

DS3

Ligne bifilaire

Ce problème comporte trois parties dont certaines questions peuvent être abordées de façon indépendante. La première partie abordera la propagation d'une onde de courant dans une ligne électrique, la deuxième précisera la structure du champ électromagnétique dans la ligne et la troisième traitera de la transmission d'une onde électromagnétique par une lame conductrice.

Un formulaire et des données numériques sont regroupés en fin d'énoncé ; on posera $j^2 = -1$.

I Onde de courant dans une ligne électrique

Une ligne bifilaire est un câble électrique constitué par deux conducteurs parallèles (cf. fig. 1 partie gauche). Cette ligne électrique est caractérisée par son coefficient d'inductance propre linéique et sa capacité linéique, respectivement notés L et C . Cela signifie que chaque portion élémentaire de longueur dx peut être modélisée comme sur la partie droite de la figure. À l'abscisse x et à l'instant t , on désigne par $i(x, t)$ l'intensité du courant dans le conducteur supérieur de la ligne (une intensité identique circule dans le sens opposé à la même abscisse dans l'autre conducteur) et par $u(x, t)$ la tension entre les deux conducteurs de la ligne (cf. fig. 1 partie droite). Les courants et tensions sont non nuls grâce à la présence d'un générateur situé à (grande) distance du côté $x < 0$.

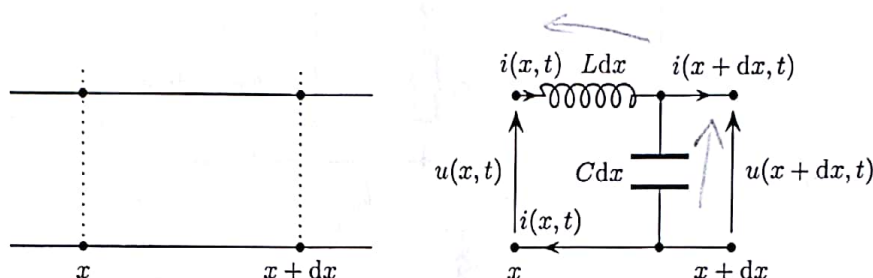


FIGURE 1 – Ligne électrique bifilaire sans pertes

1. Établir les deux équations différentielles liant $i(x, t)$ et $u(x, t)$.
2. On cherche des solutions harmoniques pour ce système d'équations sous la forme $i(x, t) = I(x) \exp(j\omega t)$ et $u(x, t) = U(x) \exp(j\omega t)$ en notation complexe. Déterminer, dans ce cas, la forme la plus générale de $I(x)$ puis de $i(x, t)$ et $u(x, t)$. Exprimer en fonction des caractéristiques de la ligne la vitesse de phase v_p des ondes ainsi mises en évidence.

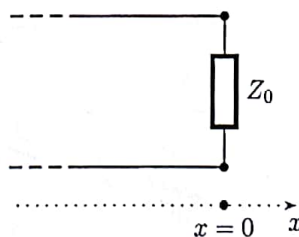


FIGURE 2 – Fermeture de la ligne sur une impédance terminale

3. La ligne, située dans l'espace $x < 0$, s'étend jusqu'en $x = 0$ où elle est fermée sur une impédance Z_0 (cf. fig. 2). Montrer qu'il existe une valeur Z_c de Z_0 , appelée *impédance caractéristique* de la ligne, telle que le rapport u/i devienne indépendant de x . On exprimera Z_c en fonction de L et C et on précisera la forme particulière de l'onde dans la ligne lorsque $Z_0 = Z_c$. Exprimer dans ce cas la puissance moyenne transportée par l'onde à l'abscisse x . Que se passe-t-il physiquement, d'un point de vue énergétique, en $x = 0$?
4. La ligne s'étend maintenant jusqu'à $x = +\infty$ mais on branche encore l'impédance $Z_0 = Z_c$ en parallèle sur la ligne à l'abscisse $x = 0$ (cf. fig. 3).
 - (a) Justifier que, dans la partie $x > 0$ de la ligne, l'onde est progressive.
 - (b) On s'intéresse à l'onde de courant dans la partie $x < 0$ de la ligne. Montrer que cette onde « voit » en $x = 0^-$ une impédance équivalente Z_1 qui s'exprime très simplement en fonction de Z_c .
 - (c) Définir et calculer le module r du coefficient de réflexion (en courant ou en tension) de l'onde en $x = 0$.

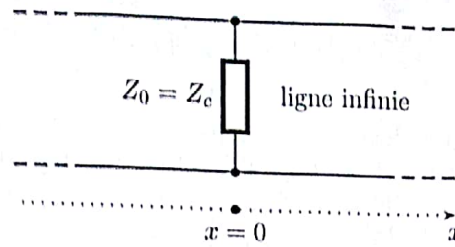


FIGURE 3 - Ligne infinie fermée en $x = 0$ sur son impédance caractéristique

5. On ajoute maintenant sur la ligne précédente un court-circuit en parallèle à l'abscisse $x = \ell$ (cf. fig. 4).

- Quelle est la forme nécessaire de l'onde de courant entre les abscisses $x = 0$ et $x = \ell$?
- Montrer qu'il existe une valeur minimale ℓ_0 de ℓ telle que le courant dans la partie positive de la ligne s'annule en $x = 0^+$. On exprimera ℓ_0 en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde de courant dans la ligne. En déduire alors le coefficient de réflexion et la forme de l'onde dans la partie négative de la ligne.

