Magnétostatique (corrigé d'exercices)

1. On considère que la densité de courant est uniforme dans le fil de section droite S. On utilise la relation $\vec{j} = \rho_{\text{mobile}}\vec{v}$. Cette relation a été montrée en cours pour un ensemble de particules <u>identiques</u> et de <u>même vitesse</u> $\vec{v}$. On peut montrer (à faire en utilisant la propriété $\vec{j}\,\mathrm{d}\tau = \sum_{\mathrm{d}\tau} q_i\vec{v}_i$) qu'elle s'applique à un ensemble de particules <u>identiques</u> si on note $\vec{v}$ la <u>vitesse moyenne</u> de ces particules. Si chaque atome de cuivre libère un électron, la densité particulaire des électrons est $n = \dfrac{\rho_{\text{Cu}}}{M_{\text{Cu}}}N_{\text{A}}$ et $\rho_{\text{mobile}} = -ne$.

La définition de $\vec{j}$ ($I_\Sigma = \int_\Sigma \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$) conduit à $I = jS = |\rho_{\text{mobile}}|\,vS = nevS = N_{\text{A}}\rho_{\text{Cu}}evS\,/\,M_{\text{Cu}}$.

AN : $j = 6{,}7\times10^6\ \text{A}\cdot\text{m}^{-2}$ $\quad v \approx 0{,}5\ \text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ Les courants ordinaires sont associés à des vitesses d'ensemble des charges mobiles très faibles (beaucoup plus faibles que les vitesses individuelles liées à l'agitation thermique qui sont de l'ordre de plusieurs centaines de mètres par seconde).

3. L'étude des symétries (à faire) montre que $\vec{B} = B_z(x)\vec{u}_z$ où B_z est une fonction paire de $x - a/2$.

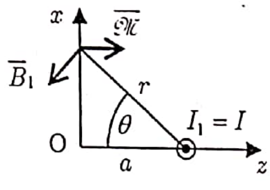
Chaque plan est en fait une nappe de courant (fils jointifs avec une répartition uniforme de densité linéique $n = 1/\varepsilon$). Le calcul du champ créé par un tel plan a été fait en cours. On le calcule avec le théorème d'Ampère et il vaut $\pm\dfrac{\mu_0 nI}{2}\vec{u}_z$ suivant qu'on se place au-dessus ou au-dessous du plan. Le champ n'est pas défini sur le plan (la formule est même incorrecte à une distance du plan plus petite que ou comparable à ε).

Par superposition des champs créés par les deux plans : $\begin{cases} x \in \left]0,a\right[& \Rightarrow \vec{B} = -\dfrac{\mu_0 I}{\varepsilon}\vec{u}_z \\ (x<0)\ \text{ou}\ (x>a) & \Rightarrow \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$.

7. Dans le plan (π) on choisit pour origine O le point à distance a des deux fils. Par rapport au dessin de l'énoncé, l'axe Ox est choisi horizontal orienté vers le fond, l'axe Oy est vertical orienté vers le haut. La petite spire est assimilable à un dipôle de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = is\,\vec{u}_z$. Les forces magnétiques qu'elle subit sont alors associées à l'énergie potentielle :

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B} = -\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}_1 - \vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}_2.$$

Par exemple, $-\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}_1 = \mathcal{M}B_1\sin\theta = \mathcal{M}\dfrac{\mu I}{2\pi r}\sin\theta$ et comme $\sin\theta = \dfrac{x}{r}$:



$$-\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}_1 = \mathcal{M}\frac{\mu I}{2\pi}\frac{x}{r^2} = \mathcal{M}\frac{\mu I}{2\pi}\frac{x}{a^2+x^2}$$

Cette relation, montrée ici dans le cas $x > 0$, reste valable pour $x < 0$.

De même $-\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}_2 = \mathcal{M}\dfrac{\mu I}{2\pi}\dfrac{-y}{a^2+y^2}$ donc $E_p = \mathcal{M}\dfrac{\mu I}{2\pi}\left[\dfrac{x}{a^2+x^2} + \dfrac{-y}{a^2+y^2}\right]$.

