# Démonstration de la relation de Heisenberg

## I. Transformation de Fourier ; définition et propriétés utiles

**1.Définition, inversion :** $\mathcal{F}(\psi)=\widehat{\psi}(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x$ et $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\psi})=\psi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\psi}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k$

**Relation de Parseval-Plancherel :** La transformée de Fourier est une isométrie de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions de carré sommable) : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\,\widehat{\psi}\,|^2\mathrm{d}k=\int_{-\infty}^{+\infty}|\,\psi\,|^2\mathrm{d}x$.

Cela signifie que si $\psi$ est normée ($\|\psi\|_2=1$), ce qu'on supposera pour la suite, $\hat{\psi}$ l'est aussi.

Plus généralement, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\widehat{\psi_1}}\;\widehat{\psi_2}\;\mathrm{d}k=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi_1}\;\psi_2\;\mathrm{d}x$ si $\psi_1$ et $\psi_2$ ont pour transformées de Fourier $\widehat{\psi_1}$ et $\widehat{\psi_2}$.

**Dérivation :** $\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}ik\widehat{\psi}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k$ donc $\mathcal{F}\left(\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)=ik\hat{\psi}$

**Translations :** $\mathcal{F}\left(\psi_{(x-x_0)}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-x_0)e^{-ikx}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikx_0}\psi(X)e^{-ikX}\mathrm{d}X=e^{-ikx_0}\widehat{\psi}(k)$.

De même $\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\psi}_{(k-k_0)}\right)=e^{ik_0x}\psi(x)$.

On peut donc translater $\psi$ pour amener $\langle x\rangle$ à 0 sans changer $\Delta x$ en multipliant $\widehat{\psi}$ par une exponentielle de norme 1 ce qui ne change ni $\langle k\rangle$ ni $\Delta k$. On peut de même translater $\widehat{\psi}$ pour amener $\langle k\rangle$ à 0 sans changer $\Delta k$, $\langle x\rangle$ ou $\Delta x$.
Pour la suite, on se placera dans le cas $\langle x\rangle=0$, $\langle k\rangle=0$. C'est-à-dire que $(\Delta x)^2=\langle x^2\rangle$ et $(\Delta k)^2=\langle k^2\rangle$.

## II Démonstration du lien entre les écarts-types : $\Delta x\,\Delta k\geq\dfrac{1}{2}$

On calcule $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x\psi(x)+\alpha\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|^2\mathrm{d}x$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|\psi|^2\,\mathrm{d}x+\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}x\left(\psi\frac{\mathrm{d}\overline{\psi}}{\mathrm{d}x}+\overline{\psi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\alpha^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|^2\mathrm{d}x=\langle x^2\rangle+\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|\psi|^2\,\mathrm{d}x+\alpha^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|^2\mathrm{d}x$$

Le dernier terme vaut $\alpha^2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}k^2|\hat{\psi}|^2\,\mathrm{d}k=\alpha^2\langle k^2\rangle=\alpha^2\Delta k^2$ d'après la relation de Parseval et la propriété de dérivation. Le second terme vaut $\alpha\Big[x|\psi|^2\Big]_{-\infty}^{+\infty}-\alpha\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2\,\mathrm{d}x$ (intégration par parties). Le terme intégré est nul si on suppose que $|\,\psi\,|^2$ tend vers 0 à l'infini plus vite que $1/x$ (n'oublions pas que $|\,\psi\,|^2$ est sommable) donc $I=\Delta x^2-\alpha+\alpha^2\Delta k^2$. Or, d'après sa définition, $I$ est positive. Le polynôme en $\alpha$ ne doit pas changer de signe donc son discriminant doit être négatif ou nul. $1-4\Delta x^2\Delta k^2\leq 0$ c'est-à-dire $\Delta x\Delta k\geq\dfrac{1}{2}$.

## III. Cas d'égalité. $\Delta x\Delta k=1/2$

Dans ce cas, il existe $\alpha$ tel que $I=0$ ($\alpha=\dfrac{1}{2\Delta k^2}=2\Delta x^2$). D'après la définition de $I$, cela impose que, pour tout $x$, $x\psi(x)+\alpha\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=0$. Cette équation différentielle admet $\psi=K\exp-\dfrac{x^2}{2\alpha}=K\exp-\dfrac{x^2}{4\Delta x^2}$ comme solution générale.
Ceci correspond au cas particulier $\langle x\rangle=0$ et $\langle k\rangle=0$. On se ramène au cas général $\langle x\rangle=x_0$, $\langle k\rangle=k_0$ en prenant $\psi=K\exp(ik_0x)\exp-\dfrac{(x-x_0)^2}{4\Delta x^2}$ (voir I) : il s'agit d'un profil gaussien $|\psi|^2=|K|^2\exp-\dfrac{(x-x_0)^2}{2\Delta x^2}$.

## IV Inégalité de Heisenberg physique

On associe à chaque valeur de $k$ la valeur de la quantité de mouvement $p=\hbar k$ et la relation devient $\Delta x\Delta p\geq\dfrac{\hbar}{2}$.