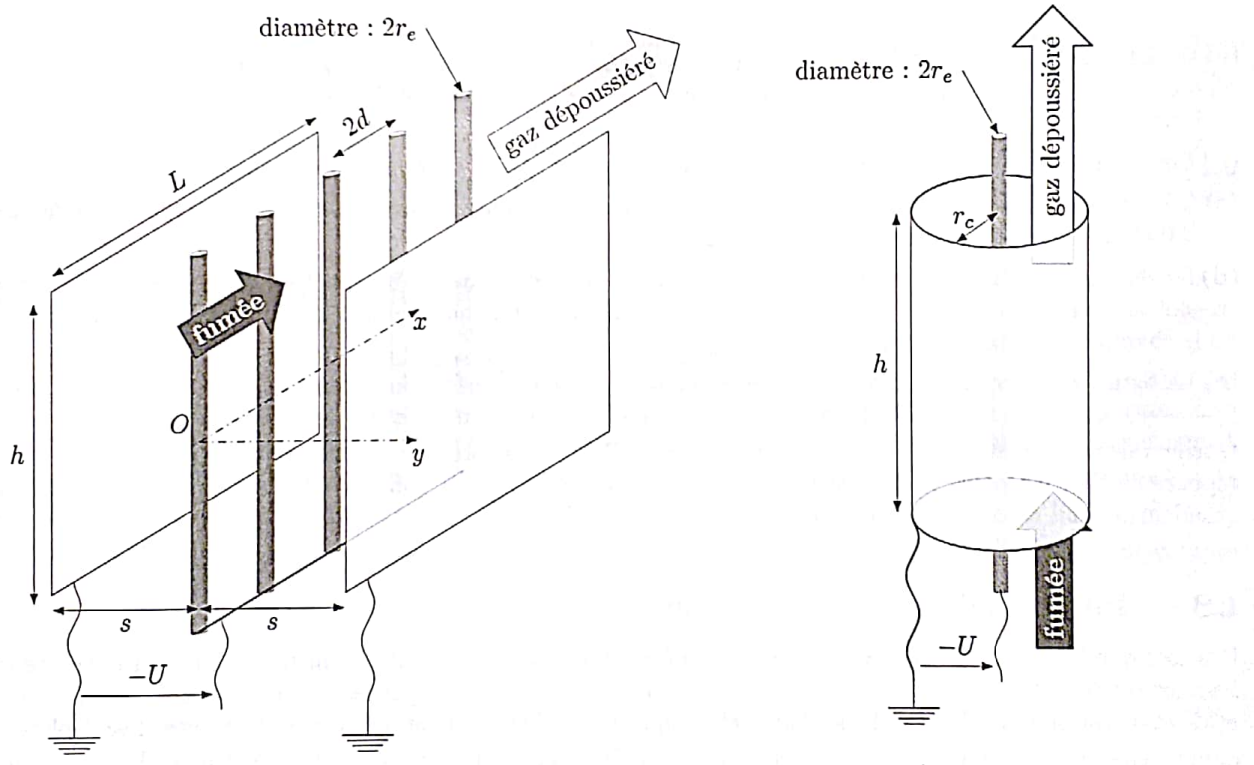
Calculatrices autorisées

Traitement des fumées industrielles par un électrofiltre

Les poussières, petites particules en suspension dans l'air, sont des polluants fréquemment présents dans les fumées industrielles. Leur émission est soumise à une réglementation toujours plus stricte qui oblige les industriels à équiper leurs installations de dispositifs de dépoussiérage. Les électrofiltres peuvent jouer ce rôle dans des installations aussi variées que les centrales thermiques, les cimenteries, les incinérateurs, les aciéries ou encore les verreries.

Un électrofiltre est essentiellement constitué de deux électrodes entre lesquelles on applique une forte tension électrique. L'une d'elles, appelée collectrice, est mise à la terre alors que l'autre, nommée émettrice, est portée à un potentiel négatif $-U$ provoquant l'ionisation du gaz à son voisinage. Les anions ainsi produits se déplacent vers la collectrice, correspondant au passage d'un courant au travers du gaz. En chemin, certains de ces anions se fixent sur les grains de poussière qui acquièrent ainsi une charge négative. Ces particules polluantes sont alors attirées par la collectrice et s'y fixent en formant un dépôt qu'on élimine en ébranlant l'électrode à coups de marteau (électrofiltre sec) ou en la rinçant par un liquide (électrofiltre humide). Le résidu est récupéré dans des trémies, puis évacué.

