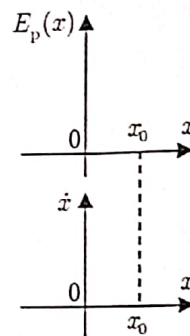


## Portraits de phase

Un point matériel de masse  $m$  se déplace sans frottement sur l'axe  $Ox$ . Il est soumis à une force dérivant d'une énergie potentielle  $E_p(x)$ . On souhaite représenter les trajectoires dans l'espace des phases. Tous les schémas devront comporter l'un en-dessous de l'autre le graphe de  $E_p(x)$  et celui des trajectoires dans l'espace des phases  $\dot{x}(x)$  (portrait de phase), les axes des  $x$  étant en correspondance et avec la même échelle, suivant le principe ci-contre. Les trajectoires dans l'espace des phases seront systématiquement orientées selon leur sens de parcours (pour  $t$  croissant).  $k$  et  $x_0$  sont des constantes positives.



1.  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ . Donner les équations et la nature géométrique des trajectoires. Tracer les graphes.
2.  $E_p = -\frac{1}{2}kx^2$ . Mêmes questions. Préciser la nature des trajectoires passant par le point d'équilibre.
3.  $E_p = -k\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4x_0^2}\right)$ . Tracer le graphe de l'énergie potentielle. En déduire, sans calculs, en vous aidant des deux premières questions, le portrait de phase. Tracer avec soin la trajectoire critique (passant par le point d'équilibre instable).
4. Exercice oraux MP\*, 2019 XP7. La masse mobile  $m_1$  ne servant à rien (piège débile visant à troubler le candidat ?), on la suppose immobile.
  - (a) Dans un premier temps on ne tient pas compte du champ de pesanteur (ou on suppose que la droite support du mouvement de  $m_2$  est horizontale). Tracer l'allure du graphe de l'énergie potentielle du ressort et en déduire qualitativement le portrait de phase. On prendra soin de traiter deux cas, suivant que la distance entre  $m_1$  et le support de  $m_2$  est plus petite ou plus grande que la longueur à vide du ressort.
  - (b) On tient compte d'un champ de pesanteur uniforme. Étudier qualitativement la déformation du graphe de  $E_p$ . On étudiera deux cas, suivant la force du champ de pesanteur. En déduire, suivant les cas les différentes possibilités pour le portrait de phase.
5. On donne deux graphes d'énergie potentielle. Tracer les portraits de phase associés. Dans le cas de la figure de droite, préciser le comportement des trajectoires au voisinage de l'origine en considérant que  $E_p \sim -kx^3$ .

