THERMODYNAMIQUE
(transferts thermiques)

1. Un chauffe-eau solaire est constitué d'une plaque de verre transparente pour la lumière solaire sous laquelle circule de l'eau à 93 °C. L'air ambiant est à 27 °C. La puissance surfacique de la lumière solaire passant à travers la plaque est 490 $W.m^{-2}$. Elle est entièrement absorbée par le fond (noir) du chauffe-eau et restituée à l'eau par transfert conducto-convectif. Les coefficients d'échange conducto-convectif entre la plaque de verre et l'eau ou l'air sont 28 et 6,8 S.I. On néglige la résistance thermique de la plaque.
a. Calculer le temps nécessaire pour transférer 10^6 $J.m^{-2}$ à l'eau.
b. Quelle serait l'augmentation de température de 100 L d'eau liquide absorbant 10^6 J ?
$c_{eau} = 1$ calorie $g^{-1}\,K^{-1} = 4{,}185$ J $g^{-1}\,K^{-1}$

2. Une plaque conductrice d'épaisseur L mesurée dans la direction de l'axe Ox est parcourue par un courant électrique de vecteur densité de courant uniforme $\vec{j}$ dirigé selon l'axe Oy. La face placée en $x = 0$ est maintenue à une température $T°$ alors que l'autre face (en $x = L$) est calorifugée. On connaît les conductivités thermique et électrique λ et γ de la plaque. La température ne dépend que de x. Calculer $T(x)$ et l'entropie créée par unité de temps.

3. Une sphère de 10 cm de rayon est le siège d'une production d'énergie uniforme $\alpha = 15$ $kW.m^{-3}$. On maintient sa surface à 20°C. Sa conductivité est 170 $W.K^{-1}.m^{-1}$. Calculer la température en son centre.

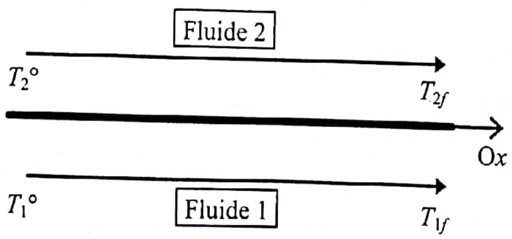
4. Une sphère pleine homogène est initialement à une température uniforme $T°$. On maintient sa surface à la température constante 0. Quel est le temps caractéristique τ avec lequel sa température tend vers 0 ?
a. Donner une première réponse grossière par analyse dimensionnelle.
b. Déterminera τ de façon plus précise en commençant par chercher la température à l'intérieur de la sphère sous la forme $T(r,t) = f(r)\exp(-\alpha t)$.

5. Échangeur de chaleur : Deux fluides ne différant que par leurs températures initiales $T_1°$ et $T_2° > T_1°$ s'écoulent de part et d'autre d'une plaque plane de résistance thermique négligeable. On note h le coefficient de transfert thermique de surface entre la plaque et chacun des fluides. Les écoulements se font selon un axe parallèle à la plaque avec le même débit massique D pour les deux fluides. On définit le rendement à l'aide des températures finales par $\eta = \dfrac{T_{2f} - T_2°}{T_1° - T_2°}$. Le calculer dans les cas où les fluides s'écoulent dans des sens opposés ou identiques.

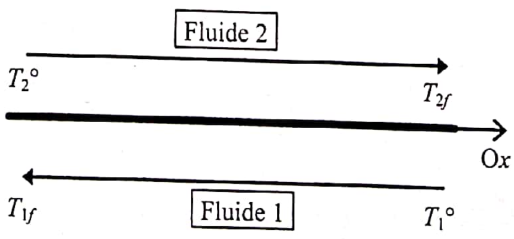
Hypothèses complémentaires et indications :

- On néglige la conduction thermique selon x dans les fluides.
- Le système est mince dans la direction perpendiculaire à la plaque. On adopte, du coup, un modèle unidimensionnel où dans chaque fluide la température ne dépend ni de y ne de z.
- On se place en régime permanent. En chaque point des fluides la température ne dépend pas de t. On écrit donc $T = T_1(x)$ pour le fluide 1 et $T = T_2(x)$ pour le fluide 2.
- On pourra faire un bilan énergétique sur une tranche du fluide 1 ou 2 d'épaisseur Δx (faible, tendant vers 0) étudiée pendant une durée élémentaire dt.