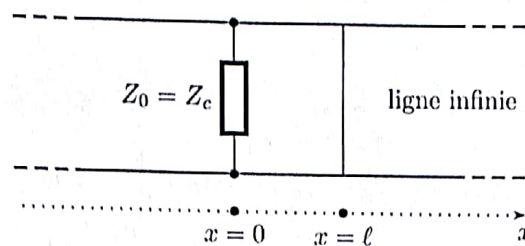


FIGURE 4 - Ligne infinie fermée et court-circuitée

II Champ électromagnétique dans la ligne

La ligne précédente est constituée de deux rubans conducteurs parfaits, de faible épaisseur, de largeur a , distants de b , l'espace entre les rubans étant vide (cf. fig. 5). Les rubans sont parcourus par des courants de densités surfaciques $\vec{j}_s = j_s(x, t)\vec{e}_x$ et $-\vec{j}_s$ et présentent sur leurs faces en regard des densités surfaciques de charge $\sigma(x, t)$ et $-\sigma(x, t)$.

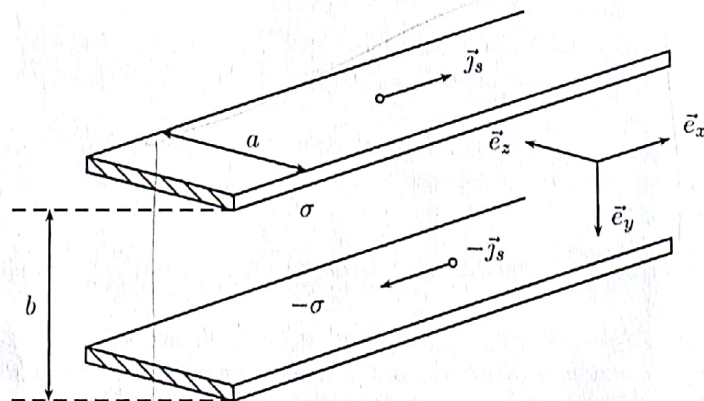


FIGURE 5 - Ligne infinie formée de deux rubans conducteurs

On étudie les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniquement dans l'espace situé entre les rubans et on suppose que ces champs ne dépendent que de l'abscisse x du point considéré et de l'instant t . On néglige donc tout effet de bord.

- Exprimer, en fonction des constantes électromagnétiques du vide ϵ_0 et μ_0 et des densités j_s et σ les champs $\vec{E}(x, t)$ et $\vec{B}(x, t)$ dans l'espace vide entre les rubans.

On considère, dans toute la suite de cette partie II, une onde de courant dans la ligne, d'intensité de la forme $i(x, t) = I \exp[j(\omega t - kx)]$ en notation complexe, où k est une constante positive et I une constante réelle. On peut remarquer que $i(x, t) = a j_s(x, t)$.

2. À partir des équations de Maxwell, exprimer deux relations liant $\sigma(x, t)$ et $i(x, t)$. En déduire la vitesse de phase v_φ de l'onde et montrer que la structure du champ électromagnétique est celle d'une onde plane progressive dans le vide illimité.
3. Déterminer la contribution $d\epsilon_B$ du champ magnétique $\vec{B}$ à l'énergie électromagnétique d'une tranche d'épaisseur dx de la ligne. En déduire le coefficient d'inductance propre linéique L de la ligne défini par $d\epsilon_B = \frac{1}{2} L dx i^2$.
4. Déterminer la contribution $d\epsilon_E$ du champ électrique $\vec{E}$ à l'énergie électromagnétique de la même tranche d'épaisseur dx . En déduire la capacité linéique C de la ligne définie par $d\epsilon_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C dx}$ où q est la charge portée par l'armature supérieure de la tranche étudiée.
5. Déduire des résultats précédents l'accord entre les questions I.2 et II.2 du problème quant à la vitesse de phase v_φ .

On désire fermer la ligne sur son impédance caractéristique Z_c en introduisant, entre les rubans, à l'abscisse $x = 0$, une plaque conductrice de résistivité (inverse de la conductivité) ρ , d'épaisseur e , de largeur a et de longueur b (cf. fig. 6).

