L'opérateur rotationnel

Interprétation

À partir du théorème de Stokes : $\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oint_{\text{Contour entourant S}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ on passe à la limite d'une surface plane d'aire tendant vers 0 autour d'un point M de normale $\vec{u}$. En un point de continuité, on obtient :

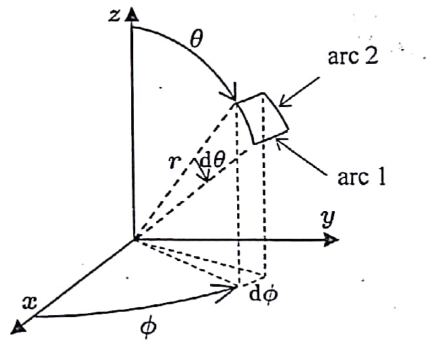
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}(\mathrm{M})\cdot\vec{u}\,\delta S \sim \oint_{\text{Contour autour de M}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ ce qui signifie que : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}(\mathrm{M})\cdot\vec{u} = \lim_{\delta S\to 0}\dfrac{\oint\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\delta S}$

Le rotationnel d'un champ vectoriel est une circulation par unité de surface.

Par exemple, si un solide est en rotation autour de l'axe $\mathrm{M}z$ à la vitesse angulaire Ω, le champ des vitesses est, en coordonnées cylindriques $\vec{v} = r\Omega\vec{u}_\theta$ et la circulation sur un cercle d'axe $\mathrm{M}z$ vaut $r\Omega\times 2\pi r = 2\Omega\times\pi r^2$. Alors l'interprétation précédente conduit à $\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{v}\right)\cdot\vec{u}_z = 2\Omega$. On peut montrer que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{v} = 2\Omega\vec{u}_z$. Le rotationnel est donc le double du vecteur taux de rotation du solide. En mécanique des fluides, le rotationnel du champ des vitesses est alors une mesure du taux de rotation (qui est, pour un fluide une notion locale et non plus globale comme pour un solide). On nomme $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}_{(\mathrm{M})}$ vecteur « tourbillon ».

Expression en coordonnées orthogonales.

Exemple des coordonnées sphériques



On applique le résultat précédent à la surface élémentaire (sur la sphère de rayon r) associée aux variations élémentaires $\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}\phi$.

Le déplacement élémentaire y est $\mathrm{d}\vec{r} = r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\phi\,\vec{u}_\phi$.

L'aire élémentaire est $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta\, r\sin\theta\mathrm{d}\phi = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$.

La longueur de l'arc 1 par exemple est $r\sin\left(\theta+\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\phi$. Il est important ici de garder le terme $\left(\theta+\mathrm{d}\theta\right)$ pour que le calcul à faire soit correct à l'ordre 1 en $\mathrm{d}\theta$.

La circulation sur l'arc 1 et sur l'arc opposé est :

$$E_{\phi(\theta+\mathrm{d}\theta)}\, r\sin\left(\theta+\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\phi - E_{\phi(\theta)}\, r\sin\left(\theta\right)\mathrm{d}\phi \approx \frac{\partial}{\partial\theta}\left(E_\phi\ \sin\theta\right)\mathrm{d}\theta\, r\,\mathrm{d}\phi$$

De même pour l'arc 2 et l'arc opposé, leur contribution à la circulation est :

$$-E_{\theta(\phi+\mathrm{d}\phi)}r\mathrm{d}\theta + E_{\theta(\phi)}r\mathrm{d}\theta \approx -r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}$$

La circulation totale sur le contour fermé est donc :

$\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(E_\phi\ \sin\theta\right)\mathrm{d}\theta\, r\,\mathrm{d}\phi - \dfrac{\partial E_\theta}{\partial\phi}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(E_\phi\ \sin\theta\right) - \dfrac{\partial E_\theta}{\partial\phi}\right]$. En divisant par l'aire $\mathrm{d}S$ on obtient :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right)\cdot\vec{u}_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(E_\phi\ \sin\theta\right) - \frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}\right]$$

Le raisonnement et le résultat se généralisent à tout système de coordonnés orthogonales $q_1,\ q_2,\ q_3$ pour lequel on écrit $\mathrm{d}\vec{r} = h_1\vec{u}_1\,\mathrm{d}q_1 + h_2\vec{u}_2\,\mathrm{d}q_2 + h_3\vec{u}_3\,\mathrm{d}q_3$ et

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right)_3 = \frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(h_2E_2\right) - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_1E_1\right)\right\}$$

(Pour les coordonnées sphériques, $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \phi$ et $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$.)

