Séries de Fourier

I. Relations générales

Soit une fonction périodique F de période T de classe C^1 par morceaux $\quad F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C} \quad F(t+T)=F(t)$
Alors, en tout point où F est continue on peut écrire :

$$\boxed{F(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i2\pi n\frac{t}{T}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)}$$

Physiquement on interprétera : « Toute fonction périodique est décomposable en une somme de fonction sinusoïdales dont les pulsations sont multiples entières (harmoniques) de la pulsation fondamentale $\dfrac{2\pi}{T}$ ».

Remarque : En un point où F n'est pas continue mais où elle admet une limite à droite et une limite à gauche, les séries de Fourier convergent vers $\frac{1}{2}\big(F(t+0)+F(t-0)\big)$.

Les coefficients de Fourier sont des nombres complexes donnés par :

$\boxed{c_0=a_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}F(t)\,\mathrm{d}t}$ est la valeur moyenne de F sur une période. $\boxed{c_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}F(t)\exp\left(-i2\pi n\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t}$

pour $n\neq 0$, $\boxed{a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}F(t)\cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}F(t)\sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t}$

Ils vérifient les relations : $\quad c_0=a_0 \quad$ et $\quad$ pour $n>0 \quad c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$ et $c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$

Relation de Parseval : $\quad \displaystyle\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left|F(t)\right|^2\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_n\right|^2=\left|a_0\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n\right|^2+\left|b_n\right|^2\right)$

II. Cas particuliers

Dans le cas d'une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ tous les a_n et b_n sont réels et c_n et c_{-n} sont complexes conjugués.

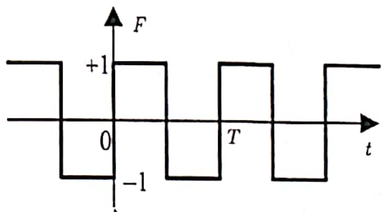
Pour une fonction paire (resp. impaire) tous les b_n (resp. a_n) sont nuls : $F(t)$ est une série de cosinus (resp. sinus).

Pour une fonction de valeur moyenne nulle : a_0 est nul.

III. Exemples

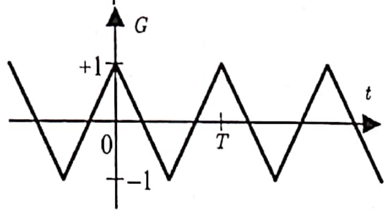
Fonction « en créneaux » ou « carrée » d'amplitude unité :

$$F(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2p+1}\sin\left(2\pi(2p+1)\frac{t}{T}\right)$$



Fonction « triangulaire » ou « en dents de scie symétriques » d'amplitude unité :

$$G(t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos\left(2\pi(2p+1)\frac{t}{T}\right)$$



Dans les deux cas, l'absence de termes de rang n pair est due à l'antipériode $\dfrac{T}{2}$: $\quad F(t+\frac{T}{2})=-F(t)$

On peut retrouver G à partir de F en remarquant que $\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{4}{T}F$

Les coefficients du signal triangulaire décroissent plus vite en fonction de n ($\dfrac{1}{n^2}$ par rapport à $\dfrac{1}{n}$) ce qui traduit le fait que le signal triangulaire « ressemble » plus à une sinusoïde et est plus régulier (continu).