

Induction (MPSI)

I. La notion de force électromotrice

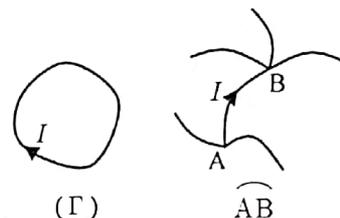
1. Définition

Lorsqu'un courant circule dans un circuit, on peut constater les manifestations de l'effet Joule : de l'énergie semble apparaître – sous forme d'énergie interne (la température du conducteur augmente) ou fournie à l'extérieur (par transfert thermique). Selon le principe de conservation de l'énergie, cela signifie qu'il doit exister un mécanisme physique responsable de cette « production » d'énergie. Il en existe en réalité de très nombreux. On peut citer les *phénomènes électrochimiques* (redox) mis en œuvre dans les piles et accumulateurs, l'*effet thermoélectrique*, les *convertisseurs électroniques d'énergie* mis en œuvre dans les sources de tension ou de courant et les générateurs de signaux utilisés en travaux pratiques. Le mécanisme étudié dans ce résumé est l'*induction*, due à la présence d'un champ magnétique.

Dans la suite, le terme *circuit* signifiera soit « circuit fermé filiforme » – ci-

contre (Γ) – soit « portion filiforme d'un circuit complexe » – ci-contre \widehat{AB} .

On définit alors la *force électromotrice* du circuit étudié comme étant l'énergie que peuvent fournir les mécanismes envisagés ci-dessus par unité de charge parcourant le circuit.



2. Orientation

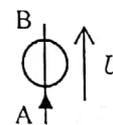
La force électromotrice notée e est une grandeur algébrique associée à la convention d'orientation de l'intensité parcourant le circuit. On commencera donc par définir le sens conventionnel du courant dans le circuit et la force électromotrice sera alors l'énergie fournie par les mécanismes par unité de charge parcourant le circuit dans le sens direct. Ces conventions sont associées à la présence de flèches sur le schéma du circuit (voir le dessin en bas de page). Une force électromotrice pourra être négative si le mécanisme sous-jacent absorbe en réalité de l'énergie (c'est le cas par exemple si une cuve à électrolyse est placée dans le circuit). Si plusieurs mécanismes physiques sont envisagés, la force électromotrice sera la somme des contributions de chaque mécanisme.

3. Dimension, unité

Contrairement à ce que le mot « force » peut laisser supposer, la dimension de la force électromotrice n'est pas celle d'une force (au sens de la mécanique) mais celle d'une énergie par unité de charge c'est-à-dire d'un potentiel électrostatique (unité SI : le Volt).

4. Interprétation dans le cas d'une source de tension idéale

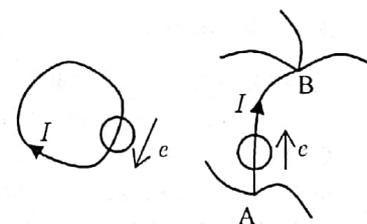
Une source de tension idéale assure une différence de potentiel constante $U = V_B - V_A$ entre ses bornes. Cela signifie que si une charge q traverse cette source de tension dans le sens direct (de A vers B), son énergie électrostatique qV augmente de $q(V_B - V_A) = qU$. L'énergie fournie par unité de charge est donc U . La source de tension idéale est donc caractérisée par une force électromotrice $e = U$.



La force électromotrice d'une source de tension idéale est la différence de potentiel entre ses bornes.

5. Schéma général

Pour un mécanisme quelconque, associé à une force électromotrice e , l'effet énergétique est le même que celui d'une source de tension idéale de même force électromotrice. On considérera alors qu'il suffit pour étudier le circuit de le modéliser en y plaçant une source de tension idéale dont la force électromotrice est donnée par les lois régissant le phénomène physique responsable de la force électromotrice (par exemple loi de Faraday pour l'induction – voir plus loin). On raisonnera donc sur un schéma tel que les 2 dessinés ci-contre.