L'opérateur divergence

Interprétation

À partir du théorème de Green-Ostrogradski : $\iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\,\mathrm{d}V = \oiint_{\text{Surface entourant } V} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ on passe à la limite d'un volume tendant vers 0 autour d'un point M. En un point de continuité, on obtient :

$\operatorname{div}\vec{E}_{(\mathrm{M})}\,\delta V \sim \oiint_{\text{Surface autour de M}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ ce qui signifie que : $\operatorname{div}\vec{E}_{(\mathrm{M})} = \lim_{\delta V\to 0}\dfrac{\oiint \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}}{\delta V}$

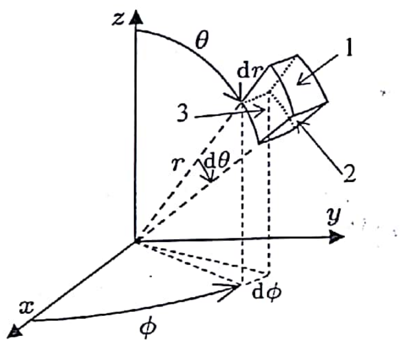
La divergence d'un champ vectoriel est un flux par unité de volume.

Par exemple, en mécanique des fluides, si on étudie le champ des vitesses, son flux est un débit volumique et sa divergence, en tant que débit volumique par unité de volume est donc le taux relatif de dilatation (ou l'opposé du taux relatif de variation de la masse volumique).

Expression en coordonnées orthogonales.

Exemple des coordonnées sphériques

On applique le résultat précédent au volume élémentaire associé aux variations élémentaires $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}\phi$.



Le déplacement élémentaire est $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\phi\,\vec{u}_\phi$.

Le volume élémentaire est $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\; r\mathrm{d}\theta\; r\sin\theta\mathrm{d}\phi = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$.

L'aire de la face 1 par exemple est $(r+\mathrm{d}r)\sin\theta\mathrm{d}\phi\,(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta$. Il est important ici de garder le terme $(r+\mathrm{d}r)$ pour que le calcul à faire soit correct à l'ordre 1 en $\mathrm{d}r$ alors qu'on n'a pas tenu compte de la différence entre $\sin\theta$ et $\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)$ car l'expression est déjà d'ordre 1 en $\mathrm{d}\theta$.

Le flux sur la face 1 et sur la face opposée est :

$E_{r(r+\mathrm{d}r)}(r+\mathrm{d}r)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi - E_{r(r)}(r)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \left[E_{r(r+\mathrm{d}r)}(r+\mathrm{d}r)^2 - E_{r(r)}(r)^2\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ qui, étant de la forme $f(r+\mathrm{d}r)-f(r)\approx\dfrac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r$ est assimilable à $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2E_r\right)\mathrm{d}r\,\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$.

De même pour la face 2 et la face opposée, leur contribution au flux est :

$E_{\theta(\theta+\mathrm{d}\theta)}\,\mathrm{d}r\;r\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}\phi - E_{\theta(\theta)}\,\mathrm{d}r\;r\sin(\theta)\mathrm{d}\phi \approx \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(E_\theta\,\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,r\mathrm{d}\phi$.

Pour la face 3 et sa face opposée, la contribution est $\dfrac{\partial}{\partial\phi}\left(E_\phi\right)\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,r\mathrm{d}\theta$.

Le flux total à travers la surface fermée est donc :

$\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2E_r\right)\mathrm{d}r\,\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi + \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(E_\theta\,\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,r\mathrm{d}\phi + \dfrac{\partial}{\partial\phi}\left(E_\phi\right)\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,r\mathrm{d}\theta$. En divisant par le volume $\mathrm{d}V$ on obtient :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2E_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(E_\theta\,\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(E\phi\right)$$

Le résultat se généralise à tout système de coordonnés orthogonales q_1, q_2, q_3 pour lequel on écrit :

$\mathrm{d}\vec{r} = h_1\vec{u}_1\,\mathrm{d}q_1 + h_2\vec{u}_2\,\mathrm{d}q_2 + h_3\vec{u}_3\,\mathrm{d}q_3$ et

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(h_2h_3E_1\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_3h_1E_2\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(h_1h_2E_3\right)\right\}$$

(Pour les coordonnées sphériques, $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \phi$ et $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$.)