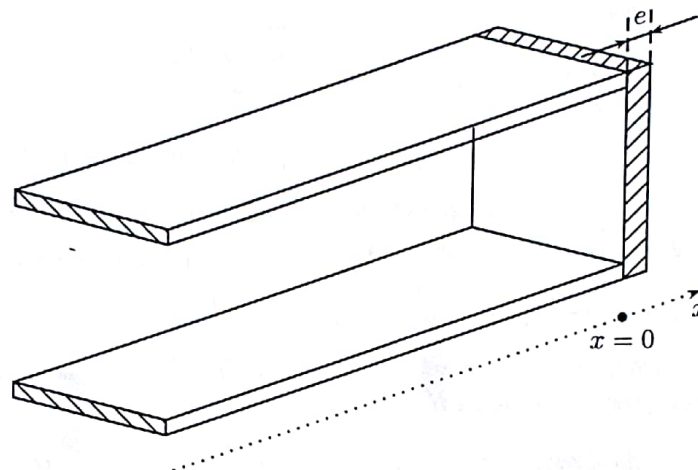


FIGURE 6 – Ligne formée de deux rubans conducteurs fermée sur son impédance caractéristique

6. On considérera dans cette question que l'épaisseur e est suffisamment faible pour que l'on puisse admettre que le courant traversant la plaque est réparti de manière uniforme.
 - (a) Donner la relation liant Z_c , ρ , e , a et b . Montrer que, si cette relation est vérifiée, la résistance R_c d'un carré de la plaque, de côté quelconque, s'exprime en fonction des seules constantes ϵ_0 et μ_0 . On appellera *impédance adaptée au vide* cette grandeur R_c dont on donnera la valeur numérique.
 - (b) On veut réaliser cette plaque avec :
 - du cuivre de résistivité $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$;
 - du carbone de résistivité $\rho = 3,5 \times 10^{-3} \Omega \cdot m$.
 Quelle devrait être, dans chaque cas, l'épaisseur e de la plaque ? Commenter.
7. Déterminer le vecteur de Poynting associé à l'onde électromagnétique entre les rubans. Quelle est la puissance moyenne transportée par l'onde ? Que se passe-t-il quand l'onde arrive en $x = 0$, la ligne étant fermée par la plaque d'impédance Z_c ?

III Réflexion d'une onde plane sur une plaque conductrice

On considère à présent une onde électromagnétique plane dans le vide illimité, de pulsation ω qui a des caractéristiques identiques à celles étudiées dans la partie II. On écrira les champs de cette onde :

$$\vec{E}_i = E_0 \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_y \quad \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_z$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. À l'abscisse $x = 0$ (cf. fig. 7) on place une plaque conductrice plane infinie, orthogonale à $\vec{e}_x$, de constantes électromagnétiques égales à celles du vide ϵ_0 et μ_0 , d'épaisseur e et de résistivité ρ identiques à celles calculées dans la partie précédente : un carré de côté quelconque de la plaque a donc une résistance R_c « adaptée au vide ».

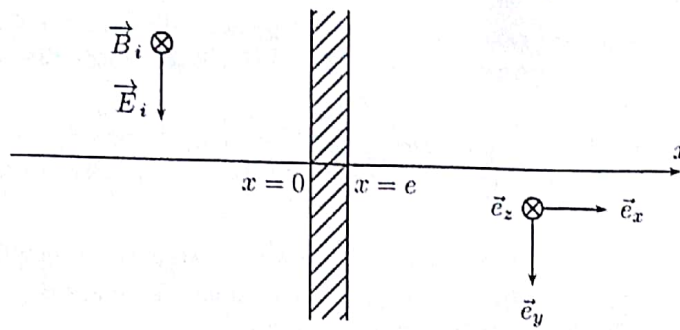


FIGURE 7 – Réflexion d'une onde métallique sur une plaque conductrice

1. Expliquer qualitativement pourquoi il existera pourtant une onde réfléchie sur la plaque. En vous inspirant des résultats des parties précédentes et en argumentant votre réponse, pouvez-vous indiquer sans calculs quel sera le module r du coefficient de réflexion de cette onde sur la plaque ?

On se propose de retrouver ce résultat directement à partir de l'étude des ondes dans le vide et la plaque. Pour ce faire, on rappelle que, moyennant l'approximation $\rho \varepsilon_0 \omega \ll 1$ supposée ici vérifiée, le champ électrique dans la plaque conductrice est de la forme :

$$\vec{E}_P = E_0 \{A_1 \exp[j(\omega t - kx)] + A_2 \exp[j(\omega t + kx)]\} \vec{e}_y$$

où A_1 et A_2 sont des constantes déterminées par les conditions aux limites de la plaque et k un nombre complexe vérifiant $k^2 = -j \frac{\mu_0 \omega}{\rho}$. Interpréter cette expression du champ en introduisant le réel $\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \omega}}$ appelé *profondeur de peau*. On prendra, pour la suite, $k = \frac{1-j}{\delta}$.

2. Expliquer les conséquences de l'approximation indiquée dans les équations de Maxwell et exprimer le champ magnétique $\vec{B}_P$ associé dans la plaque en fonction, en particulier, de E_0, k, A_1 et A_2 .

$(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ étant l'onde incidente (dans le vide) arrivant sur la plaque et $(\vec{E}_P, \vec{B}_P)$ l'onde se propageant dans la plaque, on désigne par $(\vec{E}_r, \vec{B}_r)$ l'onde réfléchie sur la plaque et $(\vec{E}_t, \vec{B}_t)$ l'onde transmise dans l'espace $x > e$.