II. Loi d'Ohm généralisée, loi de Pouillet

1. Branche d'un circuit : loi d'Ohm généralisée

Toute portion filiforme de circuit est alors représentable suivant le schéma ci-contre avec $U_2 = RI$ (loi d'Ohm pour une simple portion résistive de circuit) et une source de tension idéale

(e). On en déduit que $V_A - V_B = RI - e$. Ceci constitue la *loi d'Ohm généralisée*.

N.B. Cette expression algébrique est valide quelles que soient les signes des variables du moment que les conventions d'orientation cohérentes sont respectées : I et e sont orientées dans le même sens et on calcule la différence de potentiel $V_A - V_B$ en « descendant le courant ».



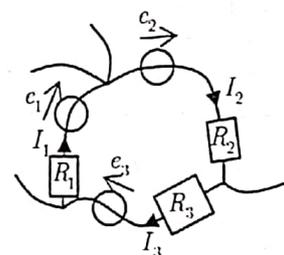
2. Circuit fermé : loi de Pouillet

Dans le cas d'un circuit fermé (qu'on peut considérer comme la limite d'un circuit ouvert lorsque B rejoint A), cette loi devient la *loi de Pouillet* $c = RI$.



3. Maille dans un circuit complexe

Dans le cas d'un ensemble de branches formant un contour fermé (une *maille*) on peut en déduire que $0 = \sum (R_k I_k - e_k)$ c'est-à-dire $c = \sum R_k I_k$ si on note $e = \sum e_k$: force électromotrice globale du circuit fermé étudié. Bien entendu, toutes les intensités sont ici orientées de façon cohérente avec l'orientation globale du circuit (sinon il suffit de changer le signe des intensités « mal orientées »).



III. Loïs de l'induction

Le phénomène d'induction intervient lorsqu'une des causes de l'apparition de force électromotrice est la présence d'un champ magnétique.

1. Loi de Faraday

Dans le cas d'un contour fermé, la force électromotrice est donnée par la *loi de Faraday* $e_{\text{induction}} = -\frac{d\phi}{dt}$ où ϕ désigne le flux du champ magnétique à travers le contour (c'est-à-dire à travers une surface quelconque s'appuyant sur le contour).

Le phénomène intervient donc lorsque le flux du champ magnétique à travers le contour varie. Cela se produit en particulier dans deux situations simples :

- Le circuit est immobile et soumis à un champ magnétique non permanent (voir VI).
- Le circuit est plongé dans un champ magnétique permanent mais il est mobile ou déformable ce qui fait varier le flux magnétique (voir VII).

2. Orientations

Dans la loi de Faraday, les orientations doivent être cohérentes. Le contour fermé est orienté. Tout d'abord, ceci oriente la surface (s'appuyant sur le contour) à travers laquelle on calcule ϕ . Par ailleurs, la force électromotrice obtenue est une grandeur algébrique dont le sens positif est celui de l'orientation du contour.

3. Loi de Lenz

La loi de Faraday est une loi quantitative. On peut lui associer la *loi de Lenz* qualitative :

Les courants induits sont de sens tel qu'ils s'opposent à (modèrent) la cause de leur existence.

Cette *cause* est soit la variation de flux magnétique, soit la raison primaire de cette variation de flux : mouvement d'un circuit, variation d'une intensité ...).

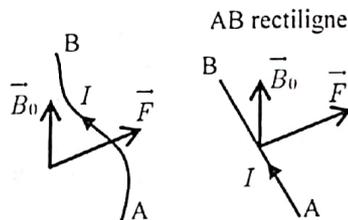
La loi de Lenz est une *loi de modération*.

Voir des exemples dans les parties VI et VII.

IV. Forces de Laplace

Lorsqu'une portion de circuit filiforme parcourue par un courant d'intensité I est placée dans un champ magnétique, elle est soumise à une force dont l'expression est donnée par les relations suivantes :

- Pour un morceau élémentaire $d\vec{l}$ au voisinage de M, $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$ (appliquée en M).
- Pour un morceau macroscopique \widehat{AB} plongé dans un champ uniforme \vec{B}_0 , $\vec{F} = I \overline{AB} \wedge \vec{B}_0$. Si le circuit \widehat{AB} est rectiligne, on peut considérer, pour calculer le moment des forces de Laplace que cette force est appliquée au milieu du segment AB.
- Pour un circuit fermé plongé dans un champ uniforme \vec{B}_0 , $\vec{F} = \vec{0}$ et le moment en un point quelconque des forces de Laplace vaut $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_0$ où $\vec{\mathcal{M}}$ est le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S}$ du circuit fermé (si le circuit est une bobine constitué d'un enroulement de N spires sur un même contour, $\vec{\mathcal{M}} = N I \vec{S}$).