Dans les électrofiltres secs, les émettrices sont des fils verticaux et les collectrices des plaques verticales entre lesquelles la fumée à dépoussiérer s'écoule horizontalement (partie gauche de la figure 1). Dans les électrofiltres humides, l'émettrice est un fil vertical et la collectrice un cylindre coaxial, la fumée s'écoulant selon l'axe de ce tube (partie droite de la figure 1).



(a) Électrofiltre sec

(b) Électrofiltre humide

FIGURE 1 – Deux types d'électrofiltres

Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie. Une liste de valeurs numériques et de formules figure en fin d'énoncé.

I Champ électrique dans un électrofiltre

I.A – Champ électrique à vide et tension seuil

Selon des données expérimentales, l'ionisation du gaz au voisinage de l'émettrice se produit lorsque la norme du champ électrique y dépasse une valeur seuil E_0 dépendant du rayon r_e de cette électrode, de la pression et de la température. Dans tout le problème, $r_e = 1{,}25\,\text{mm}$ et $E_0 = 4{,}4 \times 10^6\,\text{V m}^{-1}$.

I.A.1) Pour une configuration donnée des électrodes, le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V dans l'espace inter-électrode dépendent de la tension U imposée. Pour les déterminer, on se place à la limite d'apparition du courant ce qui conduit à supposer l'espace inter-électrode vide de charge. Dans ces conditions, comment s'écrit l'équation de Poisson ?

I.A.2) Électrofiltre humide

(a) On considère tout d'abord l'électrofiltre humide, tubulaire (figure 1b). Le rayon de la collectrice portée à la masse est noté r_c. En choisissant un système de coordonnées bien adapté et en négligeant les effets de bord, de quelles variables le potentiel électrostatique V dépend-il ? Donner son expression en fonction de U, r_e et r_c.

(b) Exprimer le champ électrique au contact de l'émettrice et en déduire la valeur U_0 à donner à U pour qu'il atteigne la valeur E_0.

(c) Calculer numériquement U_0 pour $r_c = 150\,\text{mm}$.

I.A.3) Électrofiltre sec

On raisonne toujours sous les hypothèses de la question **I.A.1)**, mais on considère désormais un électrofiltre sec formé de plaques et de fils, caractérisé par les distances s et d définies sur la figure 1a. L'origine des coordonnées est placée sur l'un des fils, à égale distance des deux collectrices. Tout effet de bord étant négligé, le potentiel électrostatique est donné par

$$V(x,y,z) = \frac{U}{\Lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{\cosh\left(\dfrac{\pi(x-2md)}{2s}\right) - \cos\left(\dfrac{\pi y}{2s}\right)}{\cosh\left(\dfrac{\pi(x-2md)}{2s}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi y}{2s}\right)} \right)$$

(a) On considère le champ scalaire f vérifiant, en coordonnées cartésiennes, $f(x,y,z) = \ln\left(\cosh(\alpha x) + \cos(\beta y)\right)$ où α et β sont des constantes. Calculer le laplacien de f. À quelle condition Δf est-il nul ? Que vaut le laplacien de l'expression proposée pour V ? Commenter.

(b) Vérifier que cette expression est compatible avec la présence des collectrices au potentiel nul.

(c) Vérifier qu'elle est également compatible avec la présence des fils de rayon r_e (émettrices) dans la limite où $r_e \to 0$ et trouver l'expression de Λ en fonction de d, s et r_e.

(d) Les équipotentielles sont représentées sur la figure B du document réponse. Compléter cette figure en y traçant en couleur des lignes de champ orientées. Quelles sont les zones de fort champ ? Existe-t-il des points où le champ électrique s'annule ?

(e) La figure 2 montre le comportement de $|E_y(x=0,y,z=0)|$ en fonction de y. Ce graphique, obtenu pour $d/s = 4/3$, utilise les variables adimensionnées $|E_y|/(U/s)$ (en ordonnée) et y/s (en abscisse).
Quelle valeur U_0 faut-il donner à U pour provoquer l'ionisation près de l'électrode émettrice ? Exprimer la réponse en fonction de s et E_0, puis estimer la valeur numérique de U_0 pour $s = 150\,\text{mm}$. Comparer l'ordre de grandeur obtenu avec celui concernant l'électrofiltre tubulaire.

