FORMULAIRE D'ANALYSE VECTORIELLE

I. Coordonnées usuelles.

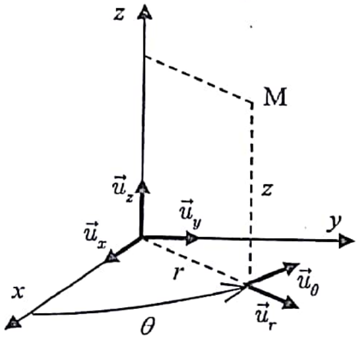
1. Coordonnées cartésiennes.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z = (x,y,z)$

Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z = (dx,dy,dz)$

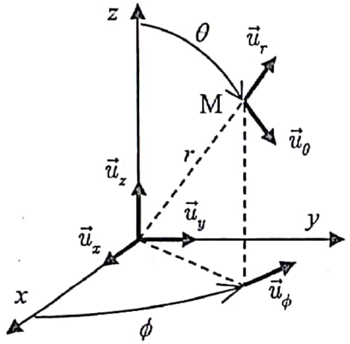
2. Coordonnées cylindriques et sphériques.

Coordonnées cylindriques r,θ,z



$r \in [0,+\infty[\quad \theta \in [0,2\pi[$.

Coordonnées sphériques r,θ,ϕ



$r \in [0,+\infty[\quad \theta \in [0,\pi[\quad \phi \in [0,2\pi[$

Vecteur position

Cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = (r,0,z)_{\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z}$

Sphériques : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = (r,0,0)_{\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\phi}$

Déplacement élémentaire

Cylindriques : $\overrightarrow{dM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z = (\,dr\,,\,rd\theta\,,\,dz\,)_{\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z}$

Sphériques : $\overrightarrow{dM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\phi\vec{u}_\phi = (\,dr\,,\,rd\theta\,,\,r\sin\theta d\phi\,)_{\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\phi}$

3. Surfaces élémentaires.

Sur un plan $\rightarrow$ cartésiennes : $dS = dx\,dy$ $\rightarrow$ polaires : $dS = r\,dr\,d\theta$

Sur un cylindre à base circulaire de rayon R $\rightarrow$ cylindriques : $dS = R\,d\theta\,dz$

Sur une sphère de rayon R $\rightarrow$ sphériques : $dS = R^2\sin\theta\;d\theta\,d\phi$

Sur un cône d'axe Oz de demi-angle Θ $\rightarrow$ sphériques : $dS = dr\,r\sin\Theta\,d\phi$

4. Volumes élémentaires.

Coordonnées cartésiennes : $d\tau = dx\,dy\,dz$

Coordonnées cylindriques : $d\tau = dr\,rd\theta\,dz$

Coordonnées sphériques : $d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

II. Formules à connaître. (f est un champ scalaire, $\vec{E}$ un champ vectoriel)

1. Opérateur gradient.

$df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \overrightarrow{dM}$. En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \vec{\nabla}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

2. Opérateur divergence.

En coordonnées cartésiennes : $\text{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

3. Opérateur rotationnel.

En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

4. Opérateur laplacien.

Scalaire : $\Delta f = (\vec{\nabla})^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Vectoriel : $\vec{\Delta}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix}$

5. Composition d'opérateurs.

$\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\right) = 0 \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right) = 0 \qquad \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right) = \Delta f$

6. Formules intégrales.

- Théorème de **Green-Ostrogradski** (ou de la divergence). Pour tout volume V entouré par une <u>surface fermée</u> S : $\iiint_V \text{div}\,\vec{E}\,dV = \oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}$
- Théorème de **Stokes**. Pour toute surface Σ s'appuyant sur un <u>contour fermé</u> Γ, le flux du rotationnel d'un champ vectoriel à travers Σ est égal à sa circulation sur Γ : $\iint_\Sigma \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\right)\cdot\overrightarrow{d\Sigma} = \oint_\Gamma \vec{E}\cdot\overrightarrow{dM}$
- Propriété de base du gradient : $\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}\,f\cdot\overrightarrow{dM} = f(B) - f(A)$

III. Formules à savoir utiliser.

(Normalement données en annexe des énoncés)

1. Coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial E_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_r}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\text{div}\, \vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

2. Coordonnées sphériques.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}(E_\phi \sin\theta) - \dfrac{\partial E_\theta}{\partial \phi}\right) \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial E_r}{\partial \phi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rE_\phi) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\text{div}\, \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

ou bien (autre écriture plus simple d'emploi, en particulier pour le premier terme)

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

3. Opérateurs appliqués à un produit.

$\overrightarrow{\text{grad}}\, fg = f\, \overrightarrow{\text{grad}}\, g + g\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ $\qquad$ $\text{div}\, f\vec{E} = f\, \text{div}\, \vec{E} + \vec{E}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\, f$

$\text{div}\, \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{B}\cdot\left(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}\right) - \vec{A}\cdot\left(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B}\right)$ $\qquad$ $\overrightarrow{\text{rot}}\left(f\vec{E}\right) = f\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) \wedge \vec{E}$

4. Composition d'opérateurs.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\, \vec{E}\right) - \vec{\Delta}\, \vec{E}$$

IV Pour le fun.

(f est un champ scalaire, $\vec{A}$ un champ vectoriel)

1. Laplacien vectoriel en coordonnées cylindriques.

$$\vec{\Delta}\, \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - \dfrac{A_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta A_\theta - \dfrac{A_\theta}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

2. Laplacien vectoriel en coordonnées sphériques.

$$\vec{\Delta}\, \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - 2\dfrac{A_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) - \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta A_\theta - \dfrac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} - \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta A_\phi - \dfrac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial \phi} + \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

3. Formules intégrales complémentaires.

Pour tout volume V entouré par une surface fermée S

- Théorème du gradient : $\iiint_V \overrightarrow{\text{grad}}\, f\, \text{dV} = \oiint_S f\, \overrightarrow{\text{dS}}$
- Théorème du rotationnel : $\iiint_V \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}\, \text{dV} = \oiint_S \overrightarrow{\text{dS}} \wedge \vec{A}$

Remarque : ce sont des conséquences directes du théorème de Green-Ostrogradski. On peut les démontrer en remplaçant dans le théorème d'Ostrogradski $\vec{E}$ par $f\vec{u}$ ou par $\vec{A} \wedge \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un champ vectoriel uniforme.