V. Expression du flux magnétique, coefficients d'inductance

1. Expression du flux magnétique

On suppose qu'on étudie un circuit fermé. On nomme *champ propre* la contribution du circuit au champ magnétique et *flux propre* le flux magnétique associé). On peut considérer, dans le cadre des régimes lentement variables (ce qui est le cas pour les fréquences usuelles de l'électrocinétique) que ce champ propre à la date t est proportionnel à l'intensité parcourant le circuit à la même date. On peut alors écrire $\phi_{\text{propre}}(t) = L I(t)$ où L est une constante dépendant uniquement de la forme du circuit nommée *inductance propre* ou *auto-inductance* du circuit.

En ce qui concerne le *champ extérieur*, il y a deux cas typiques :

- Soit c'est une donnée et on calcule alors directement son flux $\phi_{\text{ext}} = \iint \vec{B}_{\text{ext}} \cdot d\vec{S}$ qui devient, dans le cas d'un champ extérieur uniforme $\phi_{\text{ext}} = \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{n} S$ (ou $\phi_{\text{ext}} = N \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{n} S$ pour un enroulement de N spires).
- Soit il est créé par un autre circuit parcouru par une intensité $I_2(t)$ et, dans le cas d'un régime lentement variable, $\phi_{\text{ext}}(t) = M I_2(t)$ où M est une constante dépendant uniquement de la forme des deux circuits et de leur position relative nommée *inductance mutuelle* entre les 2 circuits. Ce coefficient joue un rôle symétrique pour les deux circuits : il sert aussi à exprimer le flux du champ créé par le premier circuit à travers le second sous la forme $\phi_{\text{à travers 2}} = M I_{\text{premier circuit}}$.

2. Ordre de grandeur d'une inductance propre

On considère une bobine très longue, comportant N spires de section S réparties uniformément sur une longueur l . Le champ magnétique est, à l'intérieur, voisin de celui d'un solénoïde illimité comportant $n = N/l$ spires par unité de longueur. $\vec{B}_{\text{int}} \approx \mu_0 n I \vec{u}_z$. Le flux magnétique à travers une spire est alors $\phi_1 \approx \mu_0 n I S$ et le flux à travers les N spires est $\phi = N \phi_1 \approx \mu_0 N n I S$. On obtient donc la valeur de

$$\text{l'inductance propre : } L \approx \mu_0 N n S = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} = \mu_0 n^2 l S.$$

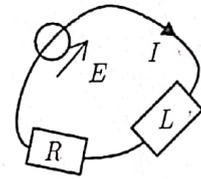
Pour une bobine typique utilisable en TP, comportant de l'ordre de 1000 spires, l'inductance propre est de quelques dizaines de mH (unité SI d'inductance : le Henry).

VI. Première catégorie d'étude des phénomènes d'induction : circuit fixe soumis à un champ magnétique dépendant du temps

1. Établissement du courant dans un circuit fermé (pas de champ extérieur, uniquement le champ propre)

On place à l'instant $t = 0$ une source de tension constante (E) dans un circuit fermé de résistance R .

- Loi de Faraday : $e_{\text{induction}} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$
- Loi de Pouillet : $E + e_{\text{induction}} = RI$



Par élimination de $e_{\text{induction}}$, il vient : $E = RI + L\frac{dI}{dt}$

La solution de cette équation vérifiant $I(0) = 0$ est $I = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$ avec $\tau = \frac{L}{R}$.

La loi de Lenz s'applique ici dans le sens où l'établissement d'une intensité non nulle (et donc du champ magnétique associé) est retardé par le phénomène d'induction (valeur de L non nulle).

