Théorème π de Vaschy-Buckingham

I Notion de produits indépendants formés à partir de grandeurs physiques

Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ n grandeurs physiques. On appelle « *produit* » formé à partir de ces n grandeurs une expression construite en utilisant des produits, quotients et élévation à une puissance.
Par exemple, en électromagnétisme, à partir des caractéristiques d'une spire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I et des constantes fondamentales, on peut former la quantité $\mu_0 I / R$ (homogène à un champ magnétique).

De façon générale, on notera $\pi = \prod_{i=1}^{n} A_i^{\alpha_i}$ un tel produit qui est donc caractérisé par l'ensemble des n exposants $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ qui peut être considéré comme un vecteur $\vec{\alpha}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
Un ensemble $\{\pi_k\}$ de tels produits est « *indépendant* » si les vecteurs $\vec{\alpha}_k$ associés sont linéairement indépendants.
Concrètement, cela signifie que l'on ne peut pas calculer l'un des π_k en multipliant ou divisant les autres.

Exemples : AB / C A / C B / C sont indépendants AB / C A / C B^2 ne le sont pas

II Principe de base de la physique

Les lois de la physique sont indépendantes du choix (arbitraire) des unités utilisées pour exprimer les grandeurs physiques. Il faut alors qu'elles s'expriment en fonction de quantités qui sont indépendantes de ce choix d'unité. Or seules les quantités sans dimension sont indépendantes du choix des unités. Les lois de la physique doivent alors s'exprimer en fonction de produits sans dimension.

Exemple : Pour une onde électromagnétique plane, progressive, dans le vide $E = cB$ ce qui peut s'écrire $\frac{E}{cB} - 1 = 0$ qui est de la forme $f(\pi) = 0$ où π est le produit sans dimension E / cB et f la fonction $x \mapsto x - 1$.
De façon générale, une loi physique pourra toujours être mise sous la forme $F(\pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots) = 0$ où les π_k sont des produits sans dimension formés à partir des variables intervenant dans le problème étudié. De plus, on peut toujours se ramener à un ensemble de produits indépendants car, si certains de ces produits peuvent s'exprimer en fonction d'un sous-ensemble de produits indépendants, on peut toujours les remplacer dans la fonction F pour ne plus faire apparaître que les produits indépendants.

III Équations aux dimensions

On note $[A]$ la dimension de A. Les dimensions de base sont associées aux unités de base du SI :

- En mécanique $[\textit{longueur}] = \mathsf{L}$ $[\textit{temps}] = \mathsf{T}$ et $[\textit{masse}] = \mathsf{M}$
- En électromagnétisme il faut y ajouter $[\textit{intensité}] = \mathsf{I}$
- En thermodynamique puis en chimie il faut y ajouter $[\textit{température}] = \Theta$ puis $[\textit{quantité de matière}] = \mathsf{N}$.

À toute grandeur physique, on associe sa dimension qui peut s'exprimer sous forme d'un produit des dimensions de base.
Exemples : une force F vérifiera $[F] = \mathsf{MLT^{-2}}$ et un champ électrique $[E] = \mathsf{MLT^{-3}\,I^{-1}}$ (car $[\textit{charge}] = \mathsf{IT}$).

IV Rang dimensionnel d'un ensemble de paramètres physiques.

Des grandeurs sont « *dimensionnellement indépendantes* » si leurs dimensions sont indépendantes (au sens défini au **I**). Par exemple, une vitesse v et une accélération a sont dimensionnellement indépendante mais, si on ajoute une distance r, l'ensemble ne l'est plus car $[a] = [v^2] / [r]$. Le « *rang dimensionnel* » d'un ensemble de paramètres physiques est le nombre maximal de paramètres dimensionnellement indépendants. Par exemple, le rang dimensionnel de $\{a, v, r\}$ est 2.
Pour un problème de mécanique, le rang dimensionnel vaut au plus 3. Il vaut au plus 4 en thermodynamique.

V Théorème π.

Toute loi physique entre n **grandeurs** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dont l'ensemble est **de rang dimensionnel** p peut s'exprimer sous la forme $F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-p}) = 0$, en faisant donc **intervenir** $n - p$ **produits sans dimension indépendants.**

Démonstration : On utilise le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}) + \mathrm{rg} = \dim(\mathbb{R}^n)$ pour l'application qui à tout « *produit* » (ou plutôt au vecteur $\vec{\alpha}$ correspondant de $\mathbb{R}^n$) associe sa dimension (ou plutôt la décomposition de cette dimension sur les dimensions de base). Le noyau est l'ensemble des produits sans dimension. $\dim(\mathrm{Ker}) = \dim(\mathbb{R}^n) - \mathrm{rg} = n - p$.