Coordonnées curvilignes, Champs

1. Une hélice est une courbe définie en coordonnées cylindriques r,θ,z par le fait que $r = R$ et $z = \dfrac{h\theta}{2\pi}$. ($h$ et R sont des constantes positives et on considère ici que θ peut prendre toute valeur réelle).

a. Dessiner cette hélice. Quelle est la signification de h ? Comment nomme-t-on ce paramètre ?

b. Exprimer le déplacement élémentaire (vecteur) le long de cette hélice. Quel est son module ?

c. Déterminer la longueur de la portion de l'hélice correspondant à $\theta \in [0\ ,\ 2\pi]$.

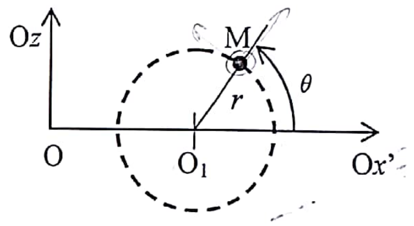
d. Calculer la circulation du champ vectoriel $\vec{E} = E\vec{u}_z$ sur la portion d'hélice précédente orientée dans le sens θ croissant.

e. Calculer la circulation du champ vectoriel $\vec{F} = z\vec{u}_\theta$ sur la même portion d'hélice.

Vendredi **2.** La forme d'un pneu est modélisée par un tore de rayon moyen a de section circulaire de rayon R c'est-à-dire que le pneu est engendré par rotation autour de Oz du cercle du plan xOz, centré en $(x = a\ ,\ z = 0)$ de rayon $R < a$. On introduit les coordonnées r,θ,ϕ définies par :

ϕ a la même définition qu'en coordonnées sphériques. C'est l'angle entre le demi-plan $(\pi) = (\mathrm{O}z,\mathrm{M})$ et la demi-droite Ox.

r et θ repèrent M dans le demi-plan (π) suivant le schéma ci-contre où Ox' est dans le plan Oxy (et fait l'angle ϕ avec Ox), $\mathrm{OO}_1 = a$ (fixé par le pneu à étudier).



a. Dans quelle gamme doivent varier r, θ et ϕ pour décrire tous les points intérieurs au pneu ?

b. Exprimer le déplacement élémentaire en coordonnées r,θ,ϕ après avoir introduit la base adaptée de $\mathbb{R}^3$. Ces coordonnées sont-elles des « *coordonnées curvilignes orthogonales* » ?

c. Exprimer l'aire élémentaire sur la surface du pneu. Calculer l'aire du pneu.

d. Exprimer le volume élémentaire en coordonnées r,θ,ϕ. Calculer le volume d'air contenu dans le pneu.

e. Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{E} = z\vec{u}_z$ à travers la surface du pneu. Comparer avec le volume précédent. Faire de même avec $\vec{F} = x\vec{u}_x$. Interpréter le résultat.

f. Le pneu est en fait constitué d'une couche de caoutchouc d'épaisseur e (le caoutchouc occupe la zone de l'espace $r \in [R - e\ ,\ R]$ et est de masse volumique ρ. Quelle est la masse du pneu ?

3. On utilise les coordonnées sphériques r,θ,ϕ. Soit V le champ scalaire défini par :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{1}{3}\,\frac{3(\cos\theta)^2 - 1}{r^3}$$

a. Calculer le champ vectoriel $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$

b. On se place dans le demi-plan $y = 0\ ,\ x > 0$ (c'est-à-dire $\phi = 0$). Dessiner en quelques points (par exemple 9 ou 11) équirépartis sur le demi-cercle de centre O, de rayon 1 un vecteur colinéaire à $\vec{E}$, de norme constante assez petite.

c. Faire de même pour un ensemble de demi-cercles concentriques de différents rayons.

d. Une ligne de champ est une courbe tangente en tout point M à $\vec{E}(\mathrm{M})$. Tracer à main levée les lignes de champ sur le dessin précédent.

e. En utilisant l'expression du déplacement élémentaire, traduire la définition d'une ligne de champ sous forme d'une équation différentielle.

f. Quelle est la particularité qui rend cette équation différentielle simple ? La résoudre. On pourra remarquer que la dérivée par rapport à θ de $\sin^2\theta\cos\theta$ est $\sin\theta\left(3\cos^2\theta - 1\right)$.