Quelques filtres d'ordre 1 ou 2

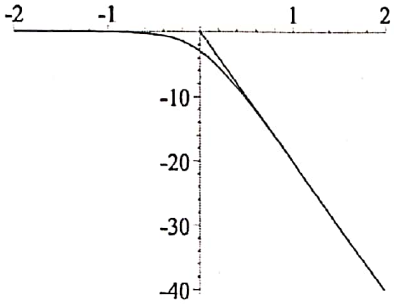
I. Filtres du premier ordre

1. Filtre passe–bas du premier ordre.

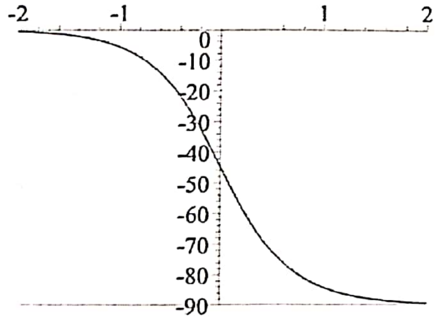
Une fonction de transfert du type $\dfrac{1}{a+bj\omega}$ peut se mettre (si *ab* est non nul) sous la forme $\dfrac{A}{1+jx}$ à condition de poser $A=\dfrac{1}{a}$ et de définir la « *pulsation réduite* » x par $x=\dfrac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0=\dfrac{a}{b}$ qui est (voir plus bas) la *pulsation de coupure.*

Au facteur A près, la fonction de transfert $\boxed{H_{\text{P Bas 1}}=\dfrac{1}{1+jx}}$ représente le comportement général d'un filtre passe-bas du premier ordre. Son diagramme du Bode est dessiné ci-dessous.

Gain (en dB) en fonction de $\log_{10}(x)$



φ (en °) en fonction de $\log_{10}(x)$

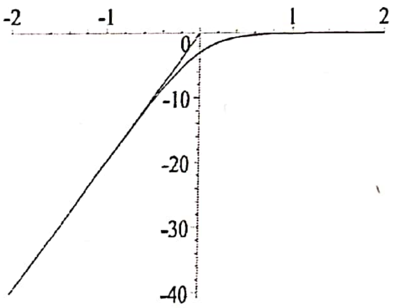


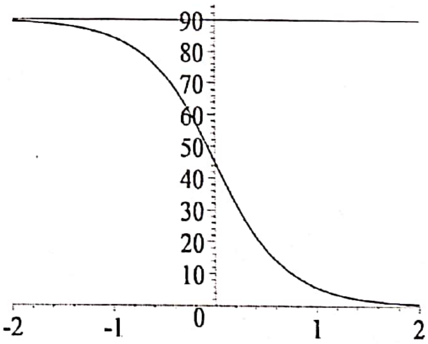
On peut remarquer que le gain ne s'écarte jamais de plus de 3dB de l'une des deux asymptotes. Le diagramme asymptotique dans lequel on ne trace que les asymptotes représente alors assez bien la courbe exacte.

$\boxed{\text{La } \textit{pulsation de coupure à } -3\text{dB est } \omega_0}$. La *bande passante à* -3dB est donc $[0,\omega_0]$.

2. Filtre passe–haut du premier ordre.

De même $\dfrac{cj\omega}{a+bj\omega}=\dfrac{c}{b}\,\dfrac{jx}{1+jx}$ avec $x=\dfrac{\omega}{\omega_0}$ (et $\omega_0=\dfrac{a}{b}$). La fonction de transfert $\boxed{H_{\text{P Haut 1}}=\dfrac{jx}{1+jx}}$ représente alors le comportement général d'un filtre passe-haut du premier ordre. Son diagramme du Bode, dessiné ci-dessous est obtenu très facilement à partir de celui du filtre passe-bas : pour le gain, symétrie par rapport à l'axe vertical $\log_{10} x = 0$ correspondant à la transformation $x \leftarrow 1/x$ et pour la phase, ajout de 90°.





