Corrigé de quelques exercices d'électrostatique

5. Chaque tranche de largeur $\mathrm{d}x \to 0$ est assimilable à un plan de charge surfacique $\sigma_{es}(x) = \rho(x)\mathrm{d}x$ dont on a étudié le champ en cours. Ce champ est colinéaire à l'axe Ox. À gauche, il est vers la gauche et, à droite, il est vers la droite, dans les deux cas de module $\sigma_{es}/2\varepsilon_0$.

Autre méthode : Symétrie + Gauss

Pour $x > 0$, toutes les tranches sont à gauche. Par le principe de superposition, le champ global créé vérifie alors $E_x(x>0) = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \rho_0 \exp(u/a)\,\mathrm{d}u = \dfrac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}$ (champ uniforme, indépendant de x).

Pour $x < 0$, les tranches d'abscisse comprises entre $-\infty$ et x créent un champ vers la droite, celles d'abscisses supérieures à x créent un champ vers la gauche donc

$$E_x(x<0) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left[\int_{-\infty}^{x} \sigma_{es}(u)\mathrm{d}u - \int_{x}^{0} \sigma_{es}(u)\mathrm{d}u\right] = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\left[2e^{x/a} - 1\right]$$

On peut remarquer que $E_x(x \to -\infty) = -E_x(x>0)$. À interpréter !

Le potentiel s'obtient en prenant l'opposé d'une primitive de E_x. On peut, par exemple, choisir la primitive qui est nulle en $x = 0$.

$$x \geq 0 \Rightarrow V = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}x \qquad \text{et} \qquad x \leq 0 \Rightarrow V = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\left[2a\left(e^{x/a} - 1\right) - x\right]$$

7. **a.** Soit R le rayon du cercle. Il n'y a pas de frottement, la seule force qui travaille est la force électrostatique qui est conservative (énergie potentielle $E_p = qV = \dfrac{qp\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$). L'énergie mécanique $\dfrac{1}{2}mv^2 + E_p$ est conservée. Elle est nulle dans l'état initial donc $\dfrac{1}{2}mv^2 = -\dfrac{qp\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$.

b. On projette la loi de la quantité de mouvement sur la direction radiale (seule composante non nulle F de la force de contact) : $-m\dfrac{v^2}{R} = F + \dfrac{2qp\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$. Avec **a.** on obtient $F = 0$!

c. Le support ne sert donc à rien ! Si on le supprime, la trajectoire reste la même.

d. Par projection de la loi de la quantité de mouvement sur la direction orthoradiale $mR\ddot{\theta} = \dfrac{qp\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ c'est-à-dire $\ddot{\theta} = \dfrac{qp}{4\pi\varepsilon_0 m R^4}\sin\theta$. Il s'agit de l'équation d'un pendule pesant (de position d'équilibre stable $\theta = \pi$ si $q > 0$ ou $\theta = 0$ si $q < 0$) dont la pulsation des petites oscillations serait $\sqrt{\dfrac{|q|p}{4\pi\varepsilon_0 m R^4}}$.

8. Avec le théorème de Gauss (symétrie sphérique) on montre que la sphère seule crée dans son intérieur un champ nul et à l'extérieur le même champ qu'une charge ponctuelle Q placée en son centre. Pour le système global, à l'intérieur le champ total est donc celui créé par la charge ponctuelle $-Q$ (champ radial convergeant vers le point où est la charge donc, en pratique, le point O) et, à l'extérieur c'est le champ créé par un doublet de charges $-Q$ et $+Q$ très proches. C'est donc pratiquement le champ dipolaire associé à $\vec{p} = Q\vec{a}$ où $\vec{a}$ est le vecteur position de Q par rapport à $-Q$.