On écrit $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_t$ sous la forme :

$$\vec{E}_r = \alpha E_0 \exp\left[j\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right] \vec{e}_y \quad \vec{E}_t = \tau E_0 \exp\left[j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \vec{e}_y$$

3. Dans le cadre du modèle de conducteur réel utilisé ici, il n'y a ni charges ni courants superficiels ; les champs électrique et magnétique sont continus en tout point de l'espace. Écrire quatre relations liant α, τ, A_1 et A_2 .
4. Montrer que l'approximation précédente implique également qu'on ait $e \ll \delta$. En déduire, après simplifications des relations, la valeur de α (au cours des calculs intermédiaires, on conservera les termes d'ordre 1 en e).
5. Que faudrait-il placer, et à quel endroit, pour annuler l'onde réfléchie ? On pourra d'abord répondre qualitativement en s'appuyant sur des résultats précédents et démontrer ensuite le résultat recherché.

Formulaire et données numériques :

Relations de passage

Résistance d'un barreau de section droite S , de longueur ℓ , de résistivité ρ

Formule d'analyse vectorielle

Célérité de la lumière dans le vide

Perméabilité magnétique du vide

$$\vec{B}_{\text{②}} - \vec{B}_{\text{①}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{E}_{\text{②}} - \vec{E}_{\text{①}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{u}) = \text{grad}(\text{div } \vec{u}) - \Delta \vec{u}$$

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

Guide d'onde cylindrique

Un guide d'onde est constitué d'un tube cylindrique conducteur parfait, de section circulaire de rayon R , d'axe de symétrie de révolution Oz , de longueur infinie. L'intérieur du tube est vide (ni charges, ni courants).

On veut étudier la propagation, à l'intérieur de ce tube, d'une onde électromagnétique harmonique de pulsation ω dont les champs sont à symétrie de révolution autour de Oz . On note $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(kz - \omega t)$ et $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp i(kz - \omega t)$ les champs complexes associés au champ électrique $\vec{E}$ et au champ magnétique $\vec{B}$. On rappelle que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont donnés par les parties réelles des champs complexes.

Compte tenu de la symétrie du problème, on se place en coordonnées cylindriques de vecteurs unitaires $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$ et on suppose que les composantes (E_r, E_θ, E_z) de $\vec{E}_0$ et (B_r, B_θ, B_z) de $\vec{B}_0$ ne dépendent que de r , distance entre le point étudié et l'axe Oz . Un formulaire en coordonnées cylindriques est fourni en fin d'énoncé.

On note $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ la constante de l'espace-temps. k et ω sont des réels positifs et on se place dans tout le problème dans le cas où $\omega^2/c^2 - k^2 > 0$. On pose $K^2 = \omega^2/c^2 - k^2$.

1. Établir les relations qui existent respectivement entre

$$B_r \text{ et } \frac{dB_z}{dr} \quad E_\theta \text{ et } \frac{dB_z}{dr} \quad E_r \text{ et } \frac{dE_z}{dr} \quad B_\theta \text{ et } \frac{dE_z}{dr}$$

On donnera les expressions sous la forme

$$B_r = \dots \quad E_\theta = \dots \quad E_r = \dots \quad B_\theta = \dots$$

et on en simplifiera l'écriture en utilisant la variable K^2 .

2. En déduire qu'une onde progressive transverse électrique et magnétique (TEM ; $E_z = B_z = 0$) ne peut, dans ces conditions, se propager dans le guide étudié.
3. Montrer que les composantes E_z et B_z vérifient l'une et l'autre une même équation différentielle du second ordre que l'on précisera.

4. On rappelle que la présence d'une paroi parfaitement conductrice ne se traduit que par les contraintes : B_{normal} et $\vec{E}_{\text{tangential}}$ doivent, dans le vide, tendre vers 0 lorsqu'on se rapproche de la paroi. En déduire E_z et $\frac{dB_z}{dr}$ en $r = R$. Y a-t-il une contrainte sur la valeur de B_z ?

5. On se limite aux ondes transverses magnétiques (TM) pour lesquelles $B_z = 0$. Quelle forme prend l'équation différentielle vérifiée par $E_z(r)$ en prenant comme variable $x = Kr$?

Cette équation différentielle admet comme solution générale définie en 0, $E_z = aJ_0(x)$ où J_0 est une fonction de Bessel de première espèce et a une constante.

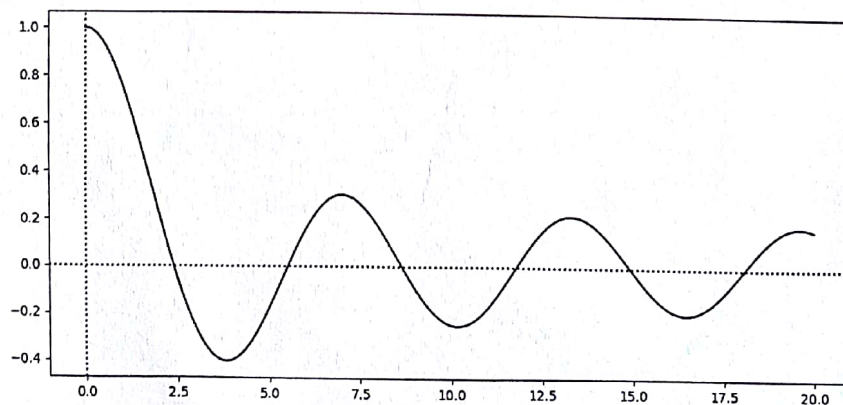
Pour $x \gg 1$, $J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\pi}{4})$. Voir le graphe de J_0 sur la figure ci-dessous.