II. Filtres du second ordre

1. Filtre passe–bande du second ordre.

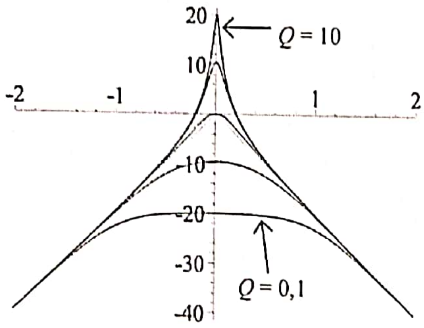
Toute fonction de transfert du type $\dfrac{aj\omega}{b+cj\omega+d(j\omega)^2}$ (*cd* non nul) peut être écrite sous la forme :

$$\boxed{\dfrac{A}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec } A=\frac{a}{c}\ ,\ \omega_0^2=\frac{b}{d} \ \text{ et } \ Q=\frac{d\omega_0}{c}=\frac{\sqrt{db}}{c}$$

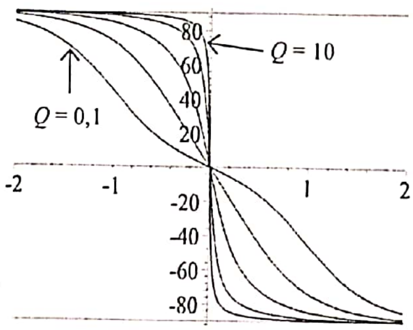
Ceci constitue la forme canonique de la fonction de transfert du « *filtre passe–bande du deuxième ordre de pulsation de résonance* ω_0, *de facteur de qualité* Q *et de gain maximal (en bande passante)* $|A|$ ».

Le diagramme de Bode associé à la fonction $\boxed{H_{\text{P Bande 2}} = \dfrac{Q}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}}$ est tracé ci-dessous pour les valeurs de Q égales à 0,1 0,33 1,0 3,3 et 10.

Gain (en dB) en fonction de $\log_{10}(x)$



φ (en °) en fonction de $\log_{10}(x)$



Pour des valeurs de Q non voisines de 1 le gain s'écarte notablement des asymptotes au voisinage de $x = 1$ c'est à dire pour des fréquences proches de la fréquence de résonance.

La courbe de gain est symétrique par rapport à l'axe $x = 1$ (à cause de l'échelle logarithmique en abscisse, cela vient du fait que le gain est inchangé si on transforme x en son inverse). Le maximum est atteint en $x = 1$ c'est-à-dire $\omega = \omega_0$. Les limites ω_1 et ω_2 de la bande passante correspondent au même gain donc à des valeurs inverses de x donc $\boxed{\omega_1\omega_2 = \omega_0^2}$.

Pour avoir un gain $G_{\max}/\sqrt{2}$ il faut que $Q\left|x-\dfrac{1}{x}\right| = 1$ c'est-à-dire $x-\dfrac{1}{x} = \pm\dfrac{1}{Q}$ soit $x^2 \pm \dfrac{1}{Q}x - 1 = 0$ équation dont les racines <u>positives</u> sont $\pm\dfrac{1}{2Q}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$. La différence vaut donc $x_2 - x_1 = \dfrac{1}{Q}$.

La largeur de la bande passante à –3dB du filtre passe–bande d'ordre 2 vérifie donc la relation $\boxed{Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}}$.

2. Filtres basse–bas et passe–haut d'ordre 2.

En divisant ou en multipliant la fonction de transfert d'un filtre passe–bande d'ordre 2 par $j\omega$, on obtient un filtre passe–bas ou passe–haut d'ordre 2.

Les fonctions de transfert peuvent être écrites (à un facteur multiplicatif près) sous différentes formes (voir ci-dessous).

Leurs diagrammes de Bode s'obtiennent de façon très simple à partir de celui du filtre passe–bande puisqu'il suffit :

- pour le gain en dB de retrancher (passe–bas) ou d'ajouter (passe–haut) 20 $\log_{10}(\omega)$ qui correspond à une fonction affine de pente 20 (abscisse en échelle logarithmique)
- pour la phase, de retrancher ou d'ajouter 90°.

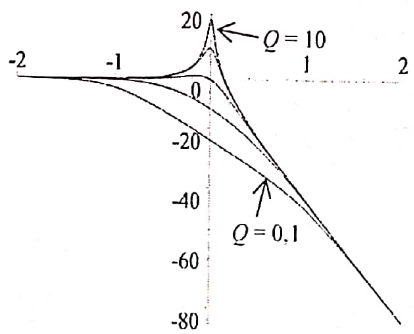
Filtre passe–bas d'ordre 2

$$H_{\text{P Bas 2}} = \frac{1}{jx}\frac{Q}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1+\dfrac{jx}{Q}+(jx)^2} = \frac{1}{1+\dfrac{j}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Filtre passe–haut d'ordre 2

$$H_{\text{P Haut 2}} = jx\frac{Q}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{jQ}\dfrac{\omega_0}{\omega}-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

Gain (en dB) en fonction de $\log_{10}(x)$



Gain (en dB) en fonction de $\log_{10}(x)$