En multipliant l'équation différentielle par $I(t)$ on obtient le *bilan énergétique* :

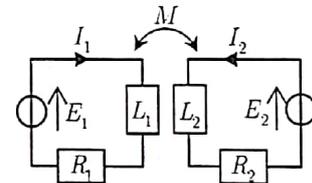
$$EI = RI^2 + LI\frac{dI}{dt} = RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)$$

qu'on peut interpréter : la puissance fournie par la source de tension (EI) se répartit entre puissance électrique reçue par la résistance (RI^2 : *loi de Joule*) et puissance servant à l'augmentation de l'énergie magnétique :

$$E_{\text{magnétique}} = \frac{1}{2}LI^2$$

2. Circuits couplés par inductance mutuelle

Un circuit fermé (1) de résistance R_1 dans lequel est placée une source de tension (E_1) est soumis au champ créé par un second circuit analogue parcouru par une intensité $I_2(t)$.



- Loi de Faraday pour le circuit (1) : $e_{\text{induction 1}} = -\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{d(L_1I_1 + MI_2)}{dt} = -L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt}$
- Loi de Pouillet pour le circuit (1) : $E_1 + e_{\text{induction 1}} = R_1I_1$

Par élimination de $e_{\text{induction 1}}$, il vient : $E_1 = R_1I_1 + L_1\frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt}$

On peut écrire l'équation analogue pour le circuit 2 : $E_2 = R_2I_2 + L_2\frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt}$

Lorsque les sources de tension sont sinusoïdales de même pulsation ω , on peut étudier le régime harmonique forcé en utilisant les représentations complexes en $\exp(j\omega t)$. Les équations deviennent alors :

$$\begin{aligned} E_1 &= (R_1 + jL_1\omega)I_1 + jM\omega I_2 \\ E_2 &= jM\omega I_1 + (R_2 + jL_2\omega)I_2 \end{aligned}$$

Deux circuits couplés ainsi par inductance mutuelle peuvent modéliser les transformateurs utilisés pour abaisser ou augmenter l'amplitude des tensions alternatives ou bien les étiquettes RFID (Radio Frequency IDentification) présentes dans les cartes de paiement sans contact

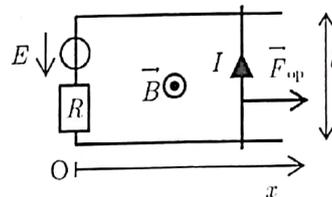
VII. Seconde catégorie d'étude des phénomènes d'induction : circuit mobile ou déformable soumis à un champ magnétique extérieur permanent

1. Rails de Laplace

1.a. Mise en équation.

On néglige dans les exemples suivants le champ propre du circuit.

Une barre conductrice est en translation rectiligne selon Ox , posée sans frottement sur deux rails parallèles conducteurs distants de l . Un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire est orthogonal au plan formé par la barre et les deux rails. Une source de tension idéale (E) est éventuellement placée dans le circuit. Un opérateur exerce éventuellement une force $F_{op} \vec{u}_x$ constante sur la barre. On prend en compte la résistance



R du circuit (supposée constante).

Impératif : Toutes les orientations sont arbitraires mais doivent être précisées avant mise en équation (axe Ox , intensité I , champ \vec{B} et sens du générateur). Sur le dessin ci-dessus, le générateur a été placé dans le sens conventionnel de l'intensité. On devra donc comptabiliser sa force électromotrice comme étant égale à $+E$ pour le circuit étudié.

- Loi de Faraday : $e_{induction} = -\frac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = xlB$ d'où $e_{induction} = -lB\dot{x}$
- Loi de Pouillet : $RI = e_{induction} + E$
- Force de Laplace : $\vec{F}_{Laplace} = IlB\vec{u}_x$
- Loi de la quantité de mouvement en projection sur Ox : $m\ddot{x} = \vec{F}_{Laplace} \cdot \vec{u}_x + F_{op} = IlB + F_{op}$

Par élimination de I et $e_{induction}$ on obtient
$$m\ddot{x} + \frac{l^2 B^2}{R} \dot{x} = \frac{lB}{R} E + F_{op}$$

Dans cette équation, le terme contenant le champ magnétique est dû aux courants induits. C'est un terme de freinage *visqueux* (proportionnel à \dot{x}) ce qui fait que les courants induits vérifient la loi qualitative de Lenz : ils sont de sens tel qu'ils s'opposent à la cause qui les a créés (ici la cause du phénomène d'induction est le mouvement de la barre). La force de Laplace qui résulte des courants induits tend à ralentir ce mouvement.

