

## MAGNÉTOSTATIQUE

1. Un fil de cuivre de section  $1,5 \text{ mm}^2$  est parcouru par un courant électrique d'intensité  $10 \text{ A}$ . On considère que la conduction électrique est assurée par le fait que chaque atome de cuivre libère un électron.  $M_{\text{Cu}} = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$ ;  $\rho_{\text{Cu}} = 8,96 \text{ g.cm}^{-3}$ . Calculer la densité de courant dans le fil et la vitesse moyenne des porteurs de charge. Commenter.

2. Un cylindre à base circulaire de rayon  $a$  infiniment long tourne à la vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de son axe de symétrie de révolution  $Oz$ . Il entraîne dans sa rotation la charge volumique uniforme qu'il contient.

- Déterminer le vecteur densité de courant en tout point de l'espace.
- Exploiter les symétries pour obtenir le plus d'information possible sur le champ magnétique.
- Un tel système se prête-t-il bien à l'utilisation du théorème d'Ampère ?
- Calculer l'intensité du courant électrique traversant un rectangle dont un des côtés, de longueur  $h$ , est porté par  $Oz$  (discuter suivant la largeur du rectangle).
- En admettant que le champ magnétique est nul à grande distance du cylindre, déterminer sa valeur en tout point.
- Calculer le champ magnétique par une autre méthode qu'au e.

3. Dans le plan  $yOz$ , on place des fils jointifs rectilignes infinis parallèles à l'axe  $Oy$  parcourus par des courants de même sens et de même intensité  $I$ . Dans le plan d'équation  $x = a$ , on place des fils de la même façon. Ils sont parcourus par des courants d'intensité  $I$  dans le sens opposé à celui des fils du plan  $yOz$ . Le diamètre de tous les fils est  $\varepsilon \ll a$  (on considérera que  $\varepsilon$  est négligeable devant toute autre distance).

- Exploiter les symétries pour obtenir le plus d'information possible sur le champ magnétique.
- Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace.

*technique?*

4. Dans le plan  $yOz$ , une bande plane d'axe  $Oz$  et de largeur  $2b$  (comptée selon  $Oy$ ) est parcourue par un courant circulant selon la direction de  $Oz$ , réparti uniformément sur la surface de la bande et d'intensité totale  $I$ .

- On se place en un point quelconque  $M$  de l'axe  $Ox$ . Quelle est la direction de  $\vec{B}$  ?
- On considère une bandelette, de largeur élémentaire  $dy$ , d'axe d'ordonnée  $y$  avec  $|y| < b$ . Elle est assimilable à un fil (largeur quasi-nulle). Quelle est l'intensité parcourant ce fil ? Quel est le champ créé en  $M$  par cette bandelette ? Quelle est la projection sur  $Oy$  de ce champ ?
- En déduire le champ en  $M$  créé par la bande complète. À quelle condition peut-on considérer qu'à 1% près le champ en  $M$  est identique à celui qui serait créé par un fil rectiligne confondu avec l'axe  $Oz$  et parcouru par un courant d'intensité

$$I ? \text{ On donne } \int \frac{dX}{1+X^2} = \arctan X \quad \frac{\arctan u}{u} = 1 - \frac{u^2}{3} + O(u^4) \quad \frac{\tan v}{v} = 1 + \frac{v^2}{3} + O(v^4)$$

5.a. Soit un fil cylindrique infini, de section circulaire de rayon  $a$ , d'axe  $Oz$ , transportant un courant d'intensité  $I$  (vecteur densité de courant  $j\vec{u}_z$  uniforme dans le volume du cylindre). On utilise les coordonnées cylindriques. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé par ce fil en un point quelconque de l'espace.