I.B – Influence des charges d'espace

Dès lors que la tension U dépasse la valeur seuil U_0, un courant d'intensité i s'instaure dans l'électrofiltre et l'espace inter-électrode se peuple d'anions dont la présence, caractérisée par les densités volumiques de charge $\rho(\text{M})$ et de courant $\vec{\jmath}(\text{M})$, modifie le champ électrique. Ces anions sont supposés tous identiques et se déplacent dans le champ électrique $\vec{E}(\text{M})$ avec une vitesse $\vec{v}(\text{M}) = -b\vec{E}(\text{M})$ avec $b = 3{,}1 \times 10^{-4}\,\text{m}^2\,\text{V}^{-1}\,\text{s}^{-1}$ dans les conditions envisagées.
La connaissance des champs couplés $\vec{E}(\text{M})$ et $\rho(\text{M})$ constitue un enjeu majeur car ces grandeurs déterminent la migration des grains de poussière. Dans un électrofiltre sec, leur détermination s'appuie sur de lourdes méthodes numériques. Nous l'abordons ici uniquement dans le cas des électrofiltres humides en négligeant tout effet de bord. L'influence des poussières mobiles sur le champ est négligée.

I.B.1) La collectrice tubulaire et l'émettrice coaxiale ont pour hauteur h. On note $j = \vec{\jmath} \cdot \vec{e_r}$ et $E = \vec{E} \cdot \vec{e_r}$ les projections sur le vecteur unitaire radial usuel des coordonnées cylindriques et r la distance d'un point à l'axe.
Un courant d'intensité $i > 0$ circule radialement d'une électrode vers l'autre. Dans quel sens ? Exprimer j en fonction de i et des variables qui s'imposent.

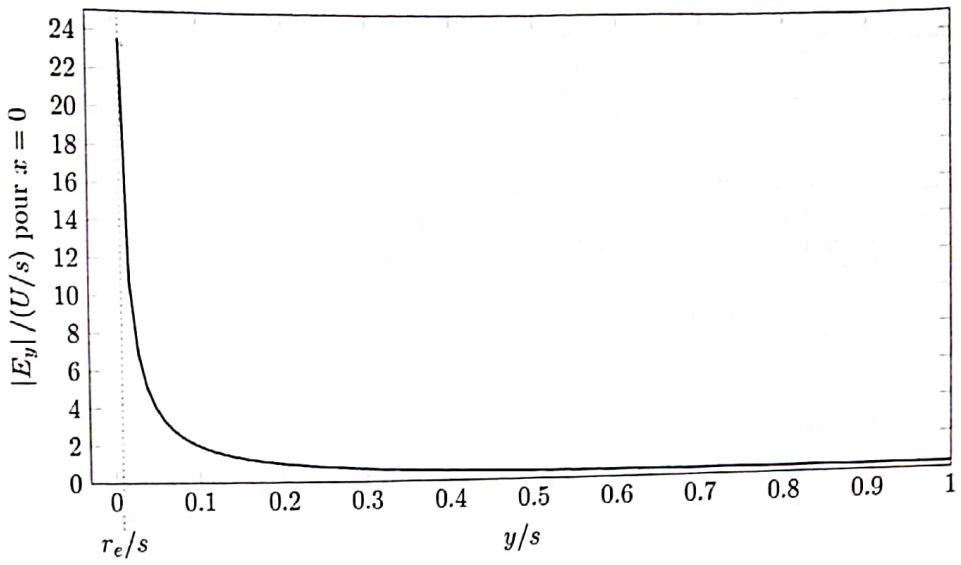


FIGURE 2 – Variations du champ électrique dans un électrofiltre sec

I.B.2) Exprimer la densité volumique de charge en fonction de i, E, h, r et b.

I.B.3) Quelle équation de l'électromagnétisme exprime localement la modification du champ électrique par les ions ? Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$rE\frac{\mathrm{d}(rE)}{\mathrm{d}r} = \frac{ir}{2\pi h\varepsilon_0 b}$$

I.B.4) À une certaine distance $r_0 > r_e$ de l'axe, la norme du champ électrique prend la valeur E_0. En déduire l'expression de E.

I.B.5) Pour r suffisamment grand (quelques centimètres en pratique), on considère généralement que le champ devient grossièrement uniforme. Quelle est alors son expression approchée ? Quelle est ici sa valeur numérique si $i/h = 0{,}70\,\mathrm{mA\,m^{-1}}$?

I.B.6) Dans cette région de quasi-uniformité, calculer la vitesse des ions, puis la densité volumique de charge ρ et le nombre d'ions par centimètre cube au voisinage de la collectrice ($r = r_c$), en supposant que chacun porte une charge élémentaire.