Exprimer les composantes des champs électrique et magnétique des ondes TM étudiées en fonction de $k, \omega, c, a, K, J_0(x)$ et $\frac{dJ_0}{dx}$.

6. On suppose R et ω fixés. En utilisant les résultats de la question 4, déterminer les valeurs possibles de K . En déduire les valeurs possibles de k (on suppose que $k > 0$).

7. Déterminer k_1 , la valeur maximale de k en fonction de R, ω et c . En déduire la vitesse de phase $v_{\phi 1}$ et la vitesse de groupe v_{g1} de l'onde guidée ainsi que la longueur d'onde λ_1 .

Application numérique : $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$; $\omega = 6 \times 10^{10} \text{ rad s}^{-1}$; $R = 2 \text{ cm}$. Calculer $v_{\phi 1}$, v_{g1} et λ_1 .



$$\text{div } \vec{A}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{A}(r, \theta, z) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Guide d'onde cylindrique

1. Dériver par rapport à z revient à multiplier par ik . Dériver par rapport à t revient à multiplier par $-i\omega$. On en déduit alors (après simplification par le facteur exponentiel) :

(M.-Ampère) projetée sur $\vec{e}_\theta$ devient $ikB_r - \frac{dB_z}{dr} + \varepsilon_0\mu_0 i\omega E_\theta = 0$. (M.-Faraday) projetée sur $\vec{e}_r$ devient

$-ikE_\theta - i\omega B_r = 0$. Ces deux équations conduisent à $B_r = \frac{ik}{K^2} \frac{dB_z}{dr}$ et à $E_\theta = -\frac{i\omega}{K^2} \frac{dB_z}{dr}$. De même, en

utilisant (M.-A.) projetée sur $\vec{e}_r$ et (M.-F.) projetée sur $\vec{e}_\theta$ on obtient $B_\theta = \frac{i\omega}{K^2 c^2} \frac{dE_z}{dr}$ et $E_r = \frac{ik}{K^2} \frac{dE_z}{dr}$.

2. Pour une onde TEM, E_z et B_z devraient être nuls. Mais alors, d'après les équations de la question 1, toutes les composantes seraient nulles. L'onde nulle n'a que peu d'intérêt physique !

3. (M.-A.) projetée sur $\vec{e}_z$ conduit (si ω est non nul), en utilisant les expressions obtenues en 1, à l'équation

$\frac{1}{K^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_z}{dr} \right) + E_z = 0$. De même, (M.-F.) projetée sur $\vec{e}_z$ mène à $\frac{1}{K^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_z}{dr} \right) + B_z = 0$ c'est à

dire que E_z et B_z vérifient exactement la même équation du second ordre.

Remarque : les équations $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ qui sont les seules non encore utilisées sont alors vérifiées.

4. Les conditions de passage indiquent qu'au voisinage de la paroi E_z , E_θ et B_r tendent vers 0. Cela impose

donc, d'après les résultats de la question 1, que, en $r = R$, E_z et $\frac{dB_z}{dr}$ soient nuls (puisque ω est non nul).

Par contre, il n'y a pas de contrainte sur B_z .

5. Le changement de variable proposé par l'énoncé mène à $\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dE_z}{dx} \right) + E_z = 0$ qui peut s'écrire aussi

$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dE_z}{dx} + E_z = 0$ (équation de Bessel). Alors, $E_z = a_0 J_0(Kr)$. D'après les relations de la question 1

$E_r = \frac{ik}{K^2} \frac{dE_z}{dr} = a_0 \frac{ik}{K} \frac{dJ_0}{dx}(Kr)$ et $B_\theta = a_0 \frac{i\omega}{Kc^2} \frac{dJ_0}{dx}(Kr)$. Les autres composantes des champs sont nulles.

6. Les conditions mises en évidence à la question 4 imposent alors seulement que E_z soit nul en $r = R$ donc que $J_0(KR) = 0$. L'étude de la fonction de Bessel J_0 montre que cela correspond à des valeurs discrètes de K : $K_1, K_2, K_3, \dots$ telles que $K_1 R \approx 2,4$, $K_2 R \approx 5,5$, $K_3 R \approx 8,8$ (et plus généralement $K_j R \approx \pi(j - 1/4)$ pour j entier assez grand) qui sont donc fixées uniquement par la géométrie du guide. À ω et R fixés ces valeurs sont en nombre fini car il faut de plus que K soit inférieur à ω/c pour que k soit réel. Il y a donc un nombre fini (éventuellement nul si $K_1 > \omega/c$) de modes de propagation pour chaque fréquence. À chacun de ces modes (indice j) correspond une valeur k_j de k telle que $k_j^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - K_j^2$.

