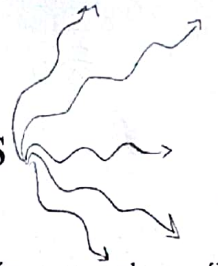
vendredi

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES



1. Une onde électromagnétique dans le vide (sans charges ni courants) est caractérisée par un champ électrique $\vec{E} = E^\circ \exp\left(-x / \delta\right)\cos\left(kz - \omega t\right)\vec{e}_y$ où δ, k et ω sont des constantes.

a. Quels qualificatifs peut-on utiliser pour décrire cette onde ? onde progressive dans le sens z ?, transverse, onde évanescente

b. Quelle est la condition qui lie les paramètres δ, k et ω ? d'Alembert : $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{\delta^2} - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

c. Quelles seraient les vitesses de phase et de groupe de cette onde ? Commenter. $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ ...

d. Calculer le champ magnétique associé à $\vec{E}$.

e. Calculer les valeurs moyennes temporelles (sur un nombre entier de période) du vecteur de Poynting et de la densité volumique d'énergie.

f. Définir et calculer la « vitesse de propagation de l'énergie ».

2. On utilise le modèle classique de l'atome d'hydrogène. Il est constitué d'un proton immobile (charge $+e$) autour duquel se déplace un électron (masse m, charge $-e$) sur une trajectoire circulaire de rayon r.

Mardi

a. Exprimer l'énergie mécanique E_m (énergie cinétique + énergie potentielle électrostatique) en fonction de r.

b. Montrer que la puissance électromagnétique rayonnée P peut-être écrite sous la forme $P = \alpha E_m^4$ où α est une constante.

À cause de la puissance rayonnée, l'énergie de l'atome ne peut rester constante ; r doit varier. On suppose que la variation relative de r sur un tour est assez faible pour considérer que la relation établie à la question précédente reste valable.

c. On note E_0 et P_0 l'énergie mécanique et la puissance rayonnée à l'instant initial $t = 0$. On définit $\tau = -E_0 / P_0$. Quelle est, *a priori*, la signification physique de τ ? Exprimer P en fonction de τ, E_0 et E_m.

d. Par un bilan énergétique, établir l'équations différentielle vérifiée par la fonction $E_m\left(t\right)$.

e. Résoudre cette équation différentielle (elle est à variables séparables) et exprimer la durée de vie de l'atome en fonction de τ.

f. AN. À $t = 0$, $r = 53$ pm (rayon de l'atome d'hydrogène « réel »). Calculer E_0, P_0, τ et la durée de vie. Commenter.

3. Loi de Planck.

Dans une cavité parallélépipédique (longueurs des côtés a, b et d) les seuls modes propres harmoniques possibles sont caractérisés par des triplets d'entiers positifs $\left(n_1, n_2, n_3\right)$. Pour chaque triplet existent deux modes de pulsation ω telle que $\omega^2 = \left(\frac{n_1 \pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2 \pi c}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_3 \pi c}{d}\right)^2$. Chaque mode peut-être occupé par n photons (n entier positif ou nul) d'énergie totale $nh\nu$. À la température T, la probabilité $p(n)$ d'avoir n photons est proportionnelle au facteur de Boltzmann : $p\left(n\right) = A\exp\left(-\frac{nh\nu}{k_B T}\right)$ (A est une constante de normalisation telle que $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1$, h est la constante de Planck et k_B la constante de Boltzmann).

a. Quel est le nombre moyen de photons dans un mode de fréquence ν ? Quelle est l'énergie moyenne de ce mode ?

b. On se place dans l'espace abstrait de dimension 3 dans lequel le mode $\left(n_1, n_2, n_3\right)$ est représenté par le point de coordonnées $\left(\frac{n_1 \pi c}{a}, \frac{n_1 \pi c}{b}, \frac{n_1 \pi c}{d}\right)$. Comment est représenté dans cet espace l'ensemble de tous les modes possibles ? Comment y est représentée la pulsation ω ?

c. On suppose que ω est très grande devant $\pi c / a$, $\pi c / b$ et $\pi c / d$. Où sont placés les modes dont la pulsation est comprise entre ω et $\omega + \mathrm{d}\omega$? Combien y en a-t-il ?

d. Quelle est l'énergie moyenne associée à ces modes ?

e. Montrer que l'énergie volumique moyenne dans la cavité vérifie $\frac{\mathrm{d}W}{V} = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3 \mathrm{d}\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$.