La fonction $u \mapsto \dfrac{u}{u^2+a^2} + C^{te}$ admet un minimum local en $u = -a$ et un maximum local en $u = +a$. Il y a donc 4 positions d'équilibre (points critiques de $E_p(x,y)$) qui sont $(x,y) = (\pm a, \pm a)$. La seule qui soit stable correspond au minimum local par rapport à la fois à x et y, c'est-à-dire $(x,y) = (-a,+a)$. Il n'y a pas lieu de discuter plus ici car $\dfrac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} = 0$.

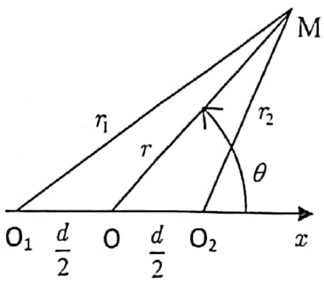
5. **a.** Étude faite en cours. $\vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$ pour $r \geq a$ et $\vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\vec{u}_\theta$ pour $r \leq a$.

b. On superpose les champs créés par les deux fils en remarquant que l'expression du champ pour $r \leq a$ peut être écrite sous la forme $\vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\vec{u}_z \wedge r\vec{u}_r = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\vec{u}_z \wedge (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM}$.

Alors $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi a^2}\vec{u}_z \wedge \left(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}\right)$. $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi a^2}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O_1O_2}$ est donc indépendant de M (uniforme).

c. $\overrightarrow{\text{grad}}\, A_1 \wedge \vec{u}_z = \dfrac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r \wedge \vec{u}_z = -\dfrac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}r}\vec{u}_\theta$. Il suffit donc de résoudre $\dfrac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}r} = -B_\theta$. On obtient (en imposant $A_1(a) = 0$) $A_1 = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{r}{a}$ pour $r \geq a$ et $A_1 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a^2}(a^2 - r^2)\vec{u}_\theta$ pour $r \leq a$.

d. On a montré en **c.** que, pour chaque fil, $\vec{B}_k = \overrightarrow{\text{grad}}\, A_k(\mathrm{M}) \wedge \vec{u}_z$. Par linéarité du gradient $A = A_1 + A_2$ convient. À l'extérieur des deux fils, $A = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{r_2}{r_1}$.



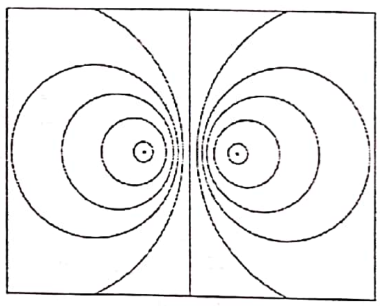
e. Avec la formule d'Al Kashi, $r_1^2 = r^2 + dr\cos\theta + d^2/4$ donc :

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{r^2 - dr\cos\theta + d^2/4}{r^2 + dr\cos\theta + d^2/4}$$

À l'ordre 1 en $\dfrac{d}{r}$, $A \sim \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\dfrac{1-\cos\theta\, d/r}{1+\cos\theta\, d/r} \sim -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{d}{r}\cos\theta$. Alors :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}\, A \wedge \vec{u}_z = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} \\ -\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} \end{pmatrix}_{\vec{u}_r,\vec{u}_\theta} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi r^2}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}_{\vec{u}_r,\vec{u}_\theta}$$

f. Les lignes de champ de $\vec{B}$ sont tangentes en tout point à $\vec{B}$ donc perpendiculaires à $\overrightarrow{\text{grad}}\, A$. Or les « équipotentielles » $A = C^{te}$ sont aussi perpendiculaires en tout point à $\overrightarrow{\text{grad}}\, A$. Elles sont donc confondues avec les lignes de champ.



g. Les lignes de champ ont donc pour équation, hors des fils, $\dfrac{r_2}{r_1} = C^{te}$. Les « géomètres experts » reconnaitront l'équation de cercles centrés sur la droite O_1O_2.

Cas limite : loin des fils, l'équation est $r = 2K\cos\theta$. C'est l'équation du cercle de diamètre $2K$, de centre $x = K$, $y = 0$.