7. La plus grande valeur de k correspond à la plus petite de K ($j = 1$) : $k_1 \approx \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2,4}{R}\right)^2} = 160 \text{ m}^{-1}$.

$$v_{\varphi 1} = \frac{\omega}{k_1} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - (2,4c/R)^2}} \quad v_{g1} = \frac{d\omega}{dk_1} = \frac{c^2}{v_{\varphi 1}} = c \frac{\sqrt{\omega^2 - (2,4c/R)^2}}{\omega}$$

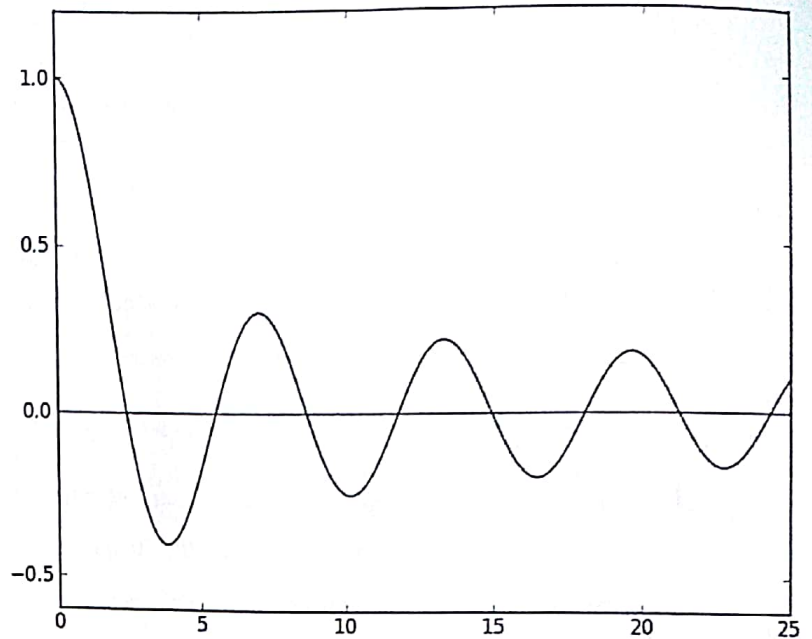
AN. $\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 3,9 \text{ cm}$; $v_{\varphi 1} = 3,75 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_{g1} = 2,4 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_{g1} < c$ comme nécessaire.

Tracé du graphe de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 (J_0)
et calcul de ses premiers zéros

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import j0,jn_zeros
```

```
x = np.linspace(0,25,501)
y = j0(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
print(jn_zeros(0,5))
```