On considère pour la suite deux fils de même nature parallèles d'axes distants de  $d$  parcourus par des courants opposés. Les axes passent respectivement par deux points  $O_1$  et  $O_2$ .

b. Dans cette question (et seulement dans celle-ci)  $d < 2a$ . La densité de courant est uniforme dans chaque cylindre sauf dans la partie commune où, par compensation, elle est nulle. Calculer  $\vec{B}$  dans cette partie commune. Vérifier qu'il s'exprime de façon simple en fonction de  $\overrightarrow{O_1O_2}$  et  $\vec{u}_z$ . Quel résultat remarquable observe-t-on ?

c. On utilise les coordonnées cylindriques. Pour le fil unique du a. expliciter une fonction  $A_1(r)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\vec{B}_1 = (\overrightarrow{\text{grad}} A_1) \wedge \vec{u}_z$  (on pourra choisir  $A_1(r=a) = 0$ ).

d. Dans le cas des deux fils parallèles, montrer qu'on peut encore écrire le champ total sous la forme  $\vec{B} = (\overrightarrow{\text{grad}} A) \wedge \vec{u}_z$  où, cette fois-ci,  $A$  dépend de  $r$  et de  $\theta$ . Exprimer  $A$  en un point extérieur aux deux cylindres.

e. Donner une valeur approchée à grande distance de  $A$  puis de  $\vec{B}$ .

f. Montrer que les lignes de champ de  $\vec{B}$  sont confondues avec les courbes plane d'équation  $A = C^{\text{te}}$ .

g. Tracer l'allure de la carte de champ associée au système des deux fils parcourus par des intensités opposées.

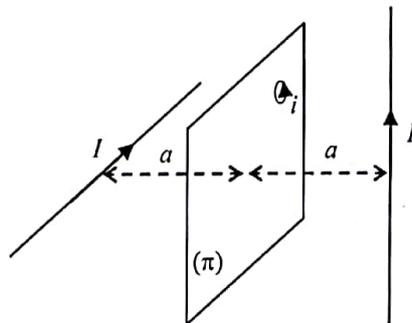
6. Une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$ , est chargée uniformément en surface et tourne avec une vitesse angulaire constante  $\Omega$  autour de l'axe  $Oz$ . On utilise les coordonnées sphériques.

a. Quelle est la valeur de la charge portée par la couronne définie par  $[\theta, \theta + d\theta]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi[$ .

b. On assimile cette couronne à une spire. Quelle est l'intensité associée ? (On pourra se servir du fait que l'intensité est un débit de charge : charge passant divisée par la durée associée). Quel est alors le moment magnétique dipolaire de cette spire ?

c. Quel est le moment magnétique dipolaire de la sphère complète ?

7. Une petite spire plane d'aire  $s$ , parcourue par un courant d'intensité  $i$ , est contenue dans le plan  $(\pi)$  et mobile sans frottements. Les deux fils sont parallèles à  $(\pi)$  et orthogonaux entre eux. Ils sont à la même distance  $a$  du plan et parcourus par des courants de même intensité  $I$ . Étudier les positions d'équilibre de la spire et discuter leur stabilité (on néglige la pesanteur). (Voir Nota bene ci-dessous).



8. Deux aimants que l'on peut assimiler à deux dipôles magnétiques situés en deux points fixes  $O_1$  et  $O_2$  d'un plan horizontal sont libres de pivoter autour des axes verticaux  $O_1z$  et  $O_2z$  (les moments magnétiques  $\vec{M}_1$  et  $\vec{M}_2$  restent dans un

plan horizontal). On repère leurs positions par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  des moments magnétiques par rapport à  $\vec{O_1O_2} = d\vec{u}_x$ .

On admet qu'il est légitime d'utiliser ici l'énergie potentielle  $U = -\vec{M}_2 \cdot \vec{B}_{1 \rightarrow 2}$  (où  $\vec{B}_{1 \rightarrow 2}$  est le champ magnétique créé en  $O_2$  par l'aimant 1) pour étudier aussi bien l'action de  $\vec{M}_1$  sur  $\vec{M}_2$  que celle de  $\vec{M}_2$  sur  $\vec{M}_1$ .

a. Exprimer  $U(\theta_1, \theta_2)$ . On pourra éventuellement utiliser les composants de  $\vec{B}_{1 \rightarrow 2}$  sur  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ .

b. Vérifier que  $U = -\vec{M}_2 \cdot \vec{B}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{M}_1 \cdot \vec{B}_{2 \rightarrow 1}$ . Citer une propriété analogue dans le cas de l'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles.

c. Déterminer les positions d'équilibre. Commenter les configurations géométriques associées.

d. Discuter la stabilité de ces positions d'équilibre. (Voir Nota bene ci-dessous).