La vitesse tend vers une valeur limite (associée à $\ddot{x} = 0$)
$$\dot{x}_{lim} = \frac{E}{lB} + \frac{R}{l^2 B^2} F_{op}$$

1.b. Application 1 : cas où $E = 0$ et $F_{op} \neq 0$

$\dot{x}_{lim} = \frac{R}{l^2 B^2} F_{op}$. On calcule alors $I_{lim} = -\frac{F_{op}}{lB}$. Le système est une *dynamo*. La mise en mouvement de la barre entraîne la présence d'un courant dans le circuit où il n'y avait pas de générateur. On peut établir un bilan énergétique en calculant la puissance électrique disponible dans le circuit (ici la résistance)

$P_{dispo} = RI_{lim}^2 = \frac{R}{l^2 B^2} F_{op}^2$ et en la comparant à la puissance mécanique fournie par l'opérateur

$P_{op} = F_{op} \dot{x}_{lim} = \frac{R}{l^2 B^2} F_{op}^2$. Les deux sont identiques.
$$P_{mécan op} = P_{élec dispo}$$

En l'absence de frottements, la *conversion d'énergie mécanique en énergie électrique* par induction a un rendement égal à 1.

1.c. application 2 : cas où $E \neq 0$

Si $F_{op} = 0$, $\dot{x}_{lim} = \frac{E}{lB}$. On a cette fois-ci fabriqué un *moteur*. Les forces de Laplace ont permis la mise en mouvement de la barre. Pour un moteur en fonctionnement réaliste (moteur entraînant quelque chose), il faut tenir compte d'une force de résistance au mouvement de la barre, c'est-à-dire ici considérer une force de l'opérateur négative : $F_{op} = -|F_{op}|$. Alors la vitesse limite devient $\dot{x}_{lim} = \frac{E}{lB} - \frac{R}{l^2 B^2} |F_{op}|$. On peut alors calculer $I_{lim} = \frac{|F_{op}|}{lB}$. Le bilan énergétique est alors le suivant :

La puissance fournie par le générateur est $P_{elec\ fournie} = EI_{lim} = \frac{EF_{op}}{lB}$. La puissance mécanique reçue par l'opérateur est $P_{méca\ reçue} = |F_{op}| \dot{x}_{lim} = \frac{E}{lB} |F_{op}| - \frac{R}{l^2 B^2} F_{op}^2$ donc $P_{elec\ fournie} = P_{méca\ reçue} + RI^2$.

Si la résistance est nulle, $P_{elec\ fournie} = P_{méca\ reçue}$.

En l'absence de résistance électrique, la *conversion d'énergie électrique en énergie mécanique* par induction a un rendement égal à 1.

1.d. Exercice : on revient au cas général $E \neq 0$, $F_{op} \neq 0$ et à un régime non permanent.

Montrer que

$$EI + F_{op} \dot{x} = RI^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right)$$

et interpréter ce résultat.

1.e. Modélisation d'un haut-parleur électrodynamique :

Les rails de Laplace permettent de modéliser un haut-parleur. La barre représente la membrane mobile du haut-parleur. La membrane est reliée au boîtier du haut-parleur par une partie élastique qu'on peut modéliser par la présence d'un ressort de raideur k . Elle est d'autre part en contact avec l'air pour émettre les ondes acoustiques. On peut modéliser l'action de l'air par une force de freinage visqueux (proportionnelle à la vitesse).

Il suffit pour prendre tout cela en compte d'écrire $F_{op} = -kx - \alpha \dot{x}$ dans les équations établies dans le sous-paragraphe 1.a.

Par ailleurs, la source de tension devra avoir une force électromotrice dépendant du temps $E(t)$ correspondant au signal sonore qu'on veut émettre. Compte tenu du caractère linéaire (par rapport à $x(t)$ et $E(t)$) de l'équation différentielle, on peut se restreindre au cas où $E(t)$ est sinusoïdal.