```
2.4048255577
5.52007811029
8.65372791291
11.791534439
14.9309177085
```



Ligne bifilaire

Partie I – Onde de courant dans une ligne électrique

- I.1. Aux bornes de la bobine $u(x, t) - u(x + dx, t) = L dx \frac{\partial i}{\partial t}$ donc $\boxed{-\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}}$ (équation 1)

Pour le condensateur, l'intensité qui arrive sur sa borne supérieure est $i(x, t) - i(x + dx, t) = -\frac{\partial i}{\partial x} dx$ et est égal à la dérivée temporelle de $C dx u(x + dx)$ qu'on peut ici (ordre 1 en dx) assimiler à $C dx u(x)$ donc

$$\boxed{-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t}} \quad (\text{équation 2})$$

- I.2. En éliminant u , on obtient $LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0$ donc $\frac{d^2 I}{dx^2} + \omega^2 LC I = 0$ dont la solution générale est, en posant $k = \omega \sqrt{LC}$, $I(x) = A e^{-jkx} + B e^{jkx}$. Alors $i(x, t) = A e^{j(\omega t - kx)} + B e^{j(\omega t + kx)}$. Il s'agit d'une superposition d'ondes progressives de vitesse de phase $v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. L'équation 2 s'écrit $-\frac{dI}{dx} = jC\omega U$

$$\text{donc } U(x) = \frac{k}{C\omega} (A e^{-jkx} - B e^{jkx}) \text{ et } u(x, t) = \sqrt{\frac{L}{C}} (A e^{j(\omega t - kx)} - B e^{j(\omega t + kx)}).$$

- I.3. Le rapport u/i est indépendant de x si A ou B est nul et ce rapport vaut alors $\pm \sqrt{\frac{L}{C}}$. Or ce rapport vaut

$$Z_0 \text{ (loi d'Ohm en } x = 0 \text{)}. \text{ Donc il faut que } \boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_c} \text{ (et alors } B = 0 \text{ : il n'y a pas d'onde réfléchie).}$$

En revenant aux réels, $i = |A| \cos(\omega t - kx + \varphi)$.

La puissance est $P = ui = Z_c i^2 = Z_c |A|^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi)$ dont la valeur moyenne est $\boxed{Z_c \frac{|A|^2}{2}}$. En $x = 0$ cette puissance est absorbée par l'impédance (résistance) Z_0 .

- I.4.a. Le générateur est dans la partie $x < 0$ et il n'y a pas, dans la partie $x > 0$, d'obstacle pouvant créer une onde réfléchie. Il ne peut donc pas s'y propager d'onde dans le sens x décroissant. Il n'y a donc dans cette zone qu'une onde progressive vers la droite (donc pour laquelle $B = 0$).

- b. u/i vaut donc Z_c pour $x > 0$ et la partie droite de la ligne se comporte comme une impédance Z_c . De la partie $x < 0$ de la ligne, on voit donc 2 impédances Z_c en parallèle donc une impédance globale $\boxed{Z_1 = \frac{Z_c}{2}}$.

- c. En $x = 0^-$ (où se superposent les ondes incidente et réfléchie d'amplitudes I_1 et I_2), le rapport u/i vaut alors $\frac{Z_c}{2}$ donc $\frac{Z_c}{2} = Z_c \frac{A+B}{A-B}$. On obtient alors le coefficient de réflexion (en courant) $\boxed{r_i = \frac{B}{A} = \frac{1}{3}}$.

- I.5.a. Si on place un court-circuit en $x = \ell$, il y a cette fois-ci une onde réfléchie dans la zone $x > 0$ mais il faut qu'en $x = \ell$ la tension soit nulle à tout instant. On a donc une onde stationnaire avec un nœud de tension en ce point d'où la forme nécessaire $u = C^{te} \sin k(x - \ell) e^{j\omega t}$. En utilisant l'équation 1, on a finalement :

$$\boxed{i = \frac{kC^{te}}{L\omega} j \cos k(x - \ell) e^{j\omega t}}$$

- b. Le courant est alors nul en $x = 0$ si $\cos(k\ell) = 0$. La plus petite valeur de ℓ vérifiant cette condition est

$$\boxed{\ell_0 = \frac{\lambda}{4}}. \text{ La partie } x > 0 \text{ de la ligne se comporte donc comme une impédance } \frac{u(x = 0^+)}{i(x = 0^+)} = \infty \text{ et, donc,}$$

tout se passe comme si il n'y avait pas cette partie de ligne. On se retrouve donc dans le cas du I.3. Il n'y a pas d'onde réfléchie dans la partie négative de la ligne.

Partie II – Champ électromagnétique dans la ligne

- II.1. Les champs ne dépendant pas de y , ils sont donnés par leurs valeurs à la limite des conducteurs. Celles-ci sont données en fonction de σ et j_s grâce aux relations de passage.

$$\vec{E}(x, t) = \frac{\sigma(x, t)}{\epsilon_0} \vec{e}_y$$

et

$$\vec{B}(x, t) = \mu_0 j_s(x, t) \vec{e}_z$$

- II.2. Les équations de Maxwell en « divergence » sont vérifiées car les composantes selon x des champs sont nulles. $\vec{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ s'écrit $\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \mu_0 \frac{\partial j_s}{\partial t} = 0$ et $\vec{\text{rot}} \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ devient $\frac{\partial j_s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$

(cette dernière équation est la version surfacique de l'équation de conservation de la charge). Par élimination

de j_s , on obtient $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0$. On obtient donc des ondes de vitesse de phase $v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$.

Pour une onde progressive, les équations vérifiées par σ et j_s montrent que $j_s = c\sigma$ et on a alors

$$\vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{e}_x$$

c'est à dire la structure d'une onde plane dans le vide illimité. (C'était évident depuis le départ puisque l'onde est plane entre les conducteurs et que sa structure est une conséquence d'équations locales donc indépendantes de la présence des conducteurs. Par contre, ce qui n'était pas évident, était le fait que le caractère plan de l'onde était compatible avec la présence des conducteurs).