1er cas : vitesses de même sens



2d cas : vitesses de sens opposés



Transferts thermiques

Énoncé détaillé pour l'exercice accompagnant l'étude du « panneau isolant en laine de roche »

Une boule de conductivité λ_1, de centre O, de rayon R, est incluse dans un grand solide de conductivité thermique λ_0. Les conditions aux limites loin de la boule imposent un gradient de température $G\vec{u}_z$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{\text{grad}}\, T_{(M)} \sim G\vec{u}_z$ si $\text{OM} \to \infty$. On s'intéresse à un régime permanent. Les lignes de courant thermique sont représentées sur les dessins pour deux valeurs différentes de λ_1.

a. Que peut-on dire, de façon qualitative, sur les valeurs de λ_1 et de λ_0 dans chaque cas ?

b. On utilise les coordonnées sphériques de centre O et d'axe principal Oz. Le système étant invariant par rotation autour de Oz, la température n'est fonction que de r et θ. Donner la liste de toutes les équations que doit vérifier la fonction $T(r,\theta)$.

c. Proposer (à des constantes multiplicatives près) des formes pour $T(r,\theta)$ dans chacun des domaines $r < R$ et $r > R$. On pourra exploiter les résultats du cours d'électrostatique pour donner des fonctions acceptables (et s'inspirer, pour $r < R$, de la forme des lignes de courant thermique données par les dessins).

d. Déterminer les valeurs de toutes les constantes introduites en **c**, en exploitant complètement les équations mises en évidence en **b**.

Corrigés d'exercices

1. Le système étudié est l'eau contenue sous un mètre carré de plaque de verre. Cette eau perd de l'énergie du côté de la plaque à travers la résistance thermique correspondant à la traversée en série de l'interface eau–plaque et de l'interface plaque–air. Cette résistance thermique, pour une section de un mètre carré vaut $R_{th} = \dfrac{1}{28 \times 1} + \dfrac{1}{6{,}8 \times 1} = 0{,}183\ \text{SI}$ donc la puissance perdue est $P_{\text{perdue}} = \dfrac{T_{\text{eau}} - T_{\text{air}}}{R_{th}} = 361\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. Par ailleurs, l'eau gagne, par le fond noir $P_{\text{gain}} = 490\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. Le bilan énergétique est $P = P_{\text{gain}} - P_{\text{perdue}} = 129\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Pour transférer une énergie 10^6 J, il faudra une durée $\tau = \dfrac{10^6}{P} = 7760\ \text{s} = 2\text{h}\ 9\,\text{min}$.

L'augmentation de température associée est (premier principe) $\Delta T = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{Q}{c_{\text{eau}} m} = \dfrac{10^6}{4{,}185 \times 10^5} = 2{,}4\ \text{K}$!

Le système est totalement inefficace à cause de la mauvaise isolation thermique du côté de la plaque (75% de pertes) et surtout à cause du très grand écart de température entre l'eau et l'air.

3. Le théorème de Gauss thermique, en symétrie sphérique, appliqué à une sphère de rayon $r < R$ conduit à $j_{th} \times 4\pi r^2 = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \times \alpha$ donc $-\lambda \dfrac{\text{d}T}{\text{d}r} = \dfrac{1}{3} r \times \alpha$ qui peut être intégré en $T(r) - T(0) = -\dfrac{\alpha}{6\lambda} r^2$. On obtient alors $T(0) = \dfrac{\alpha}{6\lambda} r^2 + T(R) = T(R) + 0{,}15\ \text{K}$.

La température de la sphère est pratiquement uniforme. Cela est dû à sa très grande conductivité thermique (elle est sans doute métallique) alors que la puissance totale dégagée vaut 63 W ce qui est non négligeable (comparable à celle d'une ancienne ampoule lumineuse à incandescence).