2. Spire rectangulaire en rotation autour d'un axe fixe, soumise à un champ magnétique extérieur uniforme, permanent, orthogonal à l'axe de rotation.

Ici encore, les orientations sont primordiales (voir le dessin). \vec{B} est selon Ox . La normale \vec{n} à la spire est dans le plan xOy . Elle est orientée de façon cohérente avec l'intensité dans la spire.

On note S l'aire de la spire, J son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Oz et R sa résistance.

On néglige ici aussi le champ propre du circuit étudié.

La liaison pivot d'axe Oz est sans frottement.

2.a. Mise en équation

- Flux magnétique à travers la spire : $\phi = BS \cos \theta$

- Loi de Faraday : $e_{\text{induction}} = -\frac{d\phi}{dt} = BS\dot{\theta} \sin \theta$

- Loi de Pouillet : $e_{\text{induction}} = RI$

- Moment des forces de Laplace par rapport à l'axe de rotation :

$$\Gamma_{Oz} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z = -\mathcal{M}B \sin \theta = -ISB \sin \theta$$

- Loi du moment cinétique pour une liaison pivot sans frottement : $J\ddot{\theta} = \Gamma_{Oz}$

En éliminant $e_{\text{induction}}$ et I on obtient : $J\ddot{\theta} = -\left(\frac{S^2 B^2}{R} \sin^2 \theta\right) \dot{\theta}$

On constate ici encore l'application de la loi de Lenz. Le terme magnétique est un terme de freinage (signe - devant $\dot{\theta}$). Il s'oppose à la cause (le mouvement).

2.b. Bilan énergétique

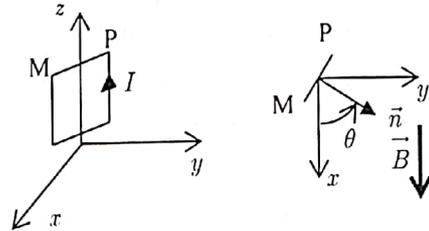
l'énergie cinétique de rotation est $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$. Sa dérivée vaut $J\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\left(\frac{S^2 B^2}{R} \sin^2 \theta\right) \dot{\theta}^2$. Or l'intensité I vaut

$I = \frac{e_{\text{induction}}}{R} = \frac{BS}{R} \dot{\theta} \sin \theta$ donc $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right) = -RI^2$. L'énergie cinétique diminue. Cette énergie mécanique

« perdue » se retrouve sous forme d'énergie électrique (puissance Joule fournie à la résistance RI^2) avec un rendement égal à 1.

Remarques :

- la résistance se charge de convertir cette puissance électrique en énergie interne et en échange thermique avec l'extérieur $RI^2 = \frac{dU}{dt} + P_{\text{thermique fournie à l'extérieur}}$ (mais ce n'est plus de l'électromagnétisme ou de la mécanique mais de la thermodynamique ; il ne manque qu'un peu d'optique pour avoir fait le tour des domaines de la physique).
- L'étude faite ici est l'analogue en rotation de celle faite pour une translation au 1.b : c'est un fonctionnement en *dynamo* ou en *alternateur*. En plaçant un générateur dans le circuit, on peut obtenir l'analogue du 1.c : un fonctionnement en *moteur rotatif*.



VIII. Courants de Foucault

Si un conducteur non filiforme est soumis à un champ magnétique non permanent ou s'il se déplace en présence d'un champ magnétique, le phénomène d'induction se manifeste par des courants circulant dans le volume conducteur. On parle alors de *courants de Foucault*. Ils ont des effets thermiques (effet Joule) et mécaniques (forces de Laplace).

Les lois quantitatives de l'induction ne sont pas, dans ce cas, aussi simples que la loi de Faraday (qui n'est applicable que pour un circuit filiforme) mais la loi qualitative de Lenz s'applique.

Les courants de Foucault peuvent être utiles (chauffage par induction, freinage de camions ou de trains par courants de Foucault...) ou néfastes (pertes par effet Joule dans les transformateurs...).

Ils sont responsables du champ magnétique terrestre (le noyau externe de la Terre est à la fois conducteur et en mouvement de convection).