- II.3. $d\epsilon_B = \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \mu_0 \frac{j_s^2}{2} ab dx$. L'intensité véhiculée par chaque conducteur est $i = j_s a$. Par identification

avec une énergie $\frac{1}{2} L dx i^2$, on obtient $L = \mu_0 \frac{b}{a}$.

- II.4. $d\epsilon_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} d\tau = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} ab dx$. La charge portée par un conducteur est $q = \sigma a dx$. Par identification avec une

énergie $\frac{q^2}{2C dx}$, on obtient $C = \epsilon_0 \frac{a}{b}$.

- II.5. La vitesse de phase trouvée au I est alors $v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$ (vitesse de la lumière dans le vide).

- II.6. $Z_c = \rho \frac{\text{longueur}}{\text{section}} = \rho \frac{b}{ae}$. Or, pour la ligne $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{b}{a}$ donc $\frac{\rho}{e} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$. ρ / e est justement la résistance R_c d'un carré. $R_c = \mu_0 c = 377 \Omega$. Pour le cuivre, il faudrait utiliser une épaisseur de $4,5 \times 10^{-11} \text{ m}$ ce qui est bien entendu impossible et pour le carbone il faudrait une épaisseur de $9,3 \times 10^{-6} \text{ m}$ ce qui reste bien délicat.

- II.7. $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\sigma j_s}{\epsilon_0} \vec{e}_x = \frac{j_s^2}{c \epsilon_0} \vec{e}_x = \frac{i^2}{a^2 c \epsilon_0} \vec{e}_x$ La puissance transportée est le flux du vecteur de Poynting :

$$P = \frac{i^2}{a^2 c \epsilon_0} ab = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{b}{a} i^2 = Z_c i^2 \text{ dont la valeur moyenne est } \frac{1}{2} Z_c I^2.$$

Si la ligne est fermée par la plaque d'impédance Z_c , on se retrouve dans la situation du I.3. L'onde est absorbée par le conducteur.

Partie III – Réflexion d'une onde électromagnétique sur une plaque conductrice

III.1. Les charges mises en mouvement par l'onde incidente rayonnent et créent une onde réfléchie. Le module du coefficient de réflexion sera de 1/3 (voir la question I.4. avec ici le « vide » qui joue le rôle de la ligne se poursuivant au-delà du conducteur). Pour une onde progressant vers la droite $k = \frac{1-j}{\delta}$ et la forme du champ électrique est $\vec{E} = A E_0 e^{-x/\delta} \cos(x/\delta - \omega t) \vec{u}_y$ qui correspond à une onde progressive atténuée.

III.2. L'approximation indiquée correspond à des fréquences assez faibles pour que dans l'équation de Maxwell-Ampère le courant de conduction ($\vec{E}/\rho$) soit grand devant $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (courant « de déplacement »). Pour une onde progressive, l'équation de Maxwell-Faraday devient alors $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$. Pour l'onde progressant vers la droite, $\vec{k} = \frac{1-j}{\delta} \vec{e}_x$ et $\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{E}$. Finalement $\vec{B}_P = \frac{k E_0}{\omega} (A_1 e^{j(\omega t - kx)} - A_2 e^{j(\omega t + kx)}) \vec{e}_z$

III.3. Le conducteur n'étant pas parfait, on décrit les charges et les courants uniquement par des distributions volumiques. Les champs sont alors continus.

La continuité de $\vec{E}$ en $x=0$ s'écrit $1 + \alpha = A_1 + A_2$. Celle de $\vec{B}$ s'y écrit $\frac{1-\alpha}{c} = \frac{k}{\omega} (A_1 - A_2)$. Les mêmes conditions en $x=e$ conduisent à :

$$A_1 e^{-jke} + A_2 e^{+jke} = \tau e^{-j\omega e/c} \quad \text{et} \quad \frac{k}{\omega} (A_1 e^{-jke} - A_2 e^{+jke}) = \frac{\tau e^{-j\omega e/c}}{c}$$

III.4. $e = \rho \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ donc $\frac{e}{\delta} = \rho \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\rho}} = \sqrt{\frac{\omega \epsilon_0 \rho}{2}}$ est petit devant 1 puisque $\omega \epsilon_0 \rho$ l'est. En remplaçant $e^{\pm jke}$ par $1 \pm jke$, les deux dernières équations du III.3. s'écrivent $A_1 + A_2 + (A_2 - A_1) jke = \tau e^{-j\omega e/c}$ et $\frac{k}{\omega} (A_1 - A_2 - (A_1 + A_2) jke) = \frac{\tau e^{-j\omega e/c}}{c}$. On fait le quotient membre à membre de ces deux équations, on

remplace grâce aux deux premières équations du III.3. $A_1 + A_2$ par $1 + \alpha$ et $k(A_1 - A_2)$ par $\frac{\omega}{c}(1 - \alpha)$ et

on obtient $\frac{1 + \alpha + j \frac{e\omega}{c} (\alpha - 1)}{1 - \alpha - 2(1 + \alpha) \frac{ec}{\omega \delta^2}} = 1$ en utilisant $jk^2 = \frac{2}{\delta^2}$. Or $\frac{ec}{\omega \delta^2} = \rho \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{c}{\omega} \frac{\mu_0 \omega}{2\rho} = \frac{1}{2}$! Donc

$\frac{1 + \alpha + j \frac{e\omega}{c} (\alpha - 1)}{-2\alpha} = 1$ et, en négligeant le terme en $e\omega/c$, $1 = \frac{1 + \alpha}{-2\alpha}$ d'où $\alpha = -\frac{1}{3}$. Le signe -

correspond à ce qu'on a ici le coefficient de réflexion pour $\vec{E}$ qui correspond donc à un coefficient de réflexion en tension.

III.5. Selon le I.5., il suffit de mettre en $x = e + \lambda/4$ un conducteur parfait (« court-circuit » : un bon conducteur, assez épais devrait suffire) pour annuler l'onde réfléchie. Il y a en effet, dans ce cas, une onde stationnaire avec annulation de $\vec{E}$ en $x = e + \lambda/4$ et de $\vec{B}$ en $x = e$. Le quotient membre à membre de la question précédente fait maintenant $\frac{1}{0} = \infty$ à la place de 1 donc $\alpha = 0$.