II Comportement des poussières dans l'électrofiltre

II.A – Charge d'une particule sphérique : modèle de Pauthenier

On aborde dans cette partie le processus de chargement des poussières, assimilées à des sphères de diamètre $d = 2a$. Ces grains sont initialement neutres mais les anions mobiles le long des lignes de champ les rencontrent et s'y fixent, leur communiquant progressivement une charge $Q(t) < 0$. Le champ $\vec{E}$ étudié dans la partie précédente est désormais supposé uniforme et connu. Chaque grain de poussière chargé et polarisé sous l'influence de $\vec{E}$ déforme localement les lignes de champ. Pour éviter toute confusion, on note $\vec{E}_t$ le champ tenant compte simultanément de $\vec{E}$ et de la présence des grains.

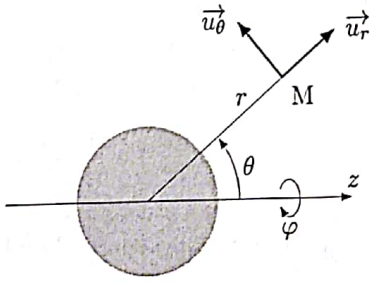


FIGURE 3 – Coordonnées sphériques autour d'une poussière sphérique

On raisonne sur un grain unique immobile et on adopte momentanément un nouveau système de coordonnées (r, θ, φ) de type sphérique, dont l'origine se situe au centre du grain et tel que $\vec{E} = E\vec{u_z}$ avec $E < 0$ (figure 3).

Des considérations d'électrostatique montrent que, à l'extérieur du grain ($r \geqslant a$), le champ électrique total est donné par

$$\vec{E}_t = \vec{E} + E\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\frac{a^3}{r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right) + \vec{E}_1$$

Dans cette expression, $\vec{E}_1$ désigne le champ que créerait autour d'elle la particule sphérique portant Q si elle était seule dans l'espace. La constante sans dimension ε_r dépend de la nature physico-chimique de la poussière. Les lignes de champ sont tracées sur la figure A du document réponse pour $Q = 0$ puis pour une valeur négative de Q.

II.A.1) Calcul de la charge limite

(a) Orienter par des flèches bleues les lignes de champ de la figure A du document réponse et représenter le mouvement des anions par des flèches rouges. On précise que les lignes de champ qui rencontrent la sphère en la pénétrant ne portent pas d'anions : la sphère peut capturer des anions mais ne peut pas en émettre.

(b) Quelle est l'expression de $\vec{E}_1$? L'accroissement de $|Q|$ a-t-il tendance à réduire ou à élargir la portion de la sphère d'où *partent*, vers des valeurs croissantes de r, les lignes de champ ? Favorise-t-il ou s'oppose-t-il à l'arrivée de nouveaux anions sur la sphère ?

(c) Le grain de poussière atteint sa charge limite Q_{lim} lorsque les lignes de champ sont si distordues qu'aucun anion ne peut plus lui parvenir. Montrer que

$$Q_{\text{lim}} = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E\left(1 + 2\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right)$$

(d) Calculer numériquement Q_{lim} pour $\varepsilon_r = 10$, $d = 2a = 2{,}0\,\mu\text{m}$, $|E| = 5{,}0 \times 10^5\,\text{V m}^{-1}$. Combien de charges élémentaires cela représente-t-il ?

II.A.2) Loi horaire et durée de chargement

Le mécanisme décrit dans la question précédente est régi par la loi horaire

$$Q(t) = Q_{\text{lim}}\frac{t}{t + \tau_Q}$$

(a) Sachant que τ_Q ne dépend que de ε_0, b et $|\rho|$ (où ρ est la densité volumique de charge des anions), en donner une expression par analyse dimensionnelle. Le résultat exact s'obtient en plaçant un facteur 4 au numérateur.

(b) Calculer numériquement la durée t_{90} au bout de laquelle un grain de poussière atteint 90% de sa charge limite pour $b = 3{,}1 \times 10^{-4}\,\text{m}^2\,\text{V}^{-1}\,\text{s}^{-1}$ et $|\rho| = 5{,}0 \times 10^{-5}\,\text{C m}^{-3}$.

(c) La fumée poussiéreuse s'écoule à la vitesse $u_0 = 1\,\text{m s}^{-1}$ en traversant l'électrofiltre sur toute sa longueur $L = 10\,\text{m}$. Quelle conclusion peut-on tirer de la valeur numérique de t_{90} ?

Développements limités

On note cosh la fonction « cosinus hyperbolique ». Au voisinage de 0

$$\cosh(X) \approx 1 + \frac{X^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos(X) \approx 1 - \frac{X^2}{2}$$

Analyse vectorielle

En coordonnées cylindriques

$$\text{div}\,\vec{A}(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta\psi(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}(r,\theta,z) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_z}$$

Données numériques

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{H m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{F m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C}$