**Nota bene :** Pour les deux exercices 7 et 8, on pourra utiliser le résultat suivant :

Pour une fonction de deux variables  $U(x, y)$ , un point stationnaire (ou *point critique*) est un minimum local si  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0$

et  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} > \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^2$ , les dérivées étant calculées au point critique considéré (condition suffisante). Si au moins une des

inégalités « > » est remplacée par l'inégalité « < » alors ce n'est pas un minimum local.

## Magnétostatique (corrigé d'exercices)

1. On considère que la densité de courant est uniforme dans le fil de section droite  $S$ . On utilise la relation  $\vec{j} = \rho_{\text{mobile}} \vec{v}$ . Cette relation a été montrée en cours pour un ensemble de particules identiques et de même vitesse  $\vec{v}$ . On peut montrer (à faire en utilisant la propriété  $\vec{j} d\tau = \sum_{d\tau} q_i \vec{v}_i$ ) qu'elle s'applique à un ensemble de particules identiques si on note  $\vec{v}$  la vitesse moyenne de ces particules. Si chaque atome de cuivre libère un électron, la densité particulaire des électrons est  $n = \frac{\rho_{\text{Cu}}}{M_{\text{Cu}}} N_A$  et  $\rho_{\text{mobile}} = -ne$ .

La définition de  $\vec{j}$  ( $I_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}$ ) conduit à  $I = jS = |\rho_{\text{mobile}}| vS = nevS = N_A \rho_{\text{Cu}} evS / M_{\text{Cu}}$ .

AN :  $j = 6,7 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$      $v \approx 0,5 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$  Les courants ordinaires sont associés à des vitesses d'ensemble des charges mobiles très faibles (beaucoup plus faibles que les vitesses individuelles liées à l'agitation thermique qui sont de l'ordre de plusieurs centaines de mètres par seconde).

3. L'étude des symétries (à faire) montre que  $\vec{B} = B_z(x) \vec{u}_z$  où  $B_z$  est une fonction paire de  $x - a/2$ .

Chaque plan est en fait une nappe de courant (fils jointifs avec une répartition uniforme de densité linéique  $n = 1/\varepsilon$ ). Le calcul du champ créé par un tel plan a été fait en cours. On le calcule avec le théorème d'Ampère et il vaut  $\pm \frac{\mu_0 n I}{2} \vec{u}_z$  suivant qu'on se place au-dessus ou au-dessous du plan. Le champ n'est pas défini sur le plan (la formule est même incorrecte à une distance du plan plus petite que ou comparable à  $\varepsilon$ ).

Par superposition des champs créés par les deux plans : 
$$\begin{cases} x \in ]0, a[ & \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{\varepsilon} \vec{u}_z \\ (x < 0) \text{ ou } (x > a) & \Rightarrow \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

7. Dans le plan  $(\pi)$  on choisit pour origine  $O$  le point à distance  $a$  des deux fils. Par rapport au dessin de l'énoncé, l'axe  $Ox$  est choisi horizontal orienté vers le fond, l'axe  $Oy$  est vertical orienté vers le haut. La petite spire est assimilable à un dipôle de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}} = is \vec{u}_z$ . Les forces magnétiques qu'elle subit sont alors associées à l'énergie potentielle :

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_1 - \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_2.$$

Par exemple,  $-\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_1 = \mathcal{M} B_1 \sin \theta = \mathcal{M} \frac{\mu I}{2\pi r} \sin \theta$  et comme  $\sin \theta = \frac{y}{r}$  :

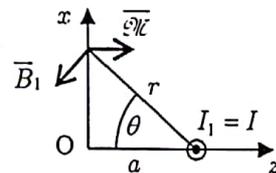
$$-\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_1 = \mathcal{M} \frac{\mu I}{2\pi} \frac{x}{r^2} = \mathcal{M} \frac{\mu I}{2\pi} \frac{x}{a^2 + x^2}$$

Cette relation, montrée ici dans le cas  $x > 0$ , reste valable pour  $x < 0$ .

De même  $-\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_2 = \mathcal{M} \frac{\mu I}{2\pi} \frac{-y}{a^2 + y^2}$  donc  $E_p = \mathcal{M} \frac{\mu I}{2\pi} \left[ \frac{x}{a^2 + x^2} + \frac{-y}{a^2 + y^2} \right]$ .

La fonction  $u \mapsto \frac{u}{u^2 + a^2} + C^{te}$  admet un minimum local en  $u = -a$  et un maximum local en  $u = +a$ . Il y a donc 4 positions d'équilibre (points critiques de  $E_p(x, y)$ ) qui sont  $(x, y) = (\pm a, \pm a)$ . La seule qui soit stable correspond au minimum local par rapport à la fois à  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire  $(x, y) = (-a, +a)$ . Il n'y a pas lieu de

discuter plus ici car  $\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} = 0$ .



5. a. Étude faite en cours.  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$  pour  $r \geq a$  et  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$  pour  $r \leq a$ .

b. On superpose les champs créés par les deux fils en remarquant que l'expression du champ pour  $r \leq a$  peut être écrite sous la forme  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \vec{u}_z \wedge r \vec{u}_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \vec{u}_z \wedge (r \vec{u}_r + z \vec{u}_z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \vec{u}_z \wedge \vec{OM}$ .

Alors  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a^2} \vec{u}_z \wedge (\vec{O_1 M} - \vec{O_2 M})$ .  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a^2} \vec{u}_z \wedge \vec{O_1 O_2}$  est donc indépendant de M (uniforme).

c.  $\text{grad } A_1 \wedge \vec{u}_z = \frac{dA_1}{dr} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z = -\frac{dA_1}{dr} \vec{u}_\theta$ . Il suffit donc de résoudre  $\frac{dA_1}{dr} = -B_\theta$ . On obtient (en imposant

$A_1(a) = 0$ )  $A_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a}$  pour  $r \geq a$  et  $A_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} (a^2 - r^2) \vec{u}_\theta$  pour  $r \leq a$ .

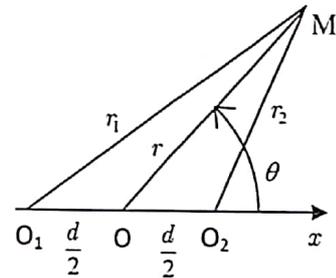
d. On a montré en c. que, pour chaque fil,  $\vec{B}_k = \text{grad } A_k(M) \wedge \vec{u}_z$ . Par linéarité du gradient  $A = A_1 + A_2$  convient. À l'extérieur des deux fils,  $A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$ .

e. Avec la formule d'Al Kashi,  $r_1^2 = r^2 + dr \cos \theta + d^2 / 4$  donc :

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{r^2 - dr \cos \theta + d^2 / 4}{r^2 + dr \cos \theta + d^2 / 4}$$

À l'ordre 1 en  $\frac{d}{r}$ ,  $A \sim \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{1 - \cos \theta d/r}{1 + \cos \theta d/r} \sim -\frac{\mu_0 I d}{2\pi r} \cos \theta$ . Alors :

$$\vec{B} = \text{grad } A \wedge \vec{u}_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{dA}{d\theta} \\ -\frac{dA}{dr} \end{pmatrix}_{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi r^2} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}_{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta}$$



f. Les lignes de champ de  $\vec{B}$  sont tangentes en tout point à  $\vec{B}$  donc perpendiculaires à  $\text{grad } A$ . Or les « équipotentielles »  $A = C^{te}$  sont aussi perpendiculaires en tout point à  $\text{grad } A$ . Elles sont donc confondues avec les lignes de champ.

g. Les lignes de champ ont donc pour équation, hors des fils,  $\frac{r_2}{r_1} = C^{te}$ . Les « géomètres experts » reconnaîtront l'équation de cercles centrés sur la droite  $O_1 O_2$ .

Cas limite : loin des fils, l'équation est  $r = 2K \cos \theta$ . C'est l'équation du cercle de diamètre  $2K$ , de centre  $x = K$ ,